

高考复习用书

数学 点金

第二轮

浙江科学技术出版社

高考复习用书(二轮)

◆语文点金

◆数学点金

◆英语点金

◆物理点金

◆化学点金

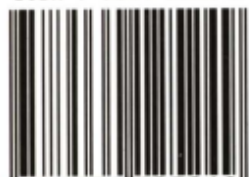
◆生物点金

◆历史点金

◆地理点金

◆政治点金

ISBN 7-5341-2524-3



9 787534 125249 >

ISBN 7-5341-2524-3

定 价: 16.00 元



高考复习用书

数学点金

主 审	夏国良	陈翔雁	潘国权	陈立群	黄益琨
	过伯祥	吴明华	苏益林	叶事一	
主 编	许纪传	蔡水明	龚德行	方世跃	张启源
副主编	张拥军	张品良	吴金龙	胡国新	张仁达
	陈兴浩	姜海斌	郑建军	徐小凯	章润生

第二轮

浙江科学技术出版社





主 审 夏国良 陈翔雁 潘国权 陈立群 黄益琨

过伯祥 吴明华 苏益林 叶事一

主 编 许纪传 蔡水明 龚德行 方世跃 张启源

副主编 张拥军 张品良 吴金龙 胡国新 张仁达

陈兴浩 姜海斌 郑建军 徐小凯 章润生

编 委 (按姓氏笔画为序)

毛美生 毛福良 孔小明 卢 明 叶利民 刘水根 汤建新

许洪顺 孙伟奇 杨佳萍 吴文广 余继光 邸士荣 沈红正

沈志光 沈新权 张敬政 张增明 林天齐 周岳全 郑建军

胡国新 俞红兴 俞晓红 费红亮 姚龙国 顾贯石 徐 青

留通州 高 云 郭跃安 陶思亭 黄顺贵 舒林军 蒋志明

楼士平 楼祥其 戴雪燕

图书在版编目(CIP)数据

高考复习用书. 数学点金/许纪传等主编. 杭州:

浙江科学技术出版社, 2004.12

ISBN 7-5341-2524-3

I. 高… II. 许… III. 数学课-高中-升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 119075 号

*

高考复习用书

数学点金

主 编 许纪传 蔡水明 龚德行

浙江科学技术出版社出版

杭州大众美术印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本: 787×1092 1/16 印张: 12.25 字数: 340 000

2004 年 12 月 第 1 版

2005 年 11 月 第 4 次印刷

ISBN 7-5341-2524-3

定价: 16.00 元

封面设计 孙 菁

责任编辑 周伟元

版权所有 盗版必究

电话: 0571-85170300-61715



前言

一本好的高考复习用书,就是你通过高考的有力助手。

为帮助广大考生在高考数学复习过程中进一步提高数学能力,浙江科学技术出版社邀请我省重点中学的一线特、高级教师,在省高考数学研究专家的指导下,精心编写了这本《数学点金》。

《数学点金》吸收了2004版《高考第二轮复习用书——数学点金》中一些突出的优点,根据高考数学的特点和命题走向,严格以《普通高等学校招生全国考试大纲·数学》和我省的高考数学考试说明为依据,采用专题形式修订再版的。

《数学点金》共分4个部分:(1)回顾与预测;(2)知识串讲与串练;(3)专题导引与训练;(4)综合训练。知识串讲与串练和专题导引与训练为全书的主体部分,每个专题由考点巩固、考题剖析、答题指津、随堂自测和实战演练5个部分构成。

“考点巩固”,就是逐条阐释考纲规定的考试内容,明确它的内涵、外延及具体要求,帮助备考的师生加深对考点的理解和把握。

“考题剖析”,选取近年我省高考数学试卷及全国卷、各自主命题的省、市卷中与考点相对应的典型试题进行剖析,明确考点在具体试题上出现的内容和呈现形式。

“答题指津”,即给考生以答题的思路、方法和技巧,主要是结合试题分析有代表性的答题偏误的原因,寻求有效答题的途径、策略。

“随堂自测”和“实战演练”,从自测和仿真两个角度,编写多种题型的有价值的试题。内容求实、求精、求科学,题型仿真而不乏创意,使用简便。考生通过训练将能巩固知识内容,明显提升自己的数学能力。

本书安排教学时数为55~60课时,大约2个半月授完,其中专题11为1个课时,专题15,17各为2个课时,专题1,4,5,6,10,13,14各为3个课时,专题2,3,9,12,16各为4个课时,专题7为5个课时,专题8为6个课时。凡有“*”的例题和习题各校可根据情况自行选用。

《数学点金》力求准确反映考纲精神,全面覆盖考点内容,正确把握命题走向,仿真编拟题目,仿真训练检测。愿《数学点金》助你成功,分享你的快乐!

参加本书编写的人员在数学高考复习指导方面有着丰富的实践经验和一定的理论研究水平,这在很大程度上保证了本书具有良好的针对性、科学性、实用性和有效性,本书在编写过程中得到了有关专家、学者,有关学校领导的关爱和支持,在此一并表示真挚的谢意。

尽管本书凝聚着群体的智慧和经验,也尽管我们的工作十分努力,但疏漏甚至错误之处可能存在,敬请广大读者不吝赐教。

编者

2005年10月

2006-3-13		国家新闻出版署收		样书室收		第2包		页号2	
第二批		浙江科学技术出版社2006年缴送样书清单							
序号	书号	书名	重印时间	数量					
28	7-5341-2780-7	高考第二轮复习用书理科综合化学点金	2006年2月2版5次	1					
29	7-5341-2780-7	高考第二轮复习用书理科综合物理点金	2006年2月2版6次	1					
30	7-5341-2779-3	高考第二轮复习用书文科综合政治点金	2006年12月2版3次	1					
31	7-5341-2525-1	高考第二轮复习用书英语点金	2006年1月1版5次	1					
32	7-5341-2524-3	高考第二轮复习用书数学点金	2006年11月1版4次	1					
33	7-5341-2557-X	假日教育活动读本小学生活动数学(1)下册	2006年1月1版2次	1					
34	7-5341-2558-8	假日教育活动读本小学生活动数学(2)下册	2006年1月1版2次	1					
35	7-5341-2559-6	假日教育活动读本小学生活动数学(3)下册	2006年1月1版2次	1					
36	7-5341-2560-X	假日教育活动读本小学生活动数学(4)下册	2006年1月1版2次	1					
37	7-5341-2561-8	假日教育活动读本小学生活动数学(5)下册	2006年1月1版2次	1					
38	7-5341-2562-6	假日教育活动读本小学生活动数学(6)下册	2006年1月1版2次	1					
39	7-5341-2563-4	假日教育活动读本中学生阅读与写作(7)下册	2006年1月1版2次	1					
40	7-5341-2564-2	假日教育活动读本中学生阅读与写作(8)下册	2006年1月1版2次	1					
41	7-5341-2565-0	假日教育活动读本中学生阅读与写作(9)下册	2006年1月1版2次	1					
42	7-5341-2557-X	假日教育活动读本小学生书法(1)下册	2006年1月1版2次	1					
43	7-5341-2558-8	假日教育活动读本小学生书法(2)下册	2006年1月1版2次	1					
44	7-5341-2559-6	假日教育活动读本小学生书法(3)下册	2006年1月1版2次	1					
45	7-5341-2557-X	假日教育活动读本小学生小记者(1)下册	2006年1月1版2次	1					
46	7-5341-2558-8	假日教育活动读本小学生小记者(2)下册	2006年1月1版2次	1					
47	7-5341-2563-4	假日教育活动读本初中生活动数学(7)下册	2006年1月1版2次	1					
48	7-5341-2564-2	假日教育活动读本初中生活动数学(8)下册	2006年1月1版2次	1					
49	7-5341-2565-0	假日教育活动读本初中生活动数学(9)下册	2006年1月1版2次	1					
50	7-5341-2533-2	新课标名师大课堂语文七年级·下册R	2006年1月1版2次	1					
51	7-5341-2530-8	新课标名师大课堂科学七年级·下册浙教	2006年1月1版2次	1					
52	7-5341-2538-3	新课标名师大课堂语文八年级·下册R	2006年1月1版2次	1					
53	7-5366-2539-1	新课标名师大课堂科学八年级·下册浙教	2006年1月1版2次	1					

2006-3-13日			国家新闻出版署收		样书室收		第2包		页号3		
第二批			浙江科学技术出版社2006年缴送样书清单								
序号	书	号	书	名	重	印	时	间	数	量	
54	7-5341-2721-1		浙江省基础教育地方课程教科书 (试用)	话说温州六年级	2006年1月1版2次				1		
55	7-5341-2724-6		浙江省基础教育地方课程教科书 (试用)	话说温州五年级	2006年1月1版2次				1		
56	7-5341-2559-6		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (3) 下册	2006年1月1版2次				1		
57	7-5341-2560-X		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (4) 下册	2006年1月1版2次				1		
58	7-5341-2561-8		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (5) 下册	2006年1月1版2次				1		
59	7-5341-2562-6		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (6) 下册	2006年1月1版2次				1		
60	7-5341-2563-4		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (7) 下册	2006年1月1版2次				1		
61	7-5341-2564-2		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (8) 下册	2006年1月1版2次				1		
62	7-5341-2565-0		假日教育活动读本	小学生英语乐园 (9) 下册	2006年1月1版2次				1		
63	7-5341-2559-6		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (3) 下册	2006年1月1版2次				1		
64	7-5341-2560-X		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (4) 下册	2006年1月1版2次				1		
65	7-5341-2561-8		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (5) 下册	2006年1月1版2次				1		
66	7-5341-2562-6		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (6) 下册	2006年1月1版2次				1		
67	7-5341-2563-4		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (7) 下册	2006年1月1版2次				1		
68	7-5341-2564-2		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (8) 下册	2006年1月1版2次				1		
69	7-5341-2565-0		假日教育活动读本	小学生生活中的科学 (9) 下册	2006年1月1版2次				1		
70	7-5341-2557-X		假日教育活动读本	本阅读与表达 (1) 下册	2006年1月1版2次				1		
71	7-5341-2558-8		假日教育活动读本	本阅读与表达 (2) 下册	2006年1月1版2次				1		
72	7-5341-2559-6		假日教育活动读本	本阅读与表达 (3) 下册	2006年1月1版2次				1		
73	7-5341-2560-X		假日教育活动读本	本阅读与表达 (4) 下册	2006年1月1版2次				1		
74	7-5341-2561-8		假日教育活动读本	本阅读与表达 (5) 下册	2006年1月1版2次				1		
75	7-5341-2562-6		假日教育活动读本	本阅读与表达 (6) 下册	2006年1月1版2次				1		
76	7-5341-2270-8		新课标天天伴我学语文	一年级·下册	2006年1月1版3次				1		
77	7-5341-2541-3		新课标天天伴我学语文	二年级·下册	2006年1月1版2次				1		
78	7-5341-2271-6		新课标天天伴我学语文	二年级·下册	2006年1月1版3次				1		
79	7-5341-2578-2		新课标天天伴我学语文	二年级·下册	2006年1月1版2次				1		

2006-3-13日

国家新闻出版署收

样书室收

第2包

页号4

第二批 浙江科学技术出版社2006年缴送样书清单

序号	书号	书名	重印时间	数量
80	7-5341-2275-9	新课标天天伴我学英语七年级·下册	2006年1月1版3次	1
81	7-5341-2579-0	新课标天天伴我学英语八年级·下册	2005年12月1版2次	1
82	7-5341-2274-0	新课标天天伴我学数学一年级·下册	2006年1月1版3次	1
83	7-5341-2588-X	新课标天天伴我学科学七年级·第二册	2006年1月1版2次	1
84	7-5341-2387-9	全日制普通高级中学(必修加选修)化学第二册(修订本)	2006年1月2版7次	1
85	7-5341-2388-7	全日制普通高级中学(选修)化学第三册(修订本)	2006年1月2版4次	1
86	7-5341-2390-9	全日制普通高级中学(必修加选修)物理第二册(修订本)	2006年1月2版9次	1
87	7-5341-2339-3	全日制普通高级中学(必修)物理第一册(修订本)	2006年1月2版8次	1
88	7-5341-2248-1	新课标科学补实验活动学习指导第二册(7年级用)	2006年1月1版3次	1



目 录

第一部分 回顾与预测	1
第二部分 知识串讲与串练	3
专题一 集合与简易逻辑	3
专题二 函数	9
专题三 数列、数学归纳法	18
专题四 三角函数	28
专题五 平面向量	37
专题六 不等式	44
专题七 直线、圆与圆锥曲线	52
专题八 直线与平面、空间向量、简单几何体	63
专题九 排列与组合、概率与统计	77
专题十 极限与导数	87
专题十一 复数	96
第三部分 专题导引与训练	99
专题十二 数学思想方法	99
专题十三 开放探索问题	109
专题十四 实际应用问题	119
专题十五 客观题的合理解法	128
专题十六 综合题的解法	133
专题十七 数学解题策略	146
第四部分 综合训练	157
综合训练 I	157
综合训练 II	161
综合训练 III	165

第一部分 回顾与预测

一、2005 年高考回顾

总体情况:2005 年高考数学浙江卷在 2004 年的基础上稳中有变、变中有新,体现了“稳中求新”的精神。试题在能力考查和体现新课程改革方面做了有益的探索,不仅具有良好的评价功能,而且对指导高中数学教学起到了积极的导向作用。

与 2004 年高考数学浙江卷相比,在题型上,选择题、填空题、解答题这 3 种命题排列次序保持不变;在试题数量上,减少了 2 个选择题,将其 10 分增加到主观题中。这样,既注重对考生数学思维能力与表达能力的考查,又符合减轻学生学习负担的教学改革需要。在考查内容(理科卷)上,新增知识占 31 分,传统内容中代数占 73 分、立体几何占 23 分、解析几何占 23 分,比例合理。试题总体难度适中,但理科卷难度略有上升,文科卷难度稍有下降。文、理科两份试卷完全相同的题目只有 6 个,而两份试卷中背景相同但难度不一的“姐妹题”有 8 个,充分体现了对文、理科考生不同的数学要求。这样的难度调整符合考生心理准备,也是高中数学教师们的共同期望。

1. 突出数学知识的基础性,主干内容重点考查

代数中的函数、数列、不等式、三角基本变换,立体几何中的线线、线面、面面的平行和垂直关系,解析几何中直线与圆锥曲线方程及其性质,新增加的向量、概率统计、导数等构成高中数学的主干知识。2005 年高考仍然坚持从基础知识、基本方法、重点内容出发命题,对这些高中数学的主体内容和主体知识进行了重点考查。如对函数来说,2005 年浙江理科卷第(3)(8)(9)(11)(15)(16)(20)题,从不同的侧面考查了函数的有关概念、重要性质和基本应用,其中包括函数的表示法、定义域、值域、分段函数、反函数、函数的图像、函数的单调性和最值,涉及函数类型有一次函数、二次函数、指数函数、三角函数以及特殊函数(数列)等,对函数的考查几乎涵盖了高中所学函数的全部内容。

2. 新增内容的考查得到加强

2005 年浙江理科卷的线性规划题由 2004 年的第(5)题移至第(7)题,向量题成为最后一道选择题,概率统计题成为倒数第 2 题,导数的应用放在最后一题。这说明对新增内容的考查明显比 2004 年有所提高,体现和贯彻了高中数学新课程改革的精神。

3. 对数学语言的能力要求有所提高

数学思维能力的考查进一步深化,对数学语言的阅读、理解、转化、表达的能力要求有所提高。2005 年浙江理科卷第(7)题考查知识转换、图像识别能力,第(9)题考查材料阅读、理解迁移能力,第(12)题考查几何画图、空间想像能力,第(18)题考查自主探索、逻辑推理能力,第(20)题综合考查等价转换、抽象概括、归纳推理、猜想证明等能力。这些题目立意都比较新颖,是整份试卷中的“亮点”。

4. 加强对知识综合性的考查

试题以突出能力立意为本,从问题入手,把握学科的整体意义,用统一的数学观点组织材料,试题的知识载体落在知识网络的交汇点上,强调知识的综合。并且,在强调综合性的同时,也十分注重层次性,合理调控综合程度。2005 年浙江理科卷第(6)题是简易逻辑和立体几何的综合,第(8)题是三角函数值域和二次函数最值知识的综合,第(13)题是双曲线和圆内容的综合,第(17)题是直线、圆锥曲线、重要不等式内容的综合,第(20)题是二次函数求导、导数的应用、等差数列和数学归纳法等方面的大综合。试



卷体现了加强综合是命题的一种趋势。事实上,总题量的减少与加大试题的综合性是保证试卷有相对稳定的知识覆盖面和较高信度的有效方法。

5. 加强了数学思想方法的考查

2005年浙江卷以数学知识为载体,突出考查了数学思想方法的掌握和应用。如理科卷第(10)(17)(18)题,文科卷第(19)(20)题均考查了数形结合思想;理科卷第(14)(20)题考查分类讨论思想;理科卷第(10)(16)题,文科卷第(9)(20)题均考查了函数方程思想;理科卷第(7)(10)(16)(17)(20)题,文科卷第(10)(19)(20)题考查了等价转换思想,等等。

二、2006年高考复习建议

总体趋势是保持稳定,继续保持2004年和2005年试卷起点较低的特点,使大多数考生容易入手。适度控制新题的数量和总体计算量,综合大题仍会设计一些小问题加以引导。考虑到我省数学教育总体水平较高,《考试说明》又增加了对个性品质的考查要求,可能会出现融知识、能力、素质于一体的应用型和能力型试题。估计2006年文科卷难度会较2005年稍有上调,理科卷基本持平,压轴题的难度不会加大,个别试题计算量偏大的现象会得到调整。

突出对支撑数学学科知识体系的主干知识的考查,如函数、不等式、数列、向量、概率与统计、导数、直线与平面、直线和圆锥曲线等。这些主干内容仍是2006年高考的重点。

1. 应关注真正意义上的实际问题数学化试题

高考考应用题,其初衷是要考查学生分析和解决问题的能力,尤其是数学建模能力。这两年浙江卷都编写了一个概率统计方面的“摸球”题,它考查相互独立事件随机变量的分布列和数学期望。它们还不是真正意义上的实际问题数学化试题。预计上述现象将会有新的突破。

2. 应关注向量在解析几何中的工具作用

解析几何是高考的重头戏。解析几何部分的选择題、填空题主要考查圆锥曲线的标准方程及几何性质等基础知识、基本技能、基本方法;解答题的重点是直线与圆锥曲线的位置关系,题型主要有3类:求曲线(轨迹)的方程、圆锥曲线的证明题、求圆锥曲线的最值。在此处应考虑到向量作为代数与几何的纽带,理应发挥其坐标运算与动点轨迹、曲线方程等方面综合的工具性功能。要关注解析几何试题中向量与代数、三角、几何知识的综合运用。

3. 应注意解答题中各小题之间的相互关联性

2005年浙江卷共有6个解答题,每题都有二三个小题。但每题中的小题之间尚缺乏内在的、有机的联系,大多属于“并列式”、“拼盘式”的组合。从检测、评价功能的角度看,它们的作用的确不小。但这些题目较少有美的感觉,而“发现式”、“纵向式”的数学问题能增添试卷的灵气。我们应多关注“发现式”、“纵向式”解答题的解题思维过程的研究。

4. 抓好复习的关键词“活”,强调知识与能力并重,注重挖掘学习潜能

从考试的形式和内容看,数学试题“活”的成分越来越多,可谓日新月异。比如,函数、数列作为传统的重点,越考越鲜活;导数、向量、概率统计是新生代,其工具作用已相当明显;导数使得对函数性质的研究别开生面;以向量为工具研究几何,已成为人们的共识,并由此形成高考试题的一道靓丽的风景线。

从高考命题的立意上看,已由“知识立意”转变为“能力立意”,并逐步发展能力的内涵,不断加大考查的力度。我们要全面、正确地理解上述转变的意义,做到知识与能力并重,两者都不偏废。高考强调考查能力,它不仅考查学生对高中数学知识的掌握情况,而且以这些知识情景为素材,考查运用知识和方法过程中的学科能力和一般能力。这种全方位的能力是学生进入高校学习的基本素质,也将是2006年高考的一个热点。

第二部分 知识串讲与串练

专题一 集合与简易逻辑

【考点巩固】

集合与简易逻辑是高中数学的基础内容之一,也是高考必考内容.集合语言和逻辑推理渗透在数学的各个领域中,涉及的数学思想方法主要有:数形结合思想、分类讨论思想、函数方程思想、等价转化思想及反证法等.高考考查的热点主要有:集合基本概念的理解与应用(元素与集合的关系,集合与集合的关系,集合的运算,求不等式或不等式组的解集),四种命题的关系,充要条件的判定等.

【考题剖析】

在2005年的高考试卷中,集合和简易逻辑的内容多以客观题的形式进行考查,以它们为载体的题目可以涉及函数、三角、数列、不等式、解析几何、立体几何等方方面面的内容.试题的难度不大,主要考查集合的识别和表达,集合间的关系和运算,命题真假判断,充要条件的概念等.

例1 (2005年浙江卷) 设 $f(n)=2n+1 (n \in \mathbf{N})$, $P=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q=\{3, 4, 5, 6, 7\}$. 记 $\hat{P}=\{n \in \mathbf{N} | f(n) \in P\}$, $\hat{Q}=\{n \in \mathbf{N} | f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \mathbf{N} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \mathbf{N} \hat{P}) = (\quad)$

- A. $\{0, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 6, 7\}$

剖析 $\because \hat{P}=\{0, 1, 2\}, \hat{Q}=\{1, 2, 3\}, \therefore \hat{P} \cap \mathbf{N} \hat{Q}=\{0\}, \hat{Q} \cap \mathbf{N} \hat{P}=\{3\}$, 故选A.

说明 集合的考查大多以数集和点集为主,数集要分清函数变量的取值范围和函数值的取值范围,加强符号语言的理解.涉及多个集合的运算,利用数轴和韦恩图可以使关系变得直观、明朗.本题不要被新符号 $\hat{P}, \hat{Q}$ 所迷惑,明确 $\hat{P}, \hat{Q}$ 中元素的属性是解题的关键.

例2 (2005年浙江卷) 设 α, β 为两个不同的平面, l, m 为两条不同的直线, 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$. 有如下两个命题: ①若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $l \parallel m$; ②若 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$, 那么 $(\quad)$

- A. ①是真命题, ②是假命题 B. ①是假命题, ②是真命题
C. ①②都是真命题 D. ①②都是假命题

剖析 分别在两个平行平面内的两条直线可以是平行或异面关系, 故①是假命题; 分别在2个平面内的2条直线互相垂直(异面垂直或相交垂直), 这2个平面可以平行或相交(斜交或垂直), 故②是假命题. 综上所述, 选D.

说明 试题大多以判断命题的真假来考查对概念、公式、定理、性质等基础知识的理解 and 应用水平. 判断命题为真, 须给出严密的逻辑推理; 判断命题为假, 只需列举一个反例即可. 本题可根据正方体模型中的线面关系进行判断.

例3 (2005年上海卷) 已知集合 $M=\{x | |x-1| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $P=\{x | \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap P$ 等于 $(\quad)$

- A. $\{x | 0 < x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x | 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x | -1 \leq x \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$ D. $\{x | -1 \leq x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$



剖析 $M = \{x | -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{R}\}$, $P = \{x | -1 < x \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 故选B.

说明 以集合的关系和运算为载体, 考查不等式的解法是常见的问题. 本题易错的地方是数的范围, 元素的特征是判断集合关系和正确运算的前提.

例4 (2005年湖北卷) 对任意实数 a, b, c , 给出下列命题:

- (1) “ $a=b$ ”是“ $ac=bc$ ”的充要条件;
- (2) “ $a+5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件;
- (3) “ $a>b$ ”是“ $a^2>b^2$ ”的充分条件;
- (4) “ $a<5$ ”是“ $a<3$ ”的必要条件.

其中真命题的个数是()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

剖析 $ac=bc$ 的充要条件是 $a=b$ 或 $c=0$, 故“ $a=b$ ”是“ $ac=bc$ ”的充分条件, (1)是假命题; $a^2>b^2$ 的充要条件是 $|a|>|b|$, 故“ $a>b$ ”是“ $a^2>b^2$ ”的既不充分也不必要条件, (3)是假命题; (2)(4)是真命题, 所以选B.

说明 充要条件问题涉及高中数学的所有内容. 判断充要条件时首先要分清条件和结论, 其次要掌握判断的方法, 如定义法、等价法、集合法等, 命题是以否定形式给出的, 常用等价法, 命题反映的是数的范围问题常用集合关系进行判断.

【答题指津】

1. 元素与集合、集合与集合的关系

例1 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是()

- A. $(\complement_I A) \cup B = I$ B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

指津 本题考查集合关系的等价形式. 用图形(韦恩图、数轴)判断集合间的关系是直观有效的方法.

简解 容易判断选择支A, C是正确的. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I (A \cup B) = \complement_I B$, 故D是正确的.

$(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I (A \cap B) = \complement_I A$, 则B错, 故选B.

评注 明确 $A \subseteq B$ 等集合关系的等价形式是解决问题的关键.

例2 设集合 $S = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } |x| < 1\}$. 在 S 中定义运算 “ $*$ ”, 使得 $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$. 证明: 若 $a \in S$, $b \in S$, 则 $a * b \in S$.

指津 只需证明 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$.

简证 $\because a \in S, b \in S, \therefore |a| < 1, |b| < 1$.

$\therefore \frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{(a+1)(b+1)}{1+ab} > 0$, 即 $\frac{a+b}{1+ab} > -1$.

又 $\because 1 - \frac{a+b}{1+ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1+ab} > 0$, 即 $\frac{a+b}{1+ab} < 1$, 故 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$, 从而 $a * b \in S$.

评注 一个包含新定义、新运算、新关系的信息迁移问题, 可以很好地考查学生的数学思维水平及语言理解、新旧知识转化等分析解决问题的能力, 在高考复习中要引起重视. 本题的解题关键是理解集合 S 中元素的特性及新运算 “ $*$ ” 的含义.

2. 集合的运算

例3 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$ 其中 P, M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$. 给出下列4个判断:

- (1)若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$;
 (2)若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$;
 (3)若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$;
 (4)若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$.

其中正确判断有()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

指津 准确理解集合 $P, M, f(P), f(M)$ 的含义是解决问题的关键.

简解 若 $P = [0, +\infty), M = (-\infty, 0)$, 则 $f(P) = [0, +\infty), f(M) = (0, +\infty)$, 故(1)、(3)错.

由分段函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P \\ -x, & x \in M \end{cases}$ 可知, 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则必有 $P \cap M = \{0\}$, 从而 $f(P) \cap f(M) = \{0\} \neq \emptyset$, 故(2)对. (4)显然正确, 故选 B.

评注 本题实质是以集合的运算为载体, 考查函数概念的理解水平.

3. 不等式、函数、方程之间的关系

例4 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 3x + t < 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < m, x \in \mathbf{R}\}$, 函数 $f(x) = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 求关于 x 的不等式 $\frac{tx-3}{x-m} < a$ 的解集.

指津 利用一元二次不等式与一元二次函数、一元二次方程之间的关系, 求出 m 和 t 的值, 同时确定 a 的取值范围. 这样可以避免对 a 的讨论.

简解 由条件知, 方程 $x^2 - 3x + t = 0$ 的两根为 1 和 m , 根据韦达定理得: $m = 2, t = 2$.

又 $\because f(x) = a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 故 $0 < a < 1$. 从而不等式即为 $\frac{2x-3}{x-2} < a$, 再转化为 $\frac{(2-a)x - (3-2a)}{x-2} < 0$.

$$\therefore 2-a > 0 \text{ 且 } \frac{3-2a}{2-a} - 2 = -\frac{1}{2-a} < 0,$$

$$\text{即 } \frac{3-2a}{2-a} < 2, \text{ 解得 } \frac{3-2a}{2-a} < x < 2,$$

$$\therefore \text{ 故不等式的解集为 } \left\{ x \mid \frac{3-2a}{2-a} < x < 2 \right\}.$$

评注 本题考查 3 个“二次”的关系及指数函数的性质、含参数分式不等式的解法.

4. 不等式解法的应用

例5 已知 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 的单调区间.

指津 求 $f'(x)$, 转化为解含参数的不等式 $2x + ax^2 > 0, 2x + ax^2 < 0$.

简解 $f'(x) = (2x + ax^2)e^{ax}$.

(1)当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

(2)当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right)$ 内为增函数, 在 $\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$ 内为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

(3)当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内为减函数, 在 $\left(0, -\frac{2}{a}\right)$ 内为增函数, 在 $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 内为减函数.

评注 解不等式是用导数法求函数单调区间的解题基础. 对于含绝对值不等式、一元二次不等式的解法要熟练、正确, 特别是含参数的一元二次不等式的几种常见讨论情况要很清楚.

5. 四种命题之间的关系

例6 “ $\alpha \neq 60^\circ$ 或 $\beta \neq 30^\circ$ ”是“ $\sin(\alpha + \beta) \neq 1$ ”的()





A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

指津 对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题,一般运用等价命题(逆否命题)进行判断.

简解 显然,“ $\sin(\alpha+\beta)=1$ ”是“ $\alpha=60^\circ$ 且 $\beta=30^\circ$ ”的必要不充分条件.

而“ $\alpha \neq 60^\circ$ 或 $\beta \neq 30^\circ$ ”是“ $\sin(\alpha+\beta) \neq 1$ ”的什么条件与“ $\sin(\alpha+\beta)=1$ ”是“ $\alpha=60^\circ$ 且 $\beta=30^\circ$ ”的什么条件是等价的,故选 B.

评注 常用的等价关系有: $\neg A \Rightarrow \neg B$ 与 $B \Rightarrow A$ 等价($\neg A$ 表示 A 的否命题, $\neg B$ 表示 B 的否命题), $\neg B \Rightarrow \neg A$ 与 $A \Rightarrow B$ 等价, $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 与 $B \Leftrightarrow A$ 等价.

6. 充要条件的判断及证明

例7* 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1)当 $b>1$ 时,证明:对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件是 $b-1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$.

(2)当 $0 < b \leq 1$ 时,讨论:对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件.

指津 本题实质是求二次函数在闭区间上的最值情形的等价条件,只需讨论函数在区间的端点值和顶点值即可.

简解 因 $b>0$, 故函数 $f(x)=ax-bx^2$ 图像开口向下. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $\because a>0$, $\therefore |f(x)| \leq 1$ 的充要条件如下:

$$\textcircled{1} |f(0)| \leq 1; \textcircled{2} |f(1)| \leq 1; \textcircled{3} \begin{cases} \left| f\left(\frac{a}{2b}\right) \right| \leq 1 \\ 0 < \frac{a}{2b} \leq 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \frac{a}{2b} > 1, \text{这3个条件同时成立.}$$

条件 $\textcircled{1}$ 显然成立, 条件 $\textcircled{2}$ 等价于 $b-1 \leq a \leq b+1$, 条件 $\textcircled{3}$ 等价于 $\begin{cases} 0 < a \leq 2\sqrt{b} \\ 0 < a \leq 2b \end{cases}$ 或 $a > 2b$.

(1)当 $b>1$ 时, 由 $b-1>0$, $2\sqrt{b} < b+1 < 2b$, 故 $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件是 $b-1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$;

(2)当 $0 < b \leq 1$ 时, 由 $b-1 \leq 0$, $2b \leq 2\sqrt{b} \leq b+1$, 故 $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件是 $0 < a \leq b+1$.

评注 该解法突出了二次函数在闭区间的最值的特点, 利用数形结合方法将问题等价转化, 各参数反映的几何关系清楚.

【随堂自测】

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{2, 3, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = (\quad)$
A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 4\}$ C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$, 若 $P=\{0, 2, 5\}$, $Q=\{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是()
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6
3. 设集合 $M=\{x \mid x=3m+1, m \in \mathbb{Z}\}$, $N=\{y \mid y=3n+2, n \in \mathbb{Z}\}$, 若 $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, 则 $x_0 y_0$ 与集合 M, N 的关系是()
A. $x_0 y_0 \in M$ B. $x_0 y_0 \notin M \cup N$ C. $x_0 y_0 \in N$ D. $x_0 y_0 \notin N$
4. 设 p, q 为两个命题, 则“复合命题 p 或 q 为真, p 且 q 为假”的充要条件是()
A. p, q 中至少有一个为真 B. p, q 中至少有一个为假
C. p, q 中有且只有一个为真 D. p 为真, q 为假
5. 不等式 $x + \frac{2}{x+1} > 2$ 的解集是()

- A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
6. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid g(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则不等式 $f(x)g(x) \neq 0$ 的解集为()
 A. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ B. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup (\complement_{\mathbf{R}} B)$
 C. $(B \cap \complement_{\mathbf{R}} A) \cup (A \cap \complement_{\mathbf{R}} B)$ D. $(B \cup \complement_{\mathbf{R}} A) \cup (A \cup \complement_{\mathbf{R}} B)$
7. “ $m = \frac{1}{2}$ ”是“直线 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$ 相互垂直”的()
 A. 充要条件 B. 充分不必要条件
 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
8. 一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是()
 A. $a < 0$ B. $a > 0$ C. $a < -1$ D. $a > 1$

二、填空题

9. 设集合 $A = \{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
10. 不等式 $x^2 - |x| > 0$ 的解集是 _____.
11. 已知数列 $\{a_n\}$, 那么“对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y = 2x + 1$ 上”是“ $\{a_n\}$ 为等差数列”的 _____ 条件.
12. 若 $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) < 0$, 又当 $a, b \in (-1, 1)$ 且 $a + b = 0$ 时, $f(a) + f(b) = 0$, 则不等式 $f(1-m) + f(1-m^2) > 0$ 的解集为 _____.
13. 命题 p : 两曲线 $F(x, y) = 0$ 和 $G(x, y) = 0$ 相交于点 $P(x_0, y_0)$, 命题 q : 曲线 $F(x, y) + \lambda G(x, y) = 0 (\lambda \text{ 为常数})$ 过点 $P(x_0, y_0)$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.
14. 设函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|} (x \in \mathbf{R})$, 区间 $M = [a, b] (a < b)$, 集合 $N = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$, 则使 $M = N$ 成立的实数对 (a, b) 有 _____ 个.

【随堂自测答案】

一、选择题

1. D 2. B 3. C 4. C 5. A 6. A 7. B 8. C

二、填空题

9. $\{1, 2, 5\}$ 10. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ 11. 充分不必要 12. $1 < m < \sqrt{2}$ 13. 充分不必要 14. 0

【实战演练】

一、选择题

1. 条件 $p: |x-2| \leq 1$, 条件 $q: x^2 < 5x-6$, 则 p 是 q 成立的()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
2. 已知 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \mid x \geq 1\}$, $N = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-2} \geq 0\right\}$, 则 $\complement_U(M \cap N)$ 是()
 A. $\{x \mid x < 2\}$ B. $\{x \mid x \leq 2\}$ C. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$ D. $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$
3. 定义集合 A 与 B 的运算 $A * B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 则 $(A * B) * A$ 等于()
 A. $A \cap B$ B. $A \cup B$ C. A D. B
4. 已知原命题: “若 $m > 0$, 则关于 x 的方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”, 下面结论中正确的是()



- A. 原命题和逆否命题都是真命题
B. 原命题和逆否命题都是假命题
C. 原命题是真命题, 逆否命题是假命题
D. 原命题是假命题, 逆否命题是真命题
5. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 若 $f(1) > 1$, $f(2) = \frac{2a-3}{a+1}$, 则 ()
A. $a < \frac{2}{3}$
B. $a < \frac{2}{3}$ 且 $a \neq 1$
C. $a > \frac{2}{3}$ 或 $a < -1$
D. $-1 < a < \frac{2}{3}$
6. 若关于 x 的不等式 $2 - |x-a| > x^2$ 至少有一个负数解, 那么实数 a 的取值范围是 ()
A. $-\frac{9}{4} < a < 2$
B. $-\frac{5}{4} < a < 2$
C. $-\frac{7}{4} < a < 2$
D. $-\frac{7}{3} < a < 3$
7. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$, 集合 $M = \{(x, y) | f(x) + f(y) \leq 0\}$, $N = \{(x, y) | f(x) - f(y) \leq 0\}$, 则集合 $M \cap N$ 所含区域的面积是 ()
A. $\frac{\pi}{4}$
B. $\frac{\pi}{2}$
C. π
D. 2π
8. 设 $A = B = \mathbf{N}$, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 像 20 的原像是 ()
A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

二、填空题

9. 不等式 $|x| < 2x^2 - 1$ 的解集是 _____.
10. 若集合 $A = \{x | 3\cos 2\pi x = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y^2 = 1, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
11. 设数集 $M = \{x | m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\}$, $N = \{x | n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集. 如果把 $b - a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是 _____.
12. 设 l, m 是两条不同的直线, α, β 是不同的平面. 命题 p : 若 $l \perp \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel \alpha$; 命题 q : 若 $l \perp m, m \perp \alpha, l \not\subset \alpha$, 则 $l \parallel \alpha$. 对于下列复合命题的真假性判断: ① p 且 q 为假; ② p 或 q 为真; ③ p 或 $\neg q$ 为真; ④ $\neg p$ 且 q 为真; ⑤ $\neg p$ 或 $\neg q$ 为真. 其中所有正确判断的序号为 _____.

三、解答题

13. 解关于 x 的不等式 $ax(x-a) > 0$ ($a \in \mathbf{R}$).
14. 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$.
(1) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的值;
(2) 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的值.
15. 已知 $p: |x-4| \leq 6$, $q: 6x^2 - ax - a^2 \leq 0$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.