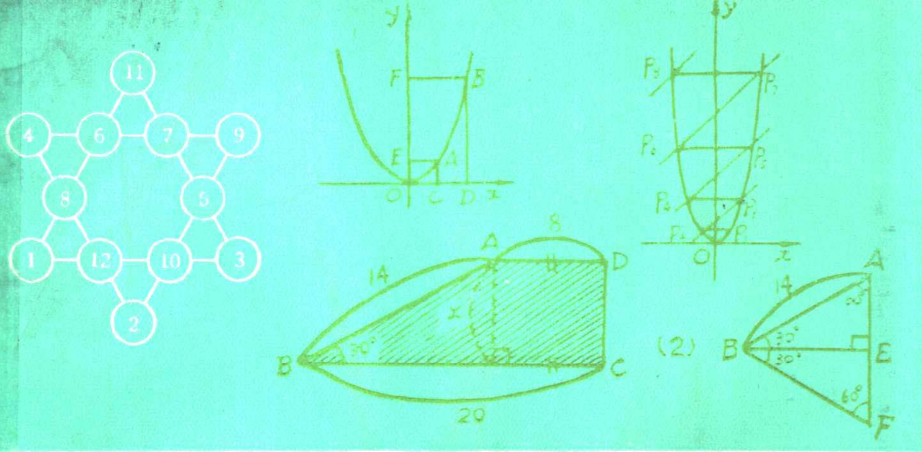
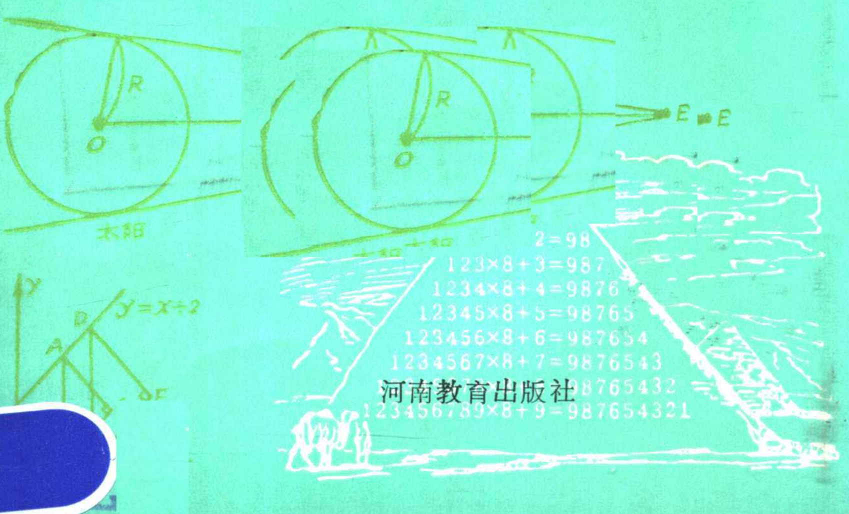


日本初中数学课外读物

开发智力的数学小题

朱长山　编译



河南教育出版社

日本初中数学课外读物

开发智力的数学小题

（附详细解答）

朱 长 山 编译

河 南 教 育 出 版 社

日本初中数学课外读物

开发智力的数学小题

朱长山 编译

责任编辑 温光

河南教育出版社出版

河南省确山县印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 4 印张 74 千字

1986年6月第1版 1986年8月第1次印刷

印数：1— 6,440册

统一书号 7356·204 定价0.58 元

前　　言

这本《开发智力的数学小题》，是译自日本初中数学课外读物：《有趣的数学玉手箱》、《动脑筋的题目》、《趣味计算术》、《数学魔法馆》等书。本书中，选译了这几本书中与我国现行的通用初中数学教材相适应的部分，其中特别着重选译了对初中学生加深理解所学知识及灵活应用技能技巧方面具有参考价值和训练意义的题材和内容。共分三十节，每一节的后面都有详细解答，最后还附有精选的日本初中数学习题27道及其答案。这些内容涉及到算术、代数、几何、三角等方面的主要内容及其重要方法。因此，本书对于我国广大初中学生和青少年朋友是一本值得一读的益智读物。

译　者

于84年 7 月

目　录

附　录

§1 当心陷井，错在哪里*？

【问】

问1 〔竟有5＝6〕

请看 $35+10-45=42+12-54$.

是正确的．其中，左边有公因数5，右边有公因数6，提取公因数，得

$$5(7+2-9)=6(7+2-9).$$

两边除以7＋2－9，岂不是5＝6 吗？竟有此事，错在哪里？

问2 ［有2×2＝5］

如有 $4\div4=5\div5$.

把左边和右边提取公因数，成为

$$4(1\div1)=5(1\div1).$$

括号里边两边都是1，所以，形成4＝5的结果，错在哪里？

问3〔有2＝3〕

4－10和 9－15的哪一个都是－6，相等．各各相加同一数$\frac{25}{4}$，也相等，所以

---

* 副标题是译者所加，以下皆同．

$$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4}.$$

两边因数分解，得

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

即 $$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2},$$

∴ $$2=3.$$

查找一下，这个“证明”的错处。

问 4 〔有4＝8〕

两个方程

$$\begin{cases}2x+y=8,\\ x=2-\dfrac{y}{2}.\end{cases}$$

联立，用代入法，解得

$$4-y+y=8.$$

由此，有

$$4=8.$$

错在哪里？

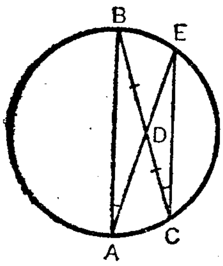


图 1-1

问5 〔未过圆心的弦与直径相等〕

如图 1-1，是以 AB 为直径的圆，由点 B 引一不过圆心的任意弦 BC，其次，过 BC的中点D和点A引弦 AE，

然后，连结E和C。观察$\triangle BDA$和$\triangle EDC$，在两个三角形中$BD=DC$（据作图），$\angle A=\angle C$（同弧BE所对的圆周角）再加$\angle BDA=\angle EDC$（对顶角）。这里，一个三角形的一边和两角与另一个三角形的一边和两角分别对应相等。

因此，$\triangle BDA\cong\triangle EDC$。在全等三角形中，等角所对的边相等，故得$AB=EC$。也就是并非直径的弦$EC$，却与直径$AB$相等了。

错在哪里了？

问6 [64＝65]

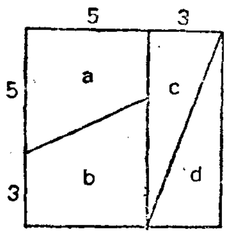


图 1-2

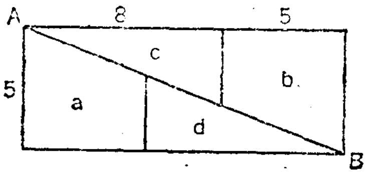


图 1-3

一边为8的正方形，如图 1-2，分成4个部份，拿这些部份作成长方形，使长方形横的长为13，竖的长为5，原来的正方形的面积为

$$8\times 8=64,$$

然而，由它作成的长方形（如图 1-3）的面积是

$$13\times 5=65.$$

即　64＝65，　这是怎么回事呢？

问7　〔半径不等的圆，却周长相等〕

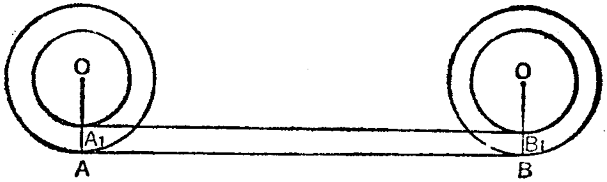


图 1-4

如图 1-4，有两个半径不等的圆，把它们的圆心固定同一个点上（形如同心圆——译者加注），在一条直线上使大的圆滚动，恰好移到一周的位置。图中，线段 AB的长，是大的圆（半径为 OA）的周长，此时，与大圆固定在一起的小圆也恰好旋转一周，所以线段A_1B_1 是小圆（半径为OA_1）的周长。因而，$AB=A_1B_1$（长方形的对边），所以形成“半径不等的圆，却周长相等”的结果。

这是怎么造成的呢？

下面是解答：

【答】

答问1　错在等式两边除以7＋2－4即除以 0 的结果。

答问2　错在由4÷4＝5÷5推出的

$$4(1\div1)=5(1\div1)$$

这一步。提取公因式，乃是

$$ma+mb-mc=m(a+b-c).$$

是在和、差式的情况下方能使用，此处之错一定要弄清楚

的。

答问3 由

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

得
$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}.$$

是有错误的。事实上，它的左边是$-\frac{1}{2}$，而右边则是$\frac{1}{2}$，所以应为

$$2-\frac{5}{2}=-\left(3-\frac{5}{2}\right).$$

如同此例，只从二数的平方相等，还不能断定该二数一定相等；从二数的平方，只可以断定此二数的绝对值相等。

答问4 不能联立（如第一个方程：$2x+y=8$，而第二方程整理后便得$2x+y=4$，这样两个方程，不能同时成立——译者加注）的方程联立成方程组的结果，出现了并不相等的等式$4=8$。

答问5 一个三角形的一边与两角和另一个三角形的一边与两角分别相等，则这两个三角形全等，还并不错，只是这两个三角形的边和角必须是对应相等。此题中，关于$\triangle EDC$的一边CD及其两端的两角，仅与关于$\triangle BDA$的一边BD及其一端的角与BD边所对的角分别相等（即并不是对应角——译者加注）。

答问6 长方形的 a 和 d、b 和 c 都并不是吻接着的，实际上，把正方形切成的四个部份排列后可以知道，图 1-2 中的对角线 AB 的两端稍微折屈，出现细长的平行四边形隙缝，其面积是 1。还有图 1-3中直角三角形 c 的斜边的倾斜度是 $-\frac{3}{8}$，且梯形 a 的斜边的倾斜度是 $-\frac{5-3}{5}=-\frac{2}{5}$。可有

$$-\frac{2}{5}=-\frac{16}{40}<-\frac{3}{8}=-\frac{15}{40}.$$

从而可以看出，a 和 c 之间，是有小缝的。

答问7 由于小圆在直线 A_1B_1 上一面滑动一面旋转，线段 A_1B_1 要比小圆的圆周长。

§2 似是而非，非在何处？*

【问】

问1 "试证1＝2"

设有一个等式 $r=s$,

若两边乘以 r，则有 $r^2=rs$,

若从两边各减去 s^2，则为 $r^2-s^2=rs-s^2$,

因式分解，得 $(r-s)(r+s)=s(r-s)$.

除以 $r-s$，得 $r+s=s$,

但由题设 $r=s$,

所以 $r+r=s$，$2r=s$.

即 $2r=r$,

若除以 r，则 $2=1$,

也就是 $1=2$.

显然，这是似是而非，那么非在哪里？

问2 "试证10＝0"

设有两个式 $25-25=0$，$5-5=0$,

若把25－25除以5－5，则 $\dfrac{25-25}{5-5}=0$.

---

* 标题译者所加.

左边因式分解，得 $\frac{(5-5)(5+5)}{5-5}=0$。

约分，得 $5+5=0$。

即 $10=0$。

这又是，似是而非是显然的，到底非在哪里？

【答】

答问1　由题设，因为$r=s$，所以$r-s=0$，而0不能做除数，若0做除数，则导出不定的结果。因此本题不能除以$r-s$。其非也就出自这里。

答问2　该题中也有$5-5=0$，所以不能除以$5-5$，用0做除数是决不容许的，本题导出$10=0$的“非”，就在用0做除数的结果。

§3　数的有趣的性质，会证会用吗？

【性质】

性质1　试证一下：奇数的平方总是奇数。

性质2　试证一下：如果平方后的数是一个偶数，那么它的原数也是一个偶数。

性质3　试证一下：一个偶数的平方，一定有4的倍数。

性质4　试证一下：连续二奇数的平方差，能被8整除。

性质5　试证一下：连续二偶数的积，是8的倍数。

性质6　试证：连续的任意三个自然数的积，均被6整除。

性质7　试证：其和为奇数的连续的3个自然数的积，能被什么数整除。

（小读者朋友！上面性质，你会证明吗？请看《答部》，这些性质，很有趣，有时解大题时常用得着．请看下面问题。）

问题1　m为任意自然数时，m^3-m 可整除以6。（为什么？）

问题2　m为奇数时，m^2-1能整除以8。　（为什么？）

问题3　m为奇数时，m^2-m能整除以24。　（为什么？）

问题4　形式为 $4n+1$ 的数，相乘后的积仍为同样形式的

数。（为什么？）

（读者小朋友！请你参看上边性质的证明练习证、练习用。）

【证明】

证性质1 设 n 为自然数，则奇数可以表示为 $2n-1$ 或 $2n+1$，所以奇数的平方为 $(2n-1)^2=4n^2-4n+1=2(2n^2-2n)+1$，

或 $$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1.$$

由于 $2(2n^2\mp 2n)$ 是偶数，这样 $2(2n^2\mp 2n)+1$ 必然总是奇数。

证性质2 由上面性质 1，奇数的平方总是奇数，所以平方后成为偶数的数，绝不是奇数了。

证性质3 因为 $(2n)^2=4n^2$，所以偶数的平方是 4 的倍数。

证性质4 连续二奇数可表示为 $2n-1$ 和 $2n+1$，其平方差，则为

$$(2n-1)^2-(2n+1)^2=8n^2.$$

因此，能被 8 整除。

证性质5 设连续二偶数为 $2n$、$2n+2$，则二数之积为

$$2n(2n+2)=4n(n+1)$$

由于 n 或 $n+1$ 之中，总有一个是偶数，所以，$4n(n+1)$ 是 8 的倍数（因为最小偶数 ± 2，就是 8 的倍数）。

证性质6 3 个连续的自然数，表示为

$$n(m+1)(n+2).$$

其中，不是有一个是偶数，就是有两个偶数，而必有一个偶数是 3 的倍数，因此，他们的积被 6 所整除。

证性质7 若 3 个连续的自然数的积为奇数，则一定是，第

一个数是偶数，第二个数是奇数，第三个数是偶数。因此，两个偶数中，必有一个是 4 的倍数，而且，3 个连续的自然数中，也必有一个是 3 的倍数。所以，可设有

$$2n(2n+1)(2n+2)。$$

其中，令$2n+1=3m$，$2n+2=4l$。三个数的积，成为

$$2n\cdot 3m\cdot 4l=24nml.$$

因此，24可以整除，而且，24的约数2、3、4、6、8、12，哪一个都能整除。

答问1 可因式分解为

$$m^3-m=m(m^2-1)=m(m-1)(m+1)$$
$$=(m-1)(m)(m+1).$$

此乃是三个连续的自然数的积，所以，由上述性质 6，其积能被 6 整除。

答问2 由题设m是奇数，所以m可设为$m=2n-1$，因而，有

$$m^2-1=(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1$$
$$=4(n-1)n.$$

由于$n-1$和n是连续的自然数，所以，其中必有一个是偶数。

因此，$4(n-1)n$，可被 8 整除。

答问3 $m^3-m=(m-1)m(m+1)$。

被这样因式分解后，由于m为奇数，所以$m-1$和$m+1$为偶数，因此，由上述的性质 7，同理，可被24整除。

答问4 由$(4n+1)(4m+1)=16mn+4m+4n+1$