数学一本通

# 红魔理科王

# 高考数学绿卡

## 排列组合与概率统计

Senior Students Maths

编著 李云皇

Magical

红魔理科王

国防科技大学出版社

# 数学一本通

# 红魔理科王

## 排列组合与概率统计

Senior Students Maths

主　　编：唐剑英

执行主编：黄仁寿

编　　著：李云

Magical

红魔理科王

国防科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

红魔理科王·数学一本通(高考)/唐剑英主编 –长沙:国防科技大学出版社, 2004.7

ISBN–7–81099–103–5

Ⅰ.红魔理科王 … Ⅱ.唐… Ⅲ.数学–高中–学习参考资料

Ⅳ.G328.348

# 红魔理科王·数学一本通(高考)·排列组合与概率统计

主　　编: 唐剑英

执行主编: 黄仁寿

编　　著: 李云皇

总 策 划: 周艺文

责任编辑: 文　慧

责任校对: 肖　滨

版式设计: 曹红英　肖　芳

全案策划: 万卷(香港)文化有限公司

湖南艺文出版策划有限公司

电话: (0731–4450597) 邮政编码: 410005

E–mail: zhouyiwen@vip.163.com

出　　版: 国防科技大学出版社

电话: (0731–4572640) 邮政编码: 410073

E–mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn

经　　销: 新华书店

湖南万卷文化实业有限公司 (0731–4448350)

印　　装: 湖南东方速印科技股份有限公司 (0731–8807850)

开　　本: 787×1092　1/20

印　　张: 8

字　　数: 185 千字

版　　次: 2004 年 8 月第 1 版

印　　次: 2004 年 8 月第 1 次印刷

书　　号: ISBN–7–81099–103–5/O·14

全套定价: 69.00 元(本册定价: 13.80 元)

# 前　言

中国有句古话"十年树木,百年树人",足见育人的重要和不易。自孔夫子广收弟子开始,教育就成为国家的大事。进入21世纪,特别是近两年来,教育改革已成为国家发展的一项战略措施。课程改革和高考改革双管齐下,走出了稳健的步伐。在声势浩大的改革运动中,数学是最受重视的科目之一,亦走出了稳健的步伐。因为无论哪个国家,数学和本国语言都是学生的主课,这两科构成了人们最基本的文化和科学素养。

为适应数学课程改革和高考改革的新形势,我们组织了部分在数学教研和教育方面有深入研究的专家,在认真学习《高中数学新课程标准》《高考数学考试大纲》、深入钻研高中数学教材、积极探索高考评价改革趋势的基础上,编写了"红魔理科王·高考数学一本通"丛书。

丛书共计五个分册,分别为《函数与三角函数》、《不等式与数列》、《向量与立体几何》、《解析几何与复数》、《排列组合与概率统计》。各分册既保证了知识板块的相对独立性,整体上又注意了学科知识结构的有机整合。丛书覆盖了高考数学要求的各个考点,包括高三选修教材或选修内容部分。

每一分册按知识板块设置若干专题。每一专题按以下专栏展开内容:

**考点坐标**　用简明扼要的文字归纳每节考点,力求做到尽可能展现知识结构,形成能力平台,让读者能立足于知识的交汇点,纲举目张。

**解题方略**　从方法论高度整合每节内容,提炼隐含于问题中的通性、通法,并分条陈述,用经典、新颖并能反映高考数学命题改革方向的例题予以说明。

**发散空间**　坚持引入研究性学习的理念,引领高三数学学习方式的变革.具体作法为:(1)将本节题材放射到高考数学知识网络的最近发现区,包括建立和生产、生活的必然联系;(2)将"解题方略"中的问题和方法,进行纵向、横向拓广,或一题多解,一解多得。

**优化训练**　任何能力都要在训练中养成和发展,数学学科能力也是如此.本专栏致力于创建一个高效的训练基地——精选一系列起点基础、内容综合、方法灵活,并反映高考数学命题改革方向的题目,提供给读者训练之用。

**总结评价**　解题结束,但问题的思考并未终结。本栏旨在引导读者养成对学习过程进行科学评价或解题后积极反思的学习品质。栏目中隐现的部分:"①是否还有另外的解法?②问题还可以作哪些变形?③此题和过去见过的那些

问题有怎样的联系?④做完这个练习之后,你认为你的知识结构和思维结构有了哪些变化?”,不但是读者进行总结评价的思维触须,同时还给读者预留了一片想像与发挥的空间。

**参考答案** 提供测试题的简单答案,并对其中智能含量较高的个别题目进行发散思维。发散思考的方式和方法为读者如何进行“总结评价”提供了具体的、鲜活的范例。

至此,或许读者已感受到了本丛书新意盎然的创作理念。这是我们的一个尝试。我们期待着您的成功实践,并能将实践的体验反馈给我们,以便再版时修订和完善。

编著者

2004年6月

# 目　录

# 1 两个计数原理

## 考点坐标

**两个计数原理是排列与组合的理论基础，历年的高考都重视对两个计数原理的考查,题目类型以选择题和填空题为主,属于容易或中档题.**

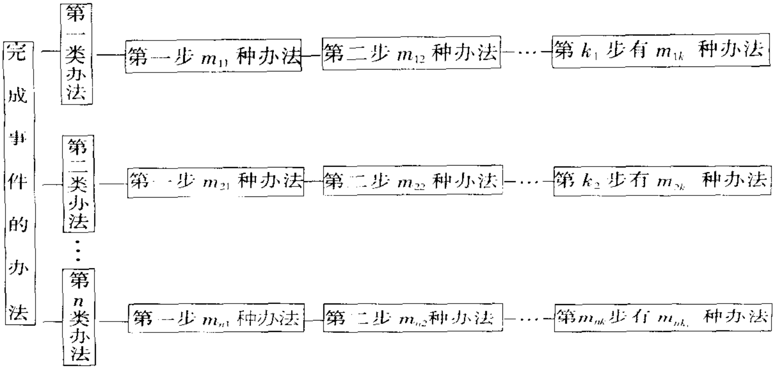
## 解题方略

1. 运用分类计数原理时，首先要根据问题的特点确定分类标准，分类应满足：完成一件事的任何一种方法，必属于某一类而仅属于某一类，即方法的确定性(必须属于某一类)和“类”与“类”之间的互斥性(不同的类中没有一种方法是相同的).

2. 运用分步计数原理时，首先要确定分步的标准，分步必须满足：完成这件事必须且只须连续完成这几步，即各步是相互依存的，各步骤都完成了，这件事才算完成，注意“步”与“步”的连续性.

3. 分类计数原理与分步计数原理的联系与区别：

这两个计数原理的共同点，都是用来计算做一件事共有多少种不同的方法数.不同的是，分类计数原理应用于分类问题，分步计数原理应用于分步问题.分类则加，分步则乘，对于类中有步、步中有类的综合问题，需要综合应用这两个原理来解决问题，一般可借助下列流程图进行分析、思考和计算：




则完成这件事共有 $(m_{11}\times m_{12}\times m_{13}\times\cdots\times m_{1k_1})+(m_{21}\times m_{22}\times\cdots\times m_{2k_2})+\cdots+(m_{n_1}\times m_{n_2}\times\cdots m_{nk_n})$ 种不同的方法.

(1)5 名同学报名参加 4 项体育比赛活动(每人限报一项),共有______种不同报名方法.

(2)5 名同学争夺 4 项竞赛冠军(无并列冠军),则产生冠军的结果共有______种可能.

(1) 5 名学生依次报名,在 4 个项目中可任报一项,即问题分五步完成,每一步都有四种可能.根据分步计数原理,不同的报名方法共有

$N=4\times4\times4\times4\times4=4^5=1024$(种)

(2) 确定 4 项冠军人选需分四步完成:

第一步确定第一项冠军人选有 5 种可能,

第二步确定第二项冠军人选有 5 种可能,

第三、四步确定第三项、四项冠军人选分别有 5 种可能,根据分步计数原理,冠军获得者共有

$N=5\times5\times5\times5=5^4=625$(种)

可能.

某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘,根据需要,软件至少买 3 片,磁盘至少买 2 盒,则

不同的选购方式共有(　　)种.

A. 5 种　　B. 6 种　　C. 7 种　　D. 8 种

**解法 1** 用直接法.

设软件、磁盘分别买 $x$、$y$ 件，$x\geqslant3$，$y\geqslant2$，$x\in N$，$y\in N$，则 $60x+70x\leqslant500$，则问题化归为求此不等式的整数解 $(x,y)$，

解之得：

(3,2)、(3,3)、(3,4)、(4,2)、(4,3)、(5,2)、(6,2).

故选 C.

**解法 2** 列表法.

列表：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 软件数 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 磁盘数 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 |
| 金　额 | 320 | 300 | 460 | 380 | 450 | 440 | 500 |

由表可知,本题应选 C.

**说明　本题将实际问题分析、加工、化归，建立数学模型，该题条件的开放性考查了学生的创新思维能力，顺应了多元化社会的要求，是当前命题的新趋势.**

**例 (1993 年全国高考文理兼用试题)** 同室 4 人各写出一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡，则 4 张贺年卡不同的分配方式有(　　)

A. 6 种　　B. 9 种　　C. 11 种　　D. 23 种

**解法 1** 将四人分别编为 1、2、3、4 四个号，将四张贺卡也编为 1、2、3、4 四个号，那么 1、2、3、4 四个数字填入 1、2、3、4 个方格的一种填法对应贺卡的一种送法，原问题转化为上面所述方格的编号与所填数字不同的填法种数问题，此问题可以分步进行：

第一步，在 1 号方格内填数，可填上 2、3、4 中的任意一个数，有 3 种填法；

CHAPTER

第二步，当在第 1 号方格内填上数 i 之后($2\leqslant i\leqslant 4$)，在第 i 号方格内填上符合要求的数，有 3 种填法；

第三步，将剩下的两个数，填到空着的方格里，只有一种填法符合要求(因为这两个数中，至少有一个数与空着的方格序号相同)

根据分步计数原理，共有 $3\times3\times1=9$ 种不同的分配方式，故选 B.

**解法 2** 如解法 1，把问题转化为四个数字填入四个方格问题.

由于数目 4 较小，可用分类穷举法填写：

第一类：1 号方格填 2，有 $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}$ $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4}$ $\boxed{2}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3}$，共有 3 种填法.

第二类：1 号方格填 3，有 $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{2}$ $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{2}$ $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}$，共 3 种填法.

第三类：1 号方格填 4，有 $\boxed{4}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ $\boxed{4}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}$ $\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$，共 3 种填法.

由分类计数原理得，共有 $3+3+3=9$ 种填法，故选 B.

**说明 解法 1 是以分步为线索，通过分清每步的填法，借助分步计数原理，较好地解答本题；解法 2 是采用分类穷举法，把符合要求的三类填法——列举出来，结果一目了然，对于数目不大、限制条件较多的计数问题，穷举法不失为一种简单可行的好方法.**

用五种不同的颜色给图 1-1 中 $A$、$B$、$C$、$D$ 四个区域着色，规定每个区域只能着一种颜色，相邻区域着不同的颜色，求有多少种不同的着色方案？

完成这件事可分为四个步骤，第一步涂 $A$，第二步涂 $B$，第三步涂 $C$，第四步涂 $D$.

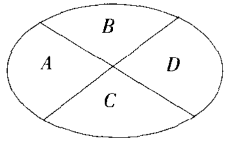


图 1-1

第一步涂 $A$，有 5 种颜色可选，即有 5 种着色方法，

第二步涂 $B$，有 4 种方法，

第三步涂 $C$，有 4 种方法，

但第四步涂 $D$ 时，却面临一个问题：$C$ 与 $B$ 涂的色是否一样？若相同，则涂

$D$时有 4 种方案,如果 $B$ 和 $C$ 不一样,则涂 $D$ 有 3 种方案,故对 $C$ 的着色状况必须根据 $C$ 与 $B$ 是否同色进行分类:①与 $B$ 涂同一种颜色,仅有一种方案;②与 $B$ 着不同颜色,有 3 种着色方案.

共有 $5\times4\times1\times4+5\times4\times3\times3=260$ 种不同的着色方案.

**说明　从这道题的解答中可以看出,解题中有时要分类与分步并存,以分步为主线时,每步的做法必须是确定的,若在某步中出现的做法有多种可能时,则必须先分类或重新分步(本题的第四步不能确定做法时,就先对第三步涂 $C$ 的情况分类).**

将 5 枚相同的纪念邮票和 8 张相同的明信片作为礼品送给甲、乙两名学生,全部分完且每人至少有一件礼品,不同的分法是(　　)

A. 52　　B. 40　　C. 38　　D. 11

甲得到礼品可分两步完成,第一步得到邮票,第二步得到明信片,因为甲得到邮票有 0 枚、1 枚、2 枚、3 枚、4 枚、5 枚共 6 种不同的可能;甲得明信片有 0 张、1 张、2 张、3 张、4 张、5 张、6 张、7 张、8 张共 9 种可能,故甲得到礼品共有 $6\times9=54$ 种可能,又因为甲既不得到邮票又不得到明信片,与甲既得到全部邮票又得到全部明信片这两种方法都不符合要求,故共有 $54-2=52$ 种方法.

共有 $6\times9-2=52$ 种不同的分法,故选 A.

**说明　①计数问题往往要充分考虑题目的限制条件,否则易发生错误,例如本题中,当甲将邮票、明信片全部取走或每样都不取这两种情况均不符合要求.②关于"至少"型问题,不能使用所谓的"保证法",而需按最终状态分类计数.例如从 10 人中选出 2 人作代表旁听某次会议,其中甲乙两人中至少有一人当选,一共有多少种不同的选法?错解:从甲乙 2 人中选 1 人,再从余下的 9 人中选 1 人,则有 $2\times9=18$ 种选法.(正确答案应是 17 种选法,请读者找出错误原因)**

## 发散思维

(2001 年全国高考试题)如图 1-2，小圆圈表示网络的结点，结点之间的线段表示它们有网线相联，连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量，现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递，则单位时间内传递的最大信息量为(　　)

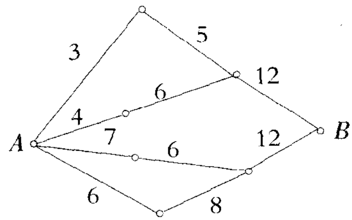


图 1-2

A. 26　　B. 24　　C. 20　　D. 19

**解**　选 D.

从{1,2,3⋯,20}中任取 3 个不同的数使这三个数成等差数列，这样的等差数列最多有(　　)

A. 90 个　　B. 180 个　　C. 200 个　　D. 120 个

**解**　选 B.

(2001 年全国高考试题)圆周上有 $2n$ 个等分点($n>1$)，以其中 3 个点为顶点的直角三角形的个数为 ______.

**解**　共有 $n\cdot(2n-2)=2n(n-1)$个直角三角形.

沿长方体的棱，从一个顶点到它相对的另一个顶点的最近路线共有 ______ 条.

**解**　共有 6 条.

若 $m\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$n\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，且方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示中心在原点的双曲线，则表示不同的双曲线最多有多少?

**解**　最多有 9+4=13 条.

某药品研究所研制了五种消炎药 $a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$；四种退烧药 $b_1$、$b_2$、$b_3$、$b_4$. 现从中取两种消炎药和一种退烧药同时使用进行疗效实验，但又知 $a_1$、$a_2$ 两种药必须同时使用，且 $a_3$、$a_4$ 两种药不能同使用，则不同的实验方案有（　　）.

A. 27 种　　B. 26 种　　C. 16 种　　D. 14 种

**解** D.

图 1–3 为一电路图，从 $A$ 到 $B$ 共有多少条不同的线路可通电.

**解** 一共有 8 条不同的线路可通电.

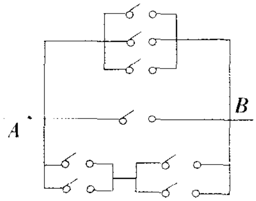


图 1–3

## 优化训练

### 一、选择题

1　3 名同学准备参加数学、物理、化学、计算机四项竞赛，每人限报 1 项，则不同的参赛方法种数为（　　）

A. 24　　B. 48　　C. 64　　D. 81

2　三边长均为整数，且最大边长为 11 的三角形的个数为（　　）

A. 25　　B. 26　　C. 36　　D. 37

3　3 个运动员同时参加四项竞技比赛，则产生冠军的不同情况数为（无并列冠军）（　　）

A. 24　　B. 48　　C. 64　　D. 81

4　直线方程 $Ax+By=0$，若从 0、1、2、3、5、7 六个数字中每次取两个不同的数作为 $A$、$B$ 的值，则表示不同直线的条数为（　　）

A. 2　　B. 12　　C. 22　　D. 25

5　在 1～8 这 8 个数字中任取两个不同数字相加，其和是偶数的种数比

CHAPTER

和是奇数的种数(　　)

A. 多 1 种　　B. 多 4 种　　C. 少 2 种　　D. 少 4 种

6　已知集合 $M=\{1,-2,3\}$,$N=\{-4,5,6,-7\}$.从两个集合中各取一个元素作为点的坐标,则这样的坐标在直角坐标系中表示第一、二象限内不同的点的个数是(　　)

A. 18　　B. 10　　C. 16　　D. 14

二、填空题

7　10 个小电灯泡并接在电路中,每个电灯均有亮与不亮两种状态,总共可表示 ______ 种不同的状态;至少有一个灯亮的共有 ______ 种状态.

8　多项式$(a_1+a_2+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)(c_1+c_2+\cdots+c_k)$的展开式共有 ______ 项.

9　直线 l 上有 7 个点,直线 $m$ 上有 8 个点,则通过这些点中的两点最多有 ______ 条直线.

三、解答题

10　已知三个集合 $A=\{a,b,c,d\}$、$B=\{m,n,p\}$、$C=\{x,y\}$,在集合 $A$、$B$、$C$ 中任取 2 个来自不同集合的元素,问有多少种不同的取法?

11　在区间[400,800]上,(1)有多少个能被 5 整除的整数?(2)有多少个能被 5 整除的无重复数字的整数?

12　$f$ 是集合 $M=\{a,b,c,d\}$到集合 $N=\{0,1,2\}$的映射,且 $f(a)+f(b)+f(d)=4$,则不同的映射有多少个?

13　求 2520 的正约数的个数?

14　今有一角人民币 1 张,贰角人民币 1 张,伍角人民币 1 张,壹元人民币 4 张,伍元人民币 2 张,用这些人民币付款,可以付出不同数额的款项共多少种?

## 总结评价

## 参考答案

一、选择题

1. 三个同学报名，分三步依次完成，每人有 4 种不同的报名方法，故共有 $4\times4\times4=64$ 种不同的报名方法，故选 C.

2. 设另外两边长分别为 x、y，且不妨设 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant 11$，要构成三角形，必须 $x+y\geqslant 12$，下面对 y 进行分类讨论.

当 y 取 11 时，$x=1,2,3,\cdots,11$，有 11 个三角形.

当 y 取 10 时，$x=2,3,\cdots,10$，有 9 个三角形.

……

当 y 取 6 时，$x=6$，只有一个三角形.

故所有三角形的个数为 $11+9+7+5+3+1=36$，故选 C.

3. 四项冠军的产生分四步完成，每步有 3 种可能，故共有 $3\times3\times3\times3=3^4=81$ 种可能，故选 D.

4. C　　5. D　　6. D

## 二、填空题

7. $2^{10}$;$2^{10}-1$.

8. 共有 $mnk$ 项.

9. 最多有 $7\times8+2=58$ 条直线.

## 三、解答题

10. 所取元素的来源可分三类:

(1) 来自 $A$、$B$;

(2) 来自 $A$、$C$;

(3) 来自 $B$、$C$.其中,来自 $A$、$B$ 的有 $4\times3=12$ 种;来自 $A$、$C$ 的有 $4\times2=8$ 种;来自 $B$、$C$.的有 $3\times2=6$ 种,故一共有 $12+8+6=26$ 种不同的取法.

11.(1) 分三步:第一步,排个位有 2 种方法;第二步,排百位有 4 种方法;第三步,排十位有 10 种方法;又考虑到 800 符合题意,故共有 $2\times4\times10+1=81$ 个能被 5 整除的数.

(2) 分二类:第一类,当个位数字是 0 时,百位数字是 4、5、6、7 中的一个,十位数字是其余 8 个数字中的一个,此类共有 $4\times8=32$ 个.第二类,当个位数字是 5 时,百位数字是 4、6、7 中的一个,十位是其余 8 个中的一个,此类共有 $3\times8=24$ 个,故共有 $32+24=56$ 个能被 5 整除且无重复数字的整数.

**12. 分析** 根据 $a$、$b$、$c$、$d$ 对应的象为 2 的个数来分类,可分为三类.第一类:没有元素的象为 2,其和又为 4,必然其象均为 1,这样的映射只有一个.第二类:一个元素的象是 2,其余 3 个元素的象必为 0、1、1,即 3 个元素中只有一个元素的象是 0,其余两个元素的象是 1,这时完成一次映射 $4\times3=12$ 个.第三类:两个元素的象是 2,另两个元素的象必为 0,这样的映射有 6 个.

**解** 由分类计数原理可知,共有 $1+12+6=19$ 个不同的映射.

13. 先将 2520 进行质因数分解，$2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$，其正约数必是形如 $2^\alpha\cdot3^\beta\cdot5^\gamma\cdot7^\delta$ 的数，其中 $\alpha=0,1,2,3$；$\beta=0,1,2$；$\gamma=0,1$；$\delta=0,1$.由分步计数原理可知，共有 $4\times3\times2\times2=48$ 个不同的正约数.

14. 共有 $2\times2\times2\times5\times3-1=119$ 种不同数额的款项.