JIETIGAOSHOU

熊斌 陈双双 主编

解题高手

高中数学

华东师范大学出版社

解题高手

主 编 熊 斌 陈双双
参编者 朱一德
胡圣团
甄德文

高中数学

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题高手.高中数学/熊斌,陈双双主编.—上海：华东师范大学出版社，2003.7
ISBN 7-5617-3280-5

Ⅰ.解…　Ⅱ.①熊…　②陈…　Ⅲ.数学课-高中-解题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 035258 号

解题高手/高中数学

主　　编　熊　斌　陈双双
策划组稿　应向阳　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　刘爱晶
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　苏州市永新印刷包装有限责任公司
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　9.25
字　　数　274 千字
版　　次　2005 年 5 月第二版
印　　次　2005 年 5 月第一次
书　　号　ISBN 7-5617-3280-5/G·1726
定　　价　13.00 元

出 版 人　朱杰人

致读者 ZHI DUZHE

也许你在为某道数学题目而烦恼.那么,你就打开眼前的这本《解题高手》,它会让你豁然开朗——书中的题解给了你解题的钥匙.

也许你对学习数学缺乏兴趣.那么,你就打开眼前的这本《解题高手》,书中每一个巧妙的解法,会让你感受数学的奥妙,会让你享受学习数学的无限乐趣.

也许你是一个数学爱好者.那么,你更应该立即打开眼前的这本《解题高手》,这里的每道题解都会让你学到新的思路、新的方法,使你的数学水平从此再上一个新的层次.

《解题高手》是一批长期从事中学教学、富有教学经验的教师题海淘金、研究探索的结果.

《解题高手》力图通过练习,形成适合你自己的更科学的学习方法.

《解题高手》注重基础与提高的统一,关注技巧与知识的统一,着眼知识形成过程与结果的统一,让你在练习中得到最大的收益.

《解题高手》在编写体例上遵循学习规律,让你在练习中得到全面系统的提高.全书每个专题都有以下几个栏目.

(1) 精选妙题:以精、准为原则选择每一道题目,为你奉献经典"美食",力求以一当十.

(2) 常规策略:讲解一般思路及解法,是你解题的必备基础,千万不可轻视.

(3) 巧妙解法:详细介绍题目的巧妙解法,令你耳目一新,茅塞顿开.

(4) 画龙点睛：比较常规解法和巧妙解法的不同之处，归纳要点，指出妙解适用的题目类型，予你指点捷径，定会得益匪浅.

(5) 相关链接：提供类似题目，望你举一反三，巩固提高.

愿《解题高手》成为你的好朋友，助你成为解题高手.

华东师范大学出版社

2003 年 6 月

先睹为快 XIANDUWEIKUAI

这本集子收入了不少"妙题"及其"巧解",帮助你成为解题高手.这里让你先睹为快,欣赏下面的问题,也许你对这本书也有了一个大概的了解.

问题: 设 x、y 是实数,且满足 $x^2+xy+y^2=3$,求 $u=x^2-xy+y^2$ 的最大值与最小值.

通常的解法是: 先估计出 u 的上、下界.由

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3, & ① \\ x^2-xy+y^2=u, & ② \end{cases}$$

解出 xy 与 $x+y$.

①-②,再除以 2,得

$$xy=\frac{3-u}{2}. \qquad ③$$

①+③,得

$$(x+y)^2=\frac{9-u}{2}.$$

所以,$\frac{9-u}{2}\geqslant 0$,即 $u\leqslant 9$,并且

$$x+y=\pm\sqrt{\frac{9-u}{2}}. \qquad ④$$

由③、④知,x、y 是如下关于 t 的一元二次方程

$$t^2\pm\sqrt{\frac{9-u}{2}}\,t+\frac{3-u}{2}=0$$

的两个实根,于是

$$\Delta = \frac{9-u}{2} - 4 \cdot \frac{3-u}{2} \geqslant 0,$$

解得 $$u \geqslant 1.$$

综上，$1 \leqslant u \leqslant 9$. 又当 $x = y = 1$ 时，$u = 1$；当 $x = -y = \sqrt{3}$时，$u = 9$. 所以，u 的最小值为 1，u 的最大值为 9.

巧妙解法：因为 $u = x^2 + xy + y^2 - 2xy = 3 - 2xy$，又因为

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy, \quad x^2 + y^2 \geqslant -2xy,$$

所以 $$3 = x^2 + y^2 + xy \geqslant 3xy, \quad 3 = x^2 + y^2 + xy \geqslant -xy,$$

得 $$-3 \leqslant xy \leqslant 1, \quad 即 \quad 1 \leqslant 3 - 2xy \leqslant 9.$$

又当 $x = y = 1$ 时，$u = 1$；当 $x = -y = \sqrt{3}$时，$u = 9$. 所以，u 的最小值为 1，u 的最大值为 9.

画龙点睛：大家熟悉 $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$，利用这个不等式我们可以估计出 u 得下界，进而求得 u 的最小值. 但是很少去用 $x^2 + y^2 \geqslant -2xy$，其实，把这两个不等式结合起来，可以很方便地估计一些量的上界和下界，进而求出最值.

看了上面的解法，是否有不少感慨，是否还想知道更多精彩的问题与解法，那么请你继续读后面的"妙题"与"巧解"吧. 不过读完"巧解"后，还得做"相关链接"中的题目. 只有这样，才能提高你的解题能力. 这里提供一题，让你一试.

相关链接：已知实数 x、y 满足 $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$，求 $u = x^2 + xy + y^2$ 的最大值和最小值.

目　录 MULU

第 1 章 集合与逻辑初步

1.1 元素的贡献

精选妙题

设集合 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，求集合 A 的所有非空子集元素和的和.

常规策略

写出 A 的所有非空子集：

$$\begin{aligned}&\{1\},\{2\},\cdots,\{10\},\\&\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{9,10\},\\&\cdots\\&\{1,2,\cdots,10\}.\end{aligned}$$

然后分别求出每一个非空子集的元素和，再把这些数相加.

巧妙解法

含有元素 1 的子集有 2^9 个，所以 1 在总和中出现 2^9 次. 同样，元素 $2,3,\cdots,10$ 在总和中均出现 2^9 次，所以，所求的和为

$$(1+2+\cdots+10)\times 2^9=28\ 160.$$

画龙点睛

常规策略是把所有子集罗列出来，先求出每个子集的元素和，再求总和，这样计算较繁. 巧妙解法是计算每个元素在总和中"贡献"了多少次，进而便很容易求出总和了.

相关链接

1. 设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，其中 n 是大于 2 的正整数，求 A 的所有非空子集的元素和的和.
2. 考虑由 10 个元素组成的集合 $M=\{19,99,-1,0,25,-36,-91,1,-2,11\}$. 记 M 的所有非空子集为 M_i，$i=1,2,\cdots,1\,023$. 每一个 M_i 中所有元素的乘积为 m_i，$i=1,2,\cdots,1\,023$. 求 $m_1+m_2+\cdots+m_{1\,023}$ 的值.

1.2 韦恩图

精选妙题

设集合 A、B 都是全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集，已知 $(\complement_I A)\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\{2, 5\}$，求 $\complement_I(A\cup B)$ 和 $A\cap(\complement_I B)$.

常规策略

由已知条件可知，$1\in B$，$1\notin A$，$3\in A\cap B$，2 和 5 既不属于 A，也不属于 B.

再考虑元素 4，因为 $4\notin(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$，所以 $4\in A\cup B$. 又 $4\notin(\complement_I A)\cap B$，所以，$4\in A$，但 $4\notin B$.

综上所述，$\complement_I(A\cup B)=\{2,5\}$，$A\cap(\complement_I B)=\{4\}$.

巧妙解法

如图 1－1 所示，用方框表示全集 I，两个圆分别表示集合 A 和 B. 由 $(\complement_I A)\cap B=\{1\}$，故 A 外 B 内填 1，由 $A\cap B=\{3\}$，则在 A 与 B 的公共部分填 3，由 $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\{2,5\}$，则在 A 和 B 之外，方框内填上 2 和 5，于是 4 在 B 外 A 内.

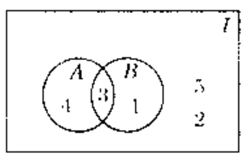

图 1-1

从图中便可知 $\complement_I(A\cup B)=\{2,5\}$，$A\cap(\complement_I B)=\{4\}$.

画龙点睛

用来说明各个集合之间关系的图称为"韦恩图".它能帮助我们在直观上理清集合之间的关系,有利于思考和推理.

相关链接

1. 如图 1-2,I 表示全集,A、B、C 是三个子集,则阴影部分表示的集合是(　　).

   A. $\complement_I(A\cup C)\cup B$　　B. $(\complement_I A\cap\complement_I C)\cup B$

   C. $(\complement_I A\cap\complement_I C)\cap B$　　D. $(A\cup C)\cap\complement_I B$

2. 如图 1-3,I 表示全集,M、N、P 都是三个子集,则阴影部分表示的集合是(　　).

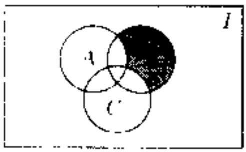

图 1-2

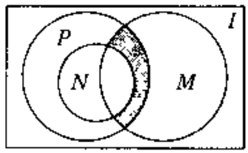

图 1-3

   A. $M\cap(N\cup P)$　　B. $M\cap(\complement_I N\cap P)$

   C. $(\complement_I M\cap\complement_I N)\cap P$　　D. $(M\cap N)\cup(M\cap P)$

3. 集合 A、B、C(不必相异)的并集 $A\cup B\cup C=\{1,2,\cdots,9\}$. 问:这样的有序组($A$、$B$,$C$)有多少组?

4. 集合 A 有 10 个元素,集合 B 有 6 个元素,全集 U 有 18 个元素,$A\cap B\neq\varnothing$. 设$\complement_I(A\cup B)$有 x 个元素,求由 x 的所有值组成的集合.

5. 某班语文、数学、外语三门课程期中考试成绩统计结果,至少一门功课得满分的学生只有 16 人,语文得满分的有 9 人,数学得满分的有 11 人,外语得满分的有 8 人,语文、数学都得满分的有 5 人,数学、外语都得满分的有 3 人,语文、外语都得满分的有 4 人,问:

   (1) 语文、数学两门功课至少有一门得满分的学生有多少人?

   (2) 语文、数学、外语三门功课都得满分的学生有多少人?

1.3 数 形 结 合

精选妙题

已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

常规策略

因为 $A=[1,4]$，对于集合 B，若 $B=\varnothing$，则 $x^2-2ax+a+2>0$ 恒成立，此时 $\Delta=4a^2-4(a+2)<0$，解得 $-1<a<2$，若 $B\neq\varnothing$，则 $a\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$，此时 $B=[a-\sqrt{a^2-a-2},a+\sqrt{a^2-a-2}]$，然后解不等式组

$$\begin{cases}a-\sqrt{a^2-a-2}\geqslant 1,\\ a+\sqrt{a^2-a-2}\leqslant 4,\end{cases}$$

求出 a 的取值范围.

巧妙解法

易知 $A=[1,4]$.

若 $B=\varnothing$，则 $x^2-2ax+a+2>0$ 恒成立，故

$$\Delta=4a^2-4(a+2)<0,$$

解得 $\quad -1<a<2.$

若 $B\neq\varnothing$，则二次方程 $x^2-2ax+a+2=0$ 有实根，于是 $\Delta=4a^2-4(a+2)\geqslant 0$，解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 2$. 设二次方程 $x^2-2ax+a+2=0$ 的两实根为 x_1、x_2，$x_1\leqslant x_2$，则 $B=\{x\mid x_1\leqslant x\leqslant x_2,a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 2\}$. 令

$$f(x)=x^2-2ax+a+2,$$

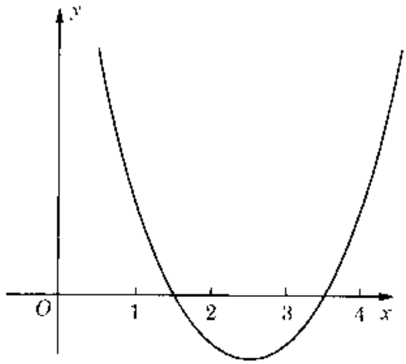

图 1-4

因为 $B\subseteq A$，所以 $x_1\geqslant 1$，且 $x_2\leqslant$

4.由二次函数图象(图 1-4)知

$$\begin{cases} f(1)=1^2-2a\cdot 1+a+2\geqslant 0, \\ f(4)=4^2-2a\cdot 4+a+2\geqslant 0, \\ a\leqslant -1 \text{ 或 } a\geqslant 2, \\ 2\leqslant \frac{2a}{2}\leqslant 4, \end{cases} \quad \text{解得} \quad 2\leqslant a\leqslant \frac{18}{7}.$$

综上可知,实数 a 的取值范围是 $-1<a\leqslant \frac{18}{7}$.

画龙点睛

常规策略的解法是可行的,但是计算量较大,比较繁琐.把二次三项式 $x^2-2ax+a+2$ 转化成二次函数,利用二次函数的图象的直观性,把原问题转化为图形语言,进而较容易地解决了问题.

相关链接

1. 集合 $A=\{y\mid y=x^2+2x+4, x\in \mathbf{R}\}$,$B=\{z\mid z=ax^2-2x+4a, x\in \mathbf{R}\}$,若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.
2. 设集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y\mid y=2x+3, x\in A\}$,$C=\{z\mid z=x^2, x\in A\}$,且 $C\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

1.4 空集的定义

精选妙题

设 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in \mathbf{R}\}$,且 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 p 的取值范围.

常规策略

(1) 当 $A\neq\varnothing$时,由题意知 $x\leqslant 0$,则有

$$\begin{cases} \Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0, \\ x_1+x_2=-(p+2)\leqslant 0, \\ x_1x_2=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \geqslant 0 \text{ 或 } p \leqslant -4, \\ p \geqslant -2, \end{cases} \quad \text{解得} \quad p \geqslant 0.$$

(2) $A=\varnothing$时，即方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 中的 $\Delta=(p+2)^2-4<0$，由此解得 $-4<p<0$.

综合(1)、(2)知，p 的变化范围是$p>-4$.

巧妙解法

若 $A\cap \mathbf{R}^+ \neq \varnothing$，则有

$$\begin{cases} \Delta=(p+2)^2-4 \geqslant 0, \\ x_1+x_2=-(p+2)>0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} p \geqslant 0 \text{ 或 } p \leqslant -4, \\ p<-2, \end{cases} \quad \text{即} \quad p \leqslant -4.$$

因此在 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$的条件，$p$ 的取值范围是$p>-4$.

画龙点睛

“巧妙解法”从问题的反面入手，避开了两种情况的讨论，但“常规策略”中的情形(2)不能遗漏，空集是特殊的集合，处理集合问题时要特别注意不要遗漏空集．对于空集，有如下的性质：对于任何集合 A，都有 $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$，$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\neq\{\varnothing\}$．在解答有关集合的问题时，忽略空集往往导致错误．

·相 关·链·接·

1. 已知 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x \mid f(x+1)=ax\}$ 且 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，求实数 a 的取值范围．

2. 设 $A\cap B=\varnothing$，$M=\{m \mid m \text{ 为} A \text{ 的子集}\}$，$N=\{n \mid n \text{ 为} B \text{ 的子集}\}$，那么(　　)．

A．$M\cap N=\varnothing$　　　　B．$M\cap N=\{\varnothing\}$

C．$M\cap N=A\cap B$　　　　D．$M\cap N\subseteq A\cap B$

3. 若 $A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x \mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求当 $B\subseteq A$ 时实数 m 的取值范围．