

JIETIGAOSHONG

熊斌 陈双双 主编

解题高手

高中数学



华东师范大学出版社

解题高手

主 编 熊 斌 陈双双
参编者 朱一德
胡圣团
甄德文



图书在版编目(CIP)数据

解题高手. 高中数学/熊斌, 陈双双主编. —上海: 华东师范大学出版社, 2003. 7
ISBN 7-5617-3280-5

I. 解... II. ①熊... ②陈... III. 数学课—高中—解
题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 035258 号

解题高手/高中数学

主 编 熊 斌 陈双双
策划组稿 应向阳 倪 明
责任编辑 审校部编辑工作组
特约编辑 刘爱晶
封面设计 卢晓红
版式设计 蒋 克



出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购) 电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893
业务传真 021-62860410 62602316
<http://www.ecnupress.com.cn>
社 址 上海市中山北路 3663 号
邮编 200062

印 刷 者 苏州市永新印刷包装有限责任公司
开 本 890×1240 32 开
印 张 9.25
字 数 274 千字
版 次 2005 年 5 月第二版
印 次 2005 年 5 月第一次
书 号 ISBN 7-5617-3280-5/G·1726
定 价 13.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

致读者 ZHI DUZHE



也许你在为某道数学题目而烦恼.那么,你就打开眼前的这本《解题高手》,它会让你豁然开朗——书中的题解给了你解题的钥匙.

也许你对学习数学缺乏兴趣.那么,你就打开眼前的这本《解题高手》,书中每一个巧妙的解法,会让你感受数学的奥妙,会让你享受学习数学的无限乐趣.

也许你是一个数学爱好者.那么,你更应该立即打开眼前的这本《解题高手》,这里的每道题解都会让你学到新的思路、新的方法,使你的数学水平从此再上一个新的层次.

《解题高手》是一批长期从事中学教学、富有教学经验的教师题海淘金、研究探索的结果.

《解题高手》力图通过练习,形成适合你自己的更科学的学习方法.

《解题高手》注重基础与提高的统一,关注技巧与知识的统一,着眼知识形成过程与结果的统一,让你在练习中得到最大的收益.

《解题高手》在编写体例上遵循学习规律,让你在练习中得到全面系统的提高.全书每个专题都有以下几个栏目.

(1) 精选妙题:以精、准为原则选择每一道题目,为你奉献经典“美食”,力求以一当十.

(2) 常规策略:讲解一般思路及解法,是你解题的必备基础,千万不可轻视.

(3) 巧妙解法:详细介绍题目的巧妙解法,令你耳目一新,茅塞顿开.

(4) 画龙点睛：比较常规解法和巧妙解法的不同之处，归纳要点，指出妙解适用的题目类型，予你指点捷径，定会受益匪浅。

(5) 相关链接：提供类似题目，望你举一反三，巩固提高。

愿《解题高手》成为你的好朋友，助你成为解题高手。

华东师范大学出版社

2003年6月

先睹为快 XIANDUWEIKUAI



这本集子收入了不少“妙题”及其“巧解”，帮助你成为解题高手。这里让你先睹为快，欣赏下面的问题，也许你对这本书也有了一个大概的了解。

问题：设 x, y 是实数，且满足 $x^2 + xy + y^2 = 3$ ，求 $u = x^2 - xy + y^2$ 的最大值与最小值。

通常的解法是：先估计出 u 的上、下界。由

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, & \text{①} \\ x^2 - xy + y^2 = u, & \text{②} \end{cases}$$

解出 xy 与 $x + y$ 。

① - ②，再除以 2，得

$$xy = \frac{3-u}{2}. \quad \text{③}$$

① + ③，得

$$(x+y)^2 = \frac{9-u}{2}.$$

所以， $\frac{9-u}{2} \geq 0$ ，即 $u \leq 9$ ，并且

$$x+y = \pm \sqrt{\frac{9-u}{2}}. \quad \text{④}$$

由③、④知， x, y 是如下关于 t 的一元二次方程

$$t^2 \pm \sqrt{\frac{9-u}{2}}t + \frac{3-u}{2} = 0$$

的两个实根，于是



$$\Delta = \frac{9-u}{2} - 4 \cdot \frac{3-u}{2} \geq 0,$$

解得

$$u \geq 1.$$

综上, $1 \leq u \leq 9$. 又当 $x = y = 1$ 时, $u = 1$; 当 $x = -y = \sqrt{3}$ 时, $u = 9$. 所以, u 的最小值为 1, u 的最大值为 9.

巧妙解法: 因为 $u = x^2 + xy + y^2 - 2xy = 3 - 2xy$, 又因为

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \quad x^2 + y^2 \geq -2xy,$$

所以 $3 = x^2 + y^2 + xy \geq 3xy$, $3 = x^2 + y^2 + xy \geq -xy$,

得 $-3 \leq xy \leq 1$, 即 $1 \leq 3 - 2xy \leq 9$.

又当 $x = y = 1$ 时, $u = 1$; 当 $x = -y = \sqrt{3}$ 时, $u = 9$. 所以, u 的最小值为 1, u 的最大值为 9.

画龙点睛: 大家熟悉 $x^2 + y^2 \geq 2xy$, 利用这个不等式我们可以估计出 u 得下界, 进而求得 u 的最小值. 但是很少去用 $x^2 + y^2 \geq -2xy$, 其实, 把这两个不等式结合起来, 可以很方便地估计一些量的上界和下界, 进而求出最值.

看了上面的解法, 是否有不少感慨, 是否还想知道更多精彩的问题与解法, 那么请你继续读后面的“妙题”与“巧解”吧. 不过读完“巧解”后, 还得做“相关链接”中的题目. 只有这样, 才能提高你的解题能力. 这里提供一题, 让你一试.

相关链接: 已知实数 x, y 满足 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 求 $u = x^2 + xy + y^2$ 的最大值和最小值.

目 录 MULU



(1) 第1章 集合与逻辑初步

1.1 元素的贡献(1) 1.2 韦恩图(2) 1.3 数形结合(4) 1.4 空集的定义(5) 1.5 几何意义(7) 1.6 特殊化(8) 1.7 适当分类(9) 1.8 命题的否定(11) 1.9 逆否命题(12) 1.10 必要但不充分条件(13)

(15) 第2章 函数

2.1 巧设函数的解析式(15) 2.2 用消元法求解析式(16) 2.3 利用“正难则反”原则(18) 2.4 落一叶而知秋(20) 2.5 巧用函数的奇偶性解题(21) 2.6 设而不代巧处理(23) 2.7 用对称点解函数问题(24) 2.8 巧求图形面积(25) 2.9 用函数思想解方程(27) 2.10 转化思想求最值问题(29) 2.11 发掘隐含条件(31)

(35) 第3章 三角函数

3.1 巧作角度变换(35) 3.2 利用均值代换(36) 3.3 构造模型(37) 3.4 利用复数求三角函数式值(38) 3.5 巧用比例性质(39) 3.6 对偶思想的活用(41) 3.7 巧构方程优美解题(42) 3.8 等化不等证明等式(43) 3.9 解析法妙解三角形问题(44) 3.10 一个三角不等式的应用(46) 3.11 一类三角方程有解条件的活用(47) 3.12 分离变量法(48) 3.13 利用斜率求三角函

数最值(49) 3.14 作辅助圆求三角函数式取值范围(51) 3.15 特殊值法巧解三角选择题(52) 3.16 利用图象巧解三角方程(53)

(55) **第4章 不等式**

4.1 借助数轴(55) 4.2 数中思形(56) 4.3 分离变量(58) 4.4 “1”的替代(60) 4.5 适度放缩(61) 4.6 灵活设元(62) 4.7 设计构造(63)

(66) **第5章 数列与极限**

5.1 逐项比较(66) 5.2 巧设函数(68) 5.3 选取合适的和式(69) 5.4 和成等差与等比(70) 5.5 化整体为局部(72) 5.6 巧用几何直观(73) 5.7 整体考虑(74) 5.8 在三角函数中的应用(76) 5.9 以退为进,由特殊到一般(77) 5.10 数列极限(78) 5.11 数学归纳法(80) 5.12 等比数列(81) 5.13 特殊数列(83) 5.14 通项与和的转换(84)

(86) **第6章 排列、组合与概率统计**

6.1 先选后排法(86) 6.2 排除法(87) 6.3 对称分析法(88) 6.4 插队法(89) 6.5 隔板法(90) 6.6 二项式系数的对称性(92) 6.7 在二项式定理中巧用赋值法(93) 6.8 从反面入手(94) 6.9 妙用递推(95)

(98) **第7章 复数**

7.1 分类讨论巧求复数(98) 7.2 整体代换全面把握(99) 7.3 取模巧解复数综合题(100) 7.4 利用方程思想解题(101) 7.5 “1”的活用(103) 7.6 三角形式求解模与复数问题(104) 7.7 分离变量巧解题(105) 7.8 数形结合巧求复数最值问题(106)

(109) **第8章 微积分初步**

8.1 求导法(109) 8.2 判断单调性(110) 8.3 先化简,再求导(111) 8.4 拆项后求导(112) 8.5 求值(113)

- 8.6 函数的值域(114) 8.7 面积(115) 8.8 积分法(116) 8.9 旋转体体积(117) 8.10 借助图形的对称(118)
- (120) **第9章 向量**
9.1 巧设未知数(120) 9.2 恰当运用法则(121)
9.3 合理利用内积公式(123) 9.4 避免讨论,求轨迹方程(124) 9.5 利用向量,解斜三角形(126) 9.6 构造向量,巧证不等式(127)
- (130) **第10章 直线、平面、简单几何体**
10.1 判断位置关系(130) 10.2 利用向量内积(132)
10.3 应用基本图形(135) 10.4 空间问题平面化(137)
10.5 巧妙分割(139) 10.6 适时补形(140) 10.7 善于转换(141) 10.8 创设截面(143) 10.9 正难则反(144)
10.10 巧设参数(146) 10.11 特殊值法(148) 10.12 极限思想(149)
- (151) **第11章 解析几何**
11.1 合理选择公式(151) 11.2 斜率倾角,数形结合(152) 11.3 中点公式,韦达定理(154) 11.4 巧设辅助圆,化繁为简(156) 11.5 巧设曲线系(157) 11.6 利用中心对称(159) 11.7 引入三角,化难为易(160) 11.8 坐标代换,变椭圆为圆(162) 11.9 妙用定比分点公式(163) 11.10 动静转换,反客为主(166) 11.11 代点作差,构造斜率(167) 11.12 设而不求,整体转化(170) 11.13 正难则反,转换思路(171) 11.14 巧用平面几何,出奇制胜(173) 11.15 饮水思源,巧用定义(176) 11.16 向量客串,独具匠心(177) 11.17 铺路搭桥,选择参数(180) 11.18 借石攻玉,复数逞能(181) 11.19 酌情换“系”,坐标转化(183)
- (187) **第12章 探索题**
12.1 代数问题几何处理(187) 12.2 巧构几何图形(188)



12.3 巧用变换(189) 12.4 重视等价定义(191) 12.5
单位根的妙用(192) 12.6 巧构新数列(194) 12.7 避
开解析式(195) 12.8 分类比较(197)

(200) **第 13 章 开放题**

13.1 用向量方法解几何题(200) 13.2 换个角度算体
积(201) 13.3 巧用对称原则(203) 13.4 构造函数解
题(205) 13.5 联想猜周期(206) 13.6 假设法(207)
13.7 是否受到台风影响(209) 13.8 优惠率(210)
13.9 电梯停在哪一层(212) 13.10 采用何种运输方
式(214)

(217) **第 14 章 应用题**

14.1 分段计费(217) 14.2 巧求最值(219) 14.3 几
何建模 (222) 14.4 妙用概率(224)

(226) **答案与提示**

第1章 集合与逻辑初步

1.1 元素的贡献

精选妙题

设集合 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, 求集合 A 的所有非空子集元素和的和.

常规策略

写出 A 的所有非空子集:

$$\begin{aligned} & \{1\}, \{2\}, \dots, \{10\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{9, 10\}, \\ & \dots \\ & \{1, 2, \dots, 10\}. \end{aligned}$$

然后分别求出每一个非空子集的元素和, 再把这些数相加.

巧妙解法

含有元素 1 的子集有 2^9 个, 所以 1 在总和中出现 2^9 次. 同样, 元素 2, 3, \dots , 10 在总和中均出现 2^9 次, 所以, 所求的和为

$$(1 + 2 + \dots + 10) \times 2^9 = 28\ 160.$$

画龙点睛

常规策略是把所有子集罗列出来, 先求出每个子集的元素和, 再求总和, 这样计算较繁. 巧妙解法是计算每个元素在总和中“贡献”了多少次, 进而便很容易求出总和了.

-相关链接-

1. 设 $A = \{1, 2, \dots, n\}$, 其中 n 是大于 2 的正整数, 求 A 的所有非空子集的元素和的和.
2. 考虑由 10 个元素组成的集合 $M = \{19, 99, -1, 0, 25, -36, -91, 1, -2, 11\}$. 记 M 的所有非空子集为 $M_i, i = 1, 2, \dots, 1023$. 每一个 M_i 中所有元素的乘积为 $m_i, i = 1, 2, \dots, 1023$. 求 $m_1 + m_2 + \dots + m_{1023}$ 的值.

1.2 韦恩图

精选妙题

设集合 A, B 都是全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集, 已知 $(\complement_I A) \cap B = \{1\}, A \cap B = \{3\}, (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{2, 5\}$, 求 $\complement_I(A \cup B)$ 和 $A \cap (\complement_I B)$.

常规策略

由已知条件可知, $1 \in B, 1 \notin A, 3 \in A \cap B, 2$ 和 5 既不属于 A , 也不属于 B .

再考虑元素 4 , 因为 $4 \notin (\complement_I A) \cap (\complement_I B)$, 所以 $4 \in A \cup B$, 又 $4 \notin (\complement_I A) \cap B$, 所以, $4 \in A$, 但 $4 \notin B$.

综上所述, $\complement_I(A \cup B) = \{2, 5\}, A \cap (\complement_I B) = \{4\}$.

巧妙解法

如图 1-1 所示, 用方框表示全集 I , 两个圆分别表示集合 A 和 B . 由 $(\complement_I A) \cap B = \{1\}$, 故 A 外 B 内填 1. 由 $A \cap B = \{3\}$, 则在 A 与 B 的公共部分填 3. 由 $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{2, 5\}$, 则在 A 和 B 之外, 方框内填上 2 和 5, 于是 4 在 B 外 A 内.

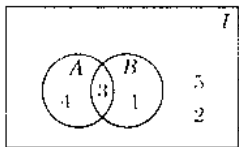


图 1-1

从图中便可知 $\complement_I(A \cup B) = \{2, 5\}, A \cap (\complement_I B) = \{4\}$.

画龙点睛

用来说明各个集合之间关系的图称为“韦恩图”，它能帮助我们在直观上理清集合之间的关系，有利于思考和推理。

相关链接

- 如图 1-2, I 表示全集, A, B, C 是三个子集, 则阴影部分表示的集合是().
 A. $\complement_I(A \cup C) \cup B$ B. $(\complement_I A \cap \complement_I C) \cup B$
 C. $(\complement_I A \cap \complement_I C) \cap B$ D. $(A \cup C) \cap \complement_I B$
- 如图 1-3, I 表示全集, M, N, P 都是三个子集, 则阴影部分表示的集合是().

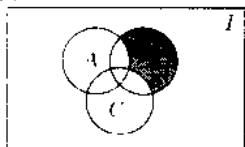


图 1-2

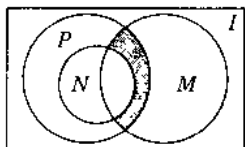


图 1-3

- $M \cap (N \cup P)$ B. $M \cap (\complement_I N \cap P)$
 - $(\complement_I M \cap \complement_I N) \cap P$ D. $(M \cap N) \cup (M \cap P)$
- 集合 A, B, C (不必相异) 的并集 $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, 9\}$. 问: 这样的有序组 (A, B, C) 有多少组?
 - 集合 A 有 10 个元素, 集合 B 有 6 个元素, 全集 U 有 18 个元素, $A \cap B \neq \emptyset$. 设 $\complement_I(A \cup B)$ 有 x 个元素, 求由 x 的所有值组成的集合.
 - 某班语文、数学、外语三门课程期中考试成绩统计结果, 至少一门功课得满分的学生只有 16 人, 语文得满分的有 9 人, 数学得满分的有 11 人, 外语得满分的有 8 人, 语文、数学都得满分的有 5 人, 数学、外语都得满分的有 3 人, 语文、外语都得满分的有 4 人, 问:
 - 语文、数学两门功课至少有一门得满分的学生有多少人?
 - 语文、数学、外语三门功课都得满分的学生有多少人?

1.3 数形结合

精选妙题

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

常规策略

因为 $A = [1, 4]$, 对于集合 B , 若 $B = \emptyset$, 则 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ 恒成立, 此时 $\Delta = 4a^2 - 4(a + 2) < 0$, 解得 $-1 < a < 2$, 若 $B \neq \emptyset$, 则 $a \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$, 此时 $B = [a - \sqrt{a^2 - a - 2}, a + \sqrt{a^2 - a - 2}]$, 然后解不等式组

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - a - 2} \geq 1, \\ a + \sqrt{a^2 - a - 2} \leq 4, \end{cases}$$

求出 a 的取值范围.

巧妙解法

易知 $A = [1, 4]$.

若 $B = \emptyset$, 则 $x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ 恒成立, 故

$$\Delta = 4a^2 - 4(a + 2) < 0,$$

解得 $-1 < a < 2$.

若 $B \neq \emptyset$, 则二次方程 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 有实根, 于是 $\Delta = 4a^2 - 4(a + 2) \geq 0$, 解得 $a \leq -1$ 或 $a \geq 2$. 设二次方程 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 的两实根为 $x_1, x_2, x_1 \leq x_2$, 则 $B = \{x \mid x_1 \leq x \leq x_2, a \leq -1 \text{ 或 } a \geq 2\}$. 令

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2,$$

因为 $B \subseteq A$, 所以 $x_1 \geq 1$, 且 $x_2 \leq$

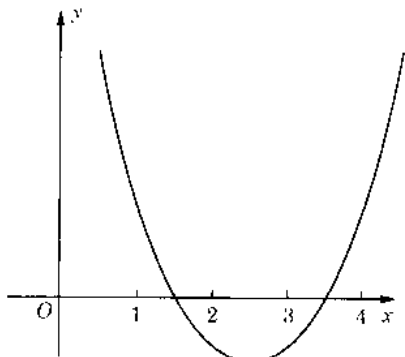


图 1-4

4. 由二次函数图象(图 1-4)知

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 - 2a \cdot 1 + a + 2 \geq 0, \\ f(4) = 4^2 - 2a \cdot 4 + a + 2 \geq 0, \\ a \leq -1 \text{ 或 } a \geq 2, \\ 2 \leq \frac{-2a}{2} \leq 4, \end{cases} \quad \text{解得 } 2 \leq a \leq \frac{18}{7}.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $-1 < a \leq \frac{18}{7}$.



画龙点睛

常规策略的解法是可行的, 但是计算量较大, 比较繁琐. 把二次三项式 $x^2 - 2ax + a + 2$ 转化成二次函数, 利用二次函数的图象的直观性, 把原问题转化为图形语言, 进而较容易地解决了问题.

相关链接

1. 集合 $A = \{y \mid y = x^2 + 2x + 4, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{z \mid z = ax^2 - 2x + 4a, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.
2. 设集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z \mid z = x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

1.4 空集的定义

精选妙题

设 $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

常规策略

(1) 当 $A \neq \emptyset$ 时, 由题意知 $x \leq 0$, 则有

$$\begin{cases} \Delta = (p+2)^2 - 4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = -(p+2) \leq 0, \\ x_1 x_2 = 1, \end{cases}$$



$$\begin{cases} p \geq 0 \text{ 或 } p \leq -4, \\ p \geq -2. \end{cases} \text{ 解得 } p \geq 0.$$

(2) $A = \emptyset$ 时, 即方程 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 中的 $\Delta = (p+2)^2 - 4 < 0$, 由此解得 $-4 < p < 0$.

综合(1)、(2)知, p 的变化范围是 $p > -4$.

巧妙解法

若 $A \cap \mathbf{R}^+ \neq \emptyset$, 则有

$$\begin{cases} \Delta = (p+2)^2 - 4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = -(p+2) > 0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} p \geq 0 \text{ 或 } p \leq -4, \\ p < -2. \end{cases} \text{ 即 } p \leq -4.$$

因此在 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$ 的条件, p 的取值范围是 $p > -4$.

画龙点睛

“巧妙解法”从问题的反面入手, 避开了两种情况的讨论, 但“常规策略”中的情形(2)不能遗漏, 空集是特殊的集合, 处理集合问题时要特别注意不要遗漏空集. 对于空集, 有如下的性质: 对于任何集合 A , 都有 $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. 在解答有关集合的问题时, 忽略空集往往导致错误.

相关链接

1. 已知 $f(x) = x^2$, 集合 $A = \{x \mid f(x+1) = ax; \text{ 且 } A \cup \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^+\}$, 求实数 a 的取值范围.
2. 设 $A \cap B = \emptyset$, $M = \{m \mid m \text{ 为 } A \text{ 的子集}\}$, $N = \{n \mid n \text{ 为 } B \text{ 的子集}\}$, 那么().
 A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = \{\emptyset\}$
 C. $M \cap N = A \cap B$ D. $M \cap N \subseteq A \cap B$
3. 若 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 求当 $B \subseteq A$ 时实数 m 的取值范围.