

CHU DENG JI HE YAN JIU

高
等
学
校
教
材

初等几何研究

第二版

朱德祥 朱维宗 编

高等教育出版社

2

高等学校教材

初等几何研究

第二版

朱德祥 朱维宗 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书第二版是参照第一版修订而成,保留了第一版的特色与精华.全书分为四章,前三章是平面几何,第四章系统讲授立体几何,并增加了两个附录供读者参考.本书注重联系中学教学实际,注重几何变换的思想及应用,对中学几何教材中的薄弱环节,或讲得不深透,或学生较生疏处,加以分析研究、补充提高.

本书可作为师范院校数学专业全日制及函、夜大教材及中学教师自修用书或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

初等几何研究/朱德祥,朱维宗编.—2版.—北京:
高等教育出版社,2003.1
ISBN 7-04-011690-1

I.初... II.①朱...②朱... III.初等几何—教学研究—中学 IV.G633.632

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 084366 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	北京奥隆印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	1985 年 2 月第 1 版 2003 年 1 月第 2 版
印 张	8.625	印 次	2003 年 1 月第 1 次印刷
字 数	220 000	定 价	11.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

再版前言

几何占据着中学数学教学的重要位置,通过对初等几何课程的学习,可以培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力,从而提高了学生的逻辑思维能力.对初等几何的学习,学生可以获取大量的来自生活、生产实践的知识,它们有助于培养学生重实践、重应用的良好素质.现代高技术有许多采用了传统和现代的几何理论,在人类进入电子信息社会的今天,几何学对人类社会发展的贡献越来越大,出席美国 1998 年科学年会的科学家认为:“21 世纪教育的一个重要原则是:学校传授给下一代的将不只是知识,更重要的是技能,几何学具有较强的直观效果,有助于提高学生认识事物的能力,应当成为自然科学教育大纲中的首选和重点内容.”(《二十一世纪的教育——几何学万岁》,新民晚报 1998 年 7 月 18 日第 23 版)初等几何是几何类课程的基石,在师范院校开设好初等几何研究课程,对基础教育有着极其深远的意义!

本教材第一版出版于 1985 年,至 2000 年 4 月已印刷 17 次.第一版使用了 16 年以来,初等几何课程建设及教改已发生较大变化.为了适应当前我国几何类课程改革的现状,更好地培养师范院校在校生及广大的中学数学教师的几何能力,并能愉快地胜任几何教学,在高等教育出版社数学编辑室和云南师范大学数学学院的大力支持下,对本教材第一版作了修订.

这次修订,改正了第一版中的一些错漏,并根据作者教学实践中的心得,对部分例题及章节进行了适当的改写.针对各高校缩减课时的现状,第二版按 54 课时来安排讲授内容,为此删去了第一版中 § 1.29、§ 4.6、§ 4.9 三节,删去了一部分例题,部分内容加上 * 号,压缩了习题.为了方便教学,第四章立体几何中的定理,除个别易证的外均补充了证明,其中 § 4.1 中的定理证明放入 § 附

1.1.2 中. 这次修订, 还增加了两个附录: 附录一几何公理简介; 附录二再论数学证明.

本次修订保留了第一版的特色与精华, 编写体例未作改动, 并试图反映出自 1985 年以后初等几何课程改革的一些新观点. 限于本人的水平和改编的时间仓促, 疏漏及不足之处在所难免, 敬希读者见教, 以便更正提高.

这次修订, 是 2000 年 5 月在青岛召开的全国高师院校几何类课程教学学术研讨会第十二届年会上由参会代表倡议的, 并承他们提供了一些很好的修改建议. 修订工作也得到了云南师范大学数学学院的大力支持与帮助, 并将修订工作列入云南省重点专业建设和云南师大校级重点学科建设《数学教学论》中, 几何教研组的老师们也给予了许多具体的帮助. 在此, 向所有关心本教材改编及给予帮助的老师以深深的谢意! 特别感谢高等教育出版社的李陶老师; 云南师范大学数学学院的郭震教授、马裕民教授、李忠映教授, 湖北省江汉大学肖思正副教授!

本书第一版作者朱德祥教授已于 1994 年逝世, 生前留下了丰富的遗稿, 这些遗稿成为第二版编写的主要取材部分. 教材再版也是对朱德祥先生的纪念!

朱维宗

2001 年 9 月于云南师大

前 言

本书是以昆明师院数学系《初等几何复习及研究》讲义为基础编写的. 1982 年接受任务, 对原讲义加以增、删、改, 作为师院和师专初等几何研究的试用教材. 1983 年 9 月在昆明开审稿会, 北京师大丁尔升、钟善基同志, 华东师大余元希、田万海同志, 陕西师大朱恩宽同志, 芜湖师专吴雪庐同志, 南通师专高笃生同志, 泰安师专周诚询同志, 昆明师专李世泽同志, 昆明师院徐绍珍、李忠映同志等提了许多宝贵意见, 又进行了改写. 兼顾师院和师专, 但愿不致顾此失彼.

在编写过程中, 无意系统地复习中学教材, 但进行本课程教学时, 无疑要有一点复习回忆的工作, 教学才能顺利进行. 希望本书在培养对几何问题的观察、分析、综合、推究的能力, 通用方法的掌握, 熟练技巧的养成等方面, 能作出贡献. 几何课在中学数学教学中的地位与作用, 是不容低估的. 使用本教材的经验表明, 读者对它是有兴趣的, 积极主动的. 能独立思考, 便能学得生动活泼, 有助于智力开发.

审稿会上, 大家认为, 高师的数学课程中, 初等数学课程直接关系到中学数学教学质量, 应该受到足够的重视.

师专的《初等数学研究与教学法大纲》, 规定有小平板测量、解三角形和制图基本知识的内容. 解三角形, 指正弦定律和余弦定律的应用, 这里割爱了. 制图和测量是实践性很强的课程, 如果不是走过场, 得要多占一点时间. 审稿会上, 多数人倾向由各校写点小册子, 重在指导实践.

本书分四章. 前三章讲平面几何, 第四章讲立体几何. 书的开头部分, 系统讲述证题通法, 把证题术渗透到各具体实例中, 将中学几何课讲得不深透或学生较生疏之处加以分析研究, 补充提高.

轨迹和作图是中学数学教材的薄弱环节,但轨迹和作图最能加强学生分析和全面观察问题的能力,并加深对几何各部分的理解,因之有必要系统讲述,而且所占篇幅并不多.结合解作图题常用的方法,本书还适当介绍了位似及图形的变换.

本书着重联系实际,着重作为一个中学数学教师所必须具备的基础理论和基本训练及技巧.讲正面题材的同时,注意提防发生错误、片面性和一些容易疏忽之处.

我国地广人众,历史遗留的不平衡一时难以消灭,各地区各学校间差别还是相当大的.一刀切的思想是行不通的.编者热忱希望任课教师实事求是地对教材作适当的增删和变动.

使用过原讲义的许多学校和教师给我们提供了不少宝贵的意见和帮助,对他们以及关心本书出版的同志,一并致谢.限于本人水平,疏漏错误之处必多,敬希读者见教,以便更正提高.

朱德祥

1984年2月于昆明师院.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电 话:(010) 84043279 13801081108

传 真:(010) 64033424

E-mail:dd@hep.com.cn

地 址:北京市东城区沙滩后街 55 号

邮 编:100009

责任编辑	李 陶
封面设计	刘晓翔
责任绘图	孟庆祥
版式设计	史新薇
责任校对	刘 莉
责任印制	张小强

目 录

再版前言	i
前言	iii
第一章 证题法·初等几何变换·度量与计算	1
I. 证题法与证题术	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 关于数学证明	2
§ 1.3 命题的四种变化	4
§ 1.3.1 四种命题的真假关系	6
§ 1.3.2 充分条件,必要条件,充要条件	7
§ 1.3.3 证明命题要谨防出错	8
§ 1.4 逆命题证法	10
习题一	11
§ 1.5 直接证法与间接证法	12
§ 1.5.1 间接证法举例	13
§ 1.6 综合法与分析法	15
习题二	18
§ 1.7 演绎法与归纳法	18
习题三	21
§ 1.8 等线段的证法	22
习题四	26
§ 1.9 等角的证法	27
习题五	30
§ 1.10 和差倍分的证法和定值问题	31
§ 1.11 证几何题方法可灵活机动一些	35
习题六	38
§ 1.12 关于不等量的证法	39
习题七	43

§ 1.13 平行线的证法	44
§ 1.14 垂直线的证法	46
习题八	49
§ 1.15 共线点的证法	49
§ 1.15.1 梅涅劳(Menelaus)定理	51
习题九	54
§ 1.16 共点线的证法	54
§ 1.16.1 锡瓦(Ceva)定理	56
习题十	60
§ 1.17 共圆点的证法	60
§ 1.18 共点圆的证法	62
习题十一	63
II. 初等几何变换	64
§ 1.19 图形的相等或合同	64
§ 1.20 运动	66
§ 1.20.1 平(行)移(动)	67
§ 1.20.2 旋转	68
§ 1.21 轴反射或轴对称变换	69
§ 1.22 合同变换(正交变换)	71
§ 1.23 位似和相似变换	71
§ 1.24 初等几何变换的应用	74
§ 1.24.1 利用平移变换证明命题	74
§ 1.24.2 利用轴反射变换证明命题	76
§ 1.24.3 利用旋转变换证明命题	81
§ 1.24.4 利用相似变换证明命题	83
习题十二	86
III. 度量与计算	87
§ 1.25 线段的度量	87
* § 1.26 关于成比例的量的证明	89
§ 1.27 面积的概念	90
§ 1.28 三角形中一些线段的计算	93
* § 1.29 圆内接四边形面积的计算	96

§ 1.30 极大极小问题	97
§ 1.30.1 两个常用的定理	99
习题十三	103
第二章 轨迹	106
§ 2.1 轨迹的意义	106
§ 2.2 轨迹命题的三种类型	107
§ 2.3 基本轨迹命题	108
§ 2.4 第一类型轨迹命题举例	109
习题十四	112
§ 2.5 第二类型轨迹命题举例	112
习题十五	118
§ 2.6 第三类型轨迹命题举例, 轨迹探求法	118
§ 2.7 轨迹命题两面证明的回顾	123
习题十六	125
第三章 作图题	127
§ 3.1 几何作图问题的意义与作用	127
§ 3.2 尺规作图	128
§ 3.3 定位作图与不定位作图	129
§ 3.4 基本作图问题	129
§ 3.5 解作图题的步骤	130
§ 3.6 轨迹交截法	135
习题十七	138
§ 3.7 三角形奠基法	139
习题十八	142
§ 3.8 应用合同变换解作图问题	142
习题十九	147
§ 3.9 位似变换的应用	148
习题二十	151
§ 3.10 代数分析法	152
习题二十一	156
§ 3.11 等分圆周	156
§ 3.11.1 十等分圆周, 黄金分割(外内比)	157

§ 3.11.2 五等分圆周	158
§ 3.11.3 正五角星作法	160
§ 3.11.4 十五等分圆周	160
* § 3.11.5 n 等分圆周	161
* § 3.12 尺规作图不能解决的问题	164
第四章 立体几何	167
§ 4.1 点与直线、点与平面的相关位置	167
§ 4.2 空间两直线的相关位置	168
§ 4.3 直线与平面的相关位置	171
§ 4.4 二平面的相关位置	174
§ 4.5 直线与平面的垂直	177
§ 4.6 正射影·平行射影	183
§ 4.6.1 三垂线定理及其逆定理	184
§ 4.6.2 直线与平面间的角	186
§ 4.7 二面角·垂直平面	188
§ 4.7.1 异面直线的公垂线	191
§ 4.7.2 例题	192
§ 4.8 多面体	195
* § 4.8.1 多面体的截面图的画法	198
§ 4.8.2 关于凸多面体的欧拉(L. Euler)定理	201
§ 4.8.3 正多面体	203
习题二十二	207
§ 4.9 空间几何变换	209
§ 4.9.1 图形的相等	209
§ 4.9.2 运动	212
§ 4.9.3 反射或对称变换	215
§ 4.9.4 合同变换	218
§ 4.9.5 对称图形	219
* § 4.10 立体几何轨迹	219
习题二十三	223
§ 4.11 面积与体积	224
§ 4.11.1 祖暅原理·棱柱体积和面积	225

§ 4.11.2 棱锥	227
§ 4.11.3 棱台	229
§ 4.11.4 圆柱	230
§ 4.11.5 圆锥	231
§ 4.11.6 圆台	231
§ 4.11.7 拟柱体体积	233
§ 4.11.8 球	235
习题二十四	239
附录一 几何公理简介	241
§ 附 1.1 希尔伯特公理体系	242
§ 附 1.1.1 希尔伯特公理表	242
§ 附 1.1.2 几何公理的推论举例	245
§ 附 1.2 几何公理体系的三个基本问题	248
§ 附 1.3 我国中学几何教材的公理结构	250
附录二 再论数学证明	254
§ 附 2.1 数学证明思想的形成	254
§ 附 2.2 形式逻辑简介	255
§ 附 2.3 数学证明的涵义与结构	257
§ 附 2.4 数学证明的教学	261

第一章 证题法·初等几何 变换·度量与计算

I. 证题法与证题术

§ 1.1 引 言

数学是研究空间形式和数量关系的学科. 在初等几何课程里, 这两方面的内容特别明显.

初等数学研究, 在师专数学科是必修课, 在高师数学系是选修课. 高师要不要设初等数学课程, 意见从来就不统一. 1954 年中华人民共和国教育部颁布的高师数学系教学计划, 是中国有史以来的第一个国家规定的计划, 其中对初等数学的要求是“熟练精通”四个字, 值得深思.

初等几何研究的对象是多方面的. 如中学缺陷的补充, 教材内容的融会贯通, 独立工作能力的养成, 克服学习中困难的刚毅精神的培养等等. 通过这课程的学习, 对初等几何, 要有概括而连贯的知识, 获得观察、分析、综合、推究的能力, 掌握通用方法, 具备足够的熟练技巧, 并能愉快胜任中学几何教学, 从中发现问题、解决问题, 从而得到锻炼、提高.

对于最后一点, 这里举例说明. 例如, 把圆的切线定义为与圆只有一个交点的直线就不恰当, 因这样定义不利于推广到一般二次曲线. 圆是二次曲线, 抛物线也是. 与抛物线主轴平行的任一直线, 总是与抛物线交于一点, 难道这些都是切线吗? 一条也不是! 圆的切线是与圆相交于两个相重合的点的直线.

再举一例,现行中学数学教科书,利用与欧几里得第五公设等价的平行公理,证明了“三角形的内角和是 180° ”,然后推出外角定理:“三角形的每个外角大于与它不相邻的内角”.

凡必须利用平行公理证明的命题,称为欧氏几何命题.不需利用这公理证的,称为绝对几何命题.例如,三角形两边之和大于第三边,等腰三角形两底角相等,都是绝对几何命题.

这样,可能认为三角形外角定理是欧氏几何命题.其实不然.例如,要证 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBX > \angle C$ (图 1.1),可将中线 AD 延长一倍至 E ,连 BE ,则 BE 在 $\angle CBX$ 内部,从而 $\angle CBE < \angle CBX$. 由于 $\triangle ACD$ 与 $\triangle EBD$ 有两边及其夹角对应相等,所以

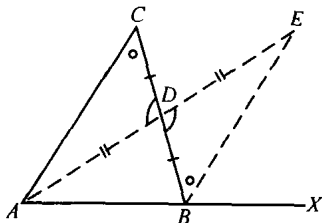


图 1.1

$$\triangle ACD \cong \triangle EBD,$$

从而有 $\angle C = \angle DBE = \angle CBE < \angle CBX$.

仿此可证 $\angle A < \angle CBX$.

可见外角定理是绝对几何命题.它不仅在欧氏几何正确,在罗巴切夫斯基几何也正确^①.

这一类涉及几何学本质的问题,在几何基础这个科目里讨论.各种几何学有各自的公理系统.关于欧氏几何的公理系统,可参看本书附录一.本书的论述以中学几何为基础,在结构上没有两样,有些观点有所不同.

§ 1.2 关于数学证明

数学这门研究现实世界空间形式和数量关系的学科,是古往

^① 在罗氏几何,三角形三内角之和小于 180° ,外角定理必然成立.参考朱德祥编《高等几何》(高等教育出版社 1983 年版)第九章 § 9.7.2 定理 4.

今来人们认识自然、改造自然、利用大自然的最重要的工具之一。它源于实际,在实践中丰富,发展,完善,所以能应用于诸多实践。数学证明了的命题,还要在实践中经受检验,加以提炼,深化提高。

历史证明,仅仅有经验的累积,还不能上升为理论,构成系统的科学。古埃及丰富的几何知识的积累,一经与古希腊的形式逻辑相结合,便使几何学光照环宇,成了最早成熟的科学典范。这里起作用的,是严格的逻辑证明。只有经过严格的逻辑证明,才能使我们从观察到的事物的表面的、片段的、偶然的、不相联系的状态中,通过自觉的主观能动作用,抓住客观事物的本质,上升为一般理论,使我们发现事物的内在联系,得出具有规律性、普遍性的结果,从而使数学具有高度的抽象性和广泛的应用性。

直观和推理 实物是最好的教具,其次是模型,再其次是图形。但实物和模型难能要有就有,因此,图形在教学上起重要作用。几何图形的直观能化抽象为具体,往往是启发抽象思维的有力工具。但图形无论画得如何准确,也无法代替逻辑思维。直观不一定可靠,还往往和实际情况不符,甚至相反。而且复杂的问题,直观就无能为力。所以,尽管直观和实验对我们获得感性认识起重要作用,证明命题还主要靠逻辑推理。

关于命题证明 定义,公理,定理,都是命题。命题由两部分组成。第一部分称前提或假设,第二部分称结论。前者表明全部已知条件,后者表明由这些条件必然得出的事实。

前提不能互相矛盾,否则命题毫无意义。

数学上的命题常写成假言命题的形式,即

若 P , 则 Q ; 或简写作 $P \Rightarrow Q$ (P 蕴含 Q)。在命题“平行四边形的对角线互相平分”中,平行四边形是已知条件,对角线互相平分是要证明的结论。若将它写成假言推理的形式,就成:“若一四边形是平行四边形,则其两条对角线互相平分”。无论写成这两种形式的哪一种,都算作抽象命题。读者在证明之先,要先将它具体化。写成

“设四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC, AD \parallel BC, O$ 是 AC, BD 的交点.

求证 $AO=OC, BO=OD$.”

然后再进行证明.

命题不一定是真的,即不一定成立.真命题称为定理.

所谓数学证明,实际上是由假设经过推理以得出结论.推理的每一步都要求言必有据.每次都要言必有据,逐步深入.倘若向回追溯,穷根究底,势必山穷水尽.为了解脱这种困境,古希腊哲学家把最原始的依据称作公设或公理,约定承认其真确,称之为自明之理,绝大多数是经过亿万次实践,其真实性是毋庸置疑的.这办法一直为数学界所沿用.其实,欧几里得的第五公设就不是自明的.在本书里,我们把基础放在中学的几何学,公理基础的研究放在附录一.

证命题时,一定要确切理解题意,给了我们什么条件,要我们得出什么结论,并在初学时就要求学会简洁、明白地写出.这样才知道从哪里出发,目标在何方.然后才谈得上如何去证明.

§ 1.3 命题的四种变化

我们来介绍两个名词,一个叫命题的换位,即把一个命题的前提和结论互换其地位,前提变为结论,结论变为前提.换位以后的命题称为原命题的逆命题.因而,逆命题的逆命题就变回为原命题,二者互为逆命题.

设原命题为“若 P 则 Q ”,则逆命题为“若 Q 则 P ”.以符号表达,原命题是 $P \Rightarrow Q$;逆命题是 $Q \Rightarrow P$.

另一个名词叫做命题的换质,即把命题的两部分同时加以否定,至于地位则保持不变.换质以后的命题称为原命题的否命题.否定的否定就是肯定,因而否命题的否命题就变回为原命题,二者互为否命题.

否定 P, Q (即 P, Q 的反面)记为 $\bar{P}, \bar{Q}$. 所以,否命题以符号表