150

新高考150分系列丛书

甘肃省教育科学研究所编

数学

（修订版）

SHUXUE

兰州大学出版社

再版序言

1994年高考课目分组改革之初，甘肃省教育科学研究所即紧紧抓住这一重大课题，组织力量编写了《新高考150分系列丛书》(含语文、数学、英语、政治、历史、物理、化学)，由兰州大学出版社出版发行。丛书在同类图书激烈竞争的市场上，得到省内外广大师生的充分认可，曾多次重印，供不应求。但是两年来高考改革实践又出现了许多新情况和新问题，鉴于此，甘肃省教育科学研究所在认真分析研究1995年和1996年高考试题的基础上，对原书进行了大幅度的修改和完善。读了修订书稿，我觉得丛书有以下三个突出特点：

一、在省级教研部门的策划下，汇聚教研、教学和考试多方面专家的智慧，发挥各方优势，协同研讨，集体创作，使丛书既有较强的科研内涵，又密切联系考生复习实际和考试改革的前沿变化规律，信息全面丰富，使科学性、实用性和针对性得到有机融合。丛书包含了两年来各方面专家来自考试研究和教学实践的成果精华。

二、丛书以培养考生能力技巧为核心，构建了科学高效的指导与训练体系。从典型题例的思路点拨到练习的落实检查，由专题的集中突破到综合的训练贯通、模拟实践，导练结合，环环相扣，很切合学生复习需要和认知规律。各学科在保持体例基本一致的同时，还突出了各自的设计特色。

三、丛书一改题海战的弊端，进一步增强了针对性。各分册紧扣教学大纲和最新考试说明的要求，针对学生两年来高考中的难点和疑点，以对1996年高考试题的研究成果为重要参照，体现了各学科教学和高考改革的最新动态和趋势，在全面系统夯实基础知识的同时，突出重点难点、讲求精要实用，着眼于提高学生的解题能力，以适应高考改革的发展趋势与思路。

这套丛书凝聚着教研部门和几十位教师、专家的心血，体现了精益求精的负责精神和创新思想，我相信全体作者的辛勤劳动一定会对使用本丛书的考生大有裨益。

1996.11.1.

目　录

第一单元　集合与函数 ……… (1)
复习内容 ……… (1)
基础训练 ……… (1)
例题解析 ……… (3)
单元测试题 ……… (8)
基础训练答案与提示 ……… (11)
单元测试题答案、解答或提示 ……… (15)
第二单元　幂函数、指数函数和对数函数 ……… (22)
复习内容 ……… (22)
基础训练 ……… (22)
例题解析 ……… (24)
单元测试题 ……… (27)
基础训练答案与提示 ……… (30)
单元测试题答案、解答或提示 ……… (34)
第三单元　三角函数(一) ……… (41)
复习内容 ……… (41)
基础训练 ……… (41)
例题解析 ……… (43)
单元测试题 ……… (45)
基础训练答案与提示 ……… (48)
单元测试题答案、解答或提示 ……… (50)
第四单元　三角函数(二) ……… (53)
复习内容 ……… (53)
基础训练 ……… (53)
例题解析 ……… (55)
单元测试题 ……… (57)
基础训练答案与提示 ……… (60)
单元测试题答案、解答或提示 ……… (62)
第五单元　不等式 ……… (66)
复习内容 ……… (66)
基础训练 ……… (66)
例题解析 ……… (68)
单元测试题 ……… (71)
基础训练答案与提示 ……… (73)

单元测试题答案、解答或提示 …… (75)
第六单元　数列、极限、数学归纳法 …… (78)
复习内容 …… (78)
基础训练 …… (78)
例题解析 …… (80)
单元测试题 …… (84)
基础训练答案与提示 …… (86)
单元测试题答案、解答或提示 …… (87)
第七单元　复数 …… (91)
复习内容 …… (91)
基础训练 …… (91)
例题解析 …… (93)
单元测试题 …… (98)
基础训练答案与提示 …… (100)
单元测试题答案、解答或提示 …… (104)
第八单元　排列、组合、二项式定理 …… (112)
复习内容 …… (112)
基础训练 …… (112)
例题解析 …… (113)
单元测试题 …… (118)
基础训练答案与提示 …… (120)
单元测试题答案、解答或提示 …… (121)
第九单元　直线和平面 …… (124)
复习内容 …… (124)
基础训练 …… (124)
例题解析 …… (126)
单元测试题 …… (129)
基础训练答案与提示 …… (131)
单元测试题答案、解答或提示 …… (133)
第十单元　多面体和旋转体 …… (137)
复习内容 …… (137)
基础训练 …… (137)
例题解析 …… (139)
单元测试题 …… (141)
基础训练答案与提示 …… (143)
单元测试题答案、解答或提示 …… (146)
第十一单元　直线 …… (150)
复习内容 …… (150)
基础训练 …… (150)

例题解析……(152)
单元测试题……(158)
基础训练答案与提示……(160)
单元测试题答案、解答或提示……(165)
第十二单元　圆锥曲线……(172)
复习内容……(172)
基础训练……(172)
例题解析……(174)
单元测试题……(183)
基础训练答案与提示……(186)
单元测试题答案、解答或提示……(187)
第十三单元　参数方程和极坐标……(193)
复习内容……(193)
基础训练……(193)
例题解析……(195)
单元测试题……(202)
基础训练答案与提示……(204)
单元测试题答案、解答或提示……(206)
第十四单元　综合测试题……(210)
综合测试题(一)……(210)
综合测试题(二)……(212)
综合测试题(三)……(215)
综合测试题(四)……(217)
综合测试题(五)……(219)
综合测试题(一)答案、解答或提示……(222)
综合测试题(二)答案、解答或提示……(226)
综合测试题(三)答案、解答或提示……(230)
综合测试题(四)答案、解答或提示……(233)
综合测试题(五)答案、解答或提示……(237)
第十五单元　模拟检测题……(242)
模拟检测题(一)……(242)
模拟检测题(二)……(244)
模拟检测题(一)答案及评分标准……(247)
模拟检测题(二)答案及评分标准……(250)
附：模拟检测题(一)选择题、填空题解答或提示……(256)
模拟检测题(二)选择题、填空题解答或提示……(258)

第一单元　集合与函数

复　习　内　容

集合. 子集、交集、并集、补集.

映射. 函数(函数的记号、定义域、值域).

函数的单调性. 函数的奇偶性.

反函数. 互为反函数的函数图象间的关系.

基　础　训　练

一、选择题[①]

1. 设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,集合 $A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{3,5\}$,则(C)

(A)$I=A\cup B$　　(B)$I=\overline{A}\cup B$　　(C)$I=A\cup\overline{B}$　　(D)$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

2. 已知全集 $I=N$,集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in N\}$,$B=\{x\mid x=4n,n\in N\}$,则(C)

(A)$I=A\cup B$　　(B)$I=\overline{A}\cup B$　　(C)$I=A\cup\overline{B}$　　(D)$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

3. 已知 I 为全集,集合 $M,N\subset I$,若 $M\cap N=N$,则(B)

(A)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B)$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(C)$M\supseteq\overline{N}$　　(D)$M\subseteq\overline{N}$

4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+4x-m=0\}$,集合 $B=\{x\mid -x^2+5x+m=0\}$,则 A 中元素的个数为奇数时,$A\cap B=$(D)

(A)$\{-2\}$　　(B)$\{1\}$　　(C)$\{4\}$　　(D)$\varnothing$

5. 已知集合 $A=\{x\mid \dfrac{4-x}{x+3}>0\}$,集合 $B=\{x\mid 2x+3p=0\}$,且 $B\subseteq A$,则实数 P 的取值范围是(A)

(A)$(-2\frac{2}{3},2)$　　(B)$(-3,2)$　　(C)$(-8,2)$　　(D)$(1\frac{1}{3},1)$

6. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$,集合 $A=\{(x,y)\mid \dfrac{y}{x}=-1\}$,$B=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$,则 $\overline{A\cup B}=$(B)

(A)$(0,0)$　　(B)$\{(0,0)\}$　　(C)$\varnothing$　　(D)$\{(x,y)\mid x+y=0\}$

7. 从自然数 1—10 这 10 个数中任取两个数相加,得到的和作为集合 M 的元素,则 M 的非空真子集共有(　　)　3～19　17

(A)$2^{10}-1$ 个　　(B)$2^{10}-2$ 个　　(C)$2^{17}-2$ 个　　(D)$2^{19}-2$ 个

8. 已知 $f(x)$ 的定义域为$[0,1)$,则 $f(2x^2-1)$ 的定义域是(　　)

---

① 说明:本书中的选择题,均为"四选一"的单选题,即各小题给出的四个选项中,只有一个是正确的.

(A)$(-1,1)$　　(B)$[0,1)$

(C)$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　(D)$(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

9. 函数 $f(x)=\sqrt{-3x^2+2x+1}$ 的值域是(　　)

(A)$(-\infty,0]$　　(B)$[0,+\infty)$　　(C)$[0,\frac{2}{3}\sqrt{3}]$　　(D)$[0,1]$

10. 已知 $f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+1}{x^2}+1$，则 $f(x)=$(　　)

(A)x^2+2x-3　　(B)x^2+2x+3　　(C)x^2-2x-3　　(D)x^2-2x+3

11. 已知 $f(x)=3|x|+2$，$g(x)=3x-4$，若 $f[p(x)]=g(x)$，则 $p(5)$ 的值是(　　)

(A)-3 或 3　　(B)-7 或 7　　(C)11 或 17　　(D)3

12. 函数 $y=f(x)$ 的反函数记为 $f^{-1}(x)$，

① 若 $f(x)=5x+2$，则 $f^{-1}[f(x)]=-x$；

② 若 $f(x)=2^x\ (x<0)$，则 $f^{-1}(x)=\log_2 x\ (0<x<1)$；

③ 若 $f(x)=\sqrt{x-1}+2\ (x\geqslant 1)$，则 $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1\ (x\geqslant 1)$；

④ 若 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}(x\neq 2)$，则 $f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{2x-1}(x\neq\frac{1}{2})$.

这四个命题中，正确的命题是(　　)

(A)①　　(B)②　　(C)②，③　　(D)③，④

13. 已知四个函数：①$f_1(x)=x^2+1$；②$f_2(x)=\lg(1-x)+\lg(1+x)(|x|<1)$；③$f_3(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$；④$f_4(x)=\frac{\sin x-\cos x+2}{\sin x+\cos x+1}$. 判断它们的奇偶性，正确的结论是(　　)

(A)2 个偶函数，2 个奇函数

(B)2 个偶函数，1 个奇函数，1 个非奇非偶函数

(C)2 个奇函数，1 个偶函数，1 个非奇非偶函数

(D)1 个奇函数，1 个偶函数，2 个非奇非偶函数

14. 函数 $f(x)=x^2-2|x+3|$ 的递增区间是(　　)

(A)$\varnothing$　　(B)$(-\infty,-3)$　　(C)$(1,+\infty)$　　(D)$(-3,+\infty)$

15. 已知 $f(x)=x+1$，则 $f(x+1)$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线是(　　)

(A)$x+y-6=0$　　(B)$x-y-6=0$　　(C)$x+y+2=0$　　(D)$x-y-2=0$

16. 已知 $x^2+2y^2+x=0$，则 x^2+y^2 的最大值 m 和最小值 n 分别是(　　)

(A)10, 1　　(B)3, 1　　(C)3, 0　　(D)1, 0

17. 设有三个函数，第二个函数是第一个函数的反函数，第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，若第一个函数是 $y=f(x)$，则第三个函数是(　　)

(A)$y=-f(-x)$　　(B)$y=-f(x)$　　(C)$y=-f^{-1}(x)$　　(D)$y=-f^{-1}(-x)$

二、填空题

18. 设全集 $I=R$，集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，集合 $B=\{x||x|-y=2,y\in A\}$，则 $\overline{A}=$ ________，$\overline{B}=$ ________，$\overline{A}\cup B=$ ________，$A\cap\overline{B}=$ ________，$A\cup\overline{B}=$ ________，$\overline{A}\cap\overline{B}=$ ________，$\overline{A\cap B}=$ ________.

19. ① 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2-x+6}}{2-|x|}+\log_{(x^2-1)}(16-x^2)$ 的定义域是__________；

② 函数 $g(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ 的值域是__________；③ 函数 $h(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数 $h^{-1}(x)$ 是__________；判断 $h^{-1}(x)$ 的单调性：它是__________函数；判断 $h^{-1}(x)$ 的奇偶性：它是__________函数.

20. (1) 若函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有极大值5，且 $f(-1)=f(3)=0$，则 $f(x)$ 的解析式是__________；(2) 若函数 $y=g(x)$ 是最小正周期为6的奇函数，当 $g(-1)=1$ 时，$g(-5)$ 的值是__________，$g(7)$ 的值是__________.

21. 已知函数 $y=f(x)$，

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，且在区间 $[-2,2]$ 上为减函数，满足 $f(a-4)+f(10-a^2)<0$，则实数 a 的取值范围是__________；

(2) 若 $f(x)$ 是定义域为实数集的奇函数，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，则 $f(x)$ 的解析式是__________.

22. ① 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ 的递减区间是__________；② 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$ 的递增区间是__________；③ 若函数 $f(x)$ 在实数集上是减函数，则函数 $f(|x+3|)$ 的递增区间是__________.

23. 已知函数 $f(x)=x^2-2mx+m^2+2\ (x\in[1,5])$，则 $f(x)$ 的最大值 $[f(x)]_{\max}=$__________，最小值 $[f(x)]_{\min}=$__________.

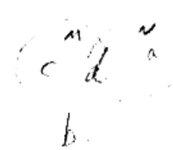
24. 已知正三角形 ABC，三点 R、P、Q 分别在 AB、BC、AC 上，且 $BP:CQ:AR=1:2:3$，$AB=1$. ① 设 $PB=x$，则 $\triangle PQR$ 的面积 $S=f(x)$ 的解析式是 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(11x^2-6x+1)$；② $S=f(x)$ 的定义域是__________；③ 当 $PB=$__________时，$\triangle PQR$ 的面积最小，最小值是__________.

例　题　解　析

例1　已知全集 $I=\{a,b,c,d\}$，集合 $M,N\subset I$，且 $M\cap N=\{d\}$，$M\cap\overline{N}=\{c\}$，$\overline{M}\cap\overline{N}=\{b\}$，求集合 M、N.

解　由已知
$$\left.\begin{array}{l}M\cap N=\{d\}\Rightarrow d\in M\text{ 且 }d\in N\\ M\cap\overline{N}=\{c\}\Rightarrow c\in M\text{ 且 }C\notin N\\ \overline{M}\cap\overline{N}=\{b\}\Rightarrow b\notin M\text{ 且 }b\notin N\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}c,d\in M,b\notin M;\\ d\in N,b\notin N;\\ \text{剩余 }a.\end{array}\right.$$

若
$$\left.\begin{array}{l}a\in M\text{ 且 }a\in N\\ a\notin M\text{ 且 }a\notin N\\ a\in M\text{ 且 }a\notin N\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a\in M\cap N,\\ a\in\overline{M}\cap\overline{N},\\ a\in M\cap\overline{N}.\end{array}\right.$$
这都与已知矛盾.



故　$a\notin M$，　且 $a\in N$.

综上所述：所求集合 $M=\{c,d\}$，$N=\{a,d\}$.

例2　求函数 $f(x)=\sqrt{\left|\log_a\left(\frac{x}{2}\right)\right|-1}$ 的定义域.

分析　所求定义域是不等式 $\frac{x}{2}>0$ 和 $\left|\log_a\left(\frac{x}{2}\right)\right|-1\geqslant 0$ 的解集的交集.

解　解不等式组$\begin{cases}\dfrac{x}{2}>0 & ①,\\ |\log_a(\dfrac{x}{2})|-1\geqslant 0 & ②.\end{cases}$

由①式,得:$x>0$;由②式,得:(Ⅰ)$\log_a(\dfrac{x}{2})\geqslant 1$,或(Ⅱ)$\log_a(\dfrac{x}{2})\leqslant -1$.

由(Ⅰ)式得:$\log_a(\dfrac{x}{2})\geqslant \log_a a$.

当$a>1$时,$\dfrac{x}{2}\geqslant a$,则$x\geqslant 2a$;

当$0<a<1$时,$\dfrac{x}{2}\leqslant a$且$x>0$,则$0<x\leqslant 2a$.

由(Ⅱ)式得:$\log_a(\dfrac{x}{2})\leqslant \log_a(\dfrac{1}{a})$.

当$a>1$时,$\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{1}{a}$且$x>0$,则$0<x\leqslant\dfrac{2}{a}$;

当$0<a<1$时,$\dfrac{x}{2}\geqslant\dfrac{1}{a}$,则$x\geqslant\dfrac{2}{a}$.

综上所述:$a>1$时,函数$f(x)$的定义域为$(0,\dfrac{2}{a}]\cup[2a,+\infty)$;$0<a<1$时,函数$f(x)$的定义域为$(0,2a]\cup[\dfrac{2}{a},+\infty)$.

评述　解含有参数的问题,要注意两点,一是对参数要进行分类讨论,二是要综合,并分类回答.

例3　已知函数$y=f(x)$.(1)若$f(x)$的定义域是$[-1,1]$,求函数$f(x-\dfrac{2}{x})$的定义域;(2)若函数$f(x-\dfrac{1}{2})$的定义域是$[-1,1]$,求函数$f(3x+1)$的定义域.

解　(1)令$u=x-\dfrac{2}{x}$,则$f(x-\dfrac{2}{x})=f(u)$.$\because f(x)$的定义域是$[-1,1]$,

$\therefore u\in[-1,1]$,即$-1\leqslant x-\dfrac{2}{x}\leqslant 1$,由此不等式得:

$-2\leqslant x\leqslant -1$,或$1\leqslant x\leqslant 2$.

$\therefore$函数$f(x-\dfrac{2}{x})$的定义域是$[-2,-1]\cup[1,2]$.

(2)在函数$f(x-\dfrac{1}{2})$中,$-1\leqslant x\leqslant 1$,则$-\dfrac{3}{2}\leqslant x-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$,由此可知,$-\dfrac{3}{2}\leqslant 3x+1\leqslant\dfrac{1}{2}$,解此不等式得:$-\dfrac{5}{6}\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{6}$.

$\therefore$函数$f(3x+1)$的定义域是$[-\dfrac{5}{6},-\dfrac{1}{6}]$.

例4　求函数$y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$的单调区间,并加以证明.

解　解不等式$-x^2+3x+4\geqslant 0$得$-1\leqslant x\leqslant 4$,

$\therefore$函数$y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$的定义域是$[-1,4]$.

设　$u=-x^2+3x+4=-(x-1\dfrac{1}{2})^2+6\dfrac{1}{4}$,则$u$在区间$[-1,1\dfrac{1}{2}]$上为增函数,在区间$[1\dfrac{1}{2},4]$上为减函数.

又 ∵ 函数 $y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$ 的底数大于 1.

∴ 它在$[-1,1\frac{1}{2}]$上单调递增，在$[1\frac{1}{2},4]$上单调递减.

证明函数 $y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$ 在区间$[-1,1\frac{1}{2}]$上是增函数：

设 $t=\sqrt{-x^2+3x+4}\geqslant 0$，则 $t^2=-x^2+3x+4$.

任取 $x_1,x_2\in[-1,1\frac{1}{2}]$，且 $x_1<x_2$，则 $t_1^2=-x_1^2+3x_1+4$，$t_2^2=-x_2^2+3x_2+4$，

$t_2^2-t_1^2=(x_2-x_1)[3-(x_2+x_1)]$，

∵ $x_1<x_2$，∴ $x_2-x_1>0$；

又 $x_1,x_2\in[-1,1\frac{1}{2}]$，$x_1<1\frac{1}{2}$，$x_2<1\frac{1}{2}$，$x_1+x_2<3$，

∴$3-(x_2+x_1)>0$；

∴ $t_2^2-t_1^2>0$，即 $t_2^2>t_1^2$. 而 $y_2=3^{t_2}$，$y_1=3^{t_1}$，∴$y_2>y_1$，

∴ 函数 $y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$ 在区间$[-1,1\frac{1}{2}]$上是增函数，区间$[-1,1\frac{1}{2}]$是函数 $y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$ 的单调递增区间.

同理可证：函数 $y=3^{\sqrt{-x^2+3x+4}}$ 在区间$[1\frac{1}{2},4]$上是减函数，区间$[1\frac{1}{2},4]$是它的单调递减区间.

例 5 已知函数 $f(x)=x^2+px+q(x\in[-2,2])$. (1) 求它的最大值和最小值；(2) 若 $-\frac{p}{2}$ 在区间$[0,2]$上的最大值是 10，最小值是$\frac{15}{4}$，求 p 和 q 的值.

解 $y=f(x)=x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$；

对称轴：$x=-\frac{p}{2}$；定义域：$[-2,2]$.

(1) 求最大值 y_{max} 和最小值 y_{min}：由二次函数的图象可知，

① 若 $-\frac{p}{2}>2$，即 $p<-4$ 时，则 $f(-2)>f(2)$，如图 1－1－(1).

∴ $y_{max}=f(-2)=4-2p+q$，$y_{min}=f(2)=4+2p+q$.

② 若 $0\leqslant-\frac{p}{2}\leqslant 2$，即 $-4\leqslant p\leqslant 0$，则 $f(-2)>f(2)>f(-\frac{p}{2})$；如图 1－1－(2)

∴ $y_{max}=f(-2)=4-2p+q$，$y_{min}=f(-\frac{p}{2})=q-\frac{p^2}{4}$.

③ 若 $-2\leqslant-\frac{p}{2}<0$，即 $0<p\leqslant 4$，则 $f(2)>f(-2)>f(-\frac{p}{2})$；如图 1－1－(3)

∴$y_{max}=f(2)=4+2p+q$， $y_{min}=f(-\frac{p}{2})=q-\frac{p^2}{4}$.

④ 若 $-\frac{p}{2}<2$，即 $p>4$，则 $f(2)>f(-2)$；如图 1－1－(4).

∴$y_{max}=f(2)=4+2p+q$， $y_{min}=f(-2)=4-2p+q$.

综合：

$$y_{max}=\begin{cases}f(-2)=4-2p+q & (p\in(-\infty,0],x\in[-2,2])；\\ f(2)=4+2p+q & (p\in(0,+\infty),x\in[-2,2])；\end{cases}$$

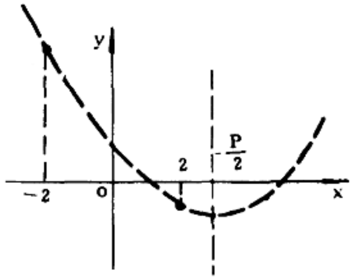


图 1－1－(1)

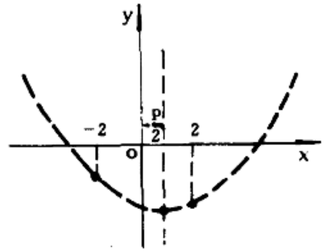


图 1－1－(2)

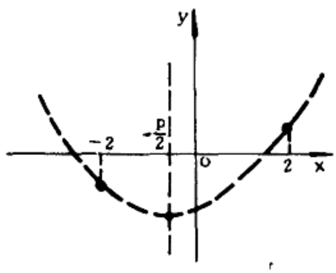


图 1－1－(3)

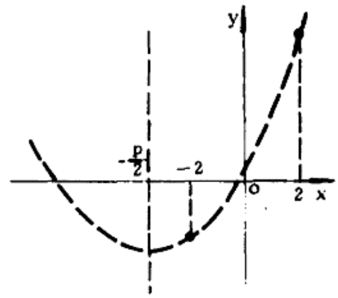


图 i－1－(4)

$$y_{\min}=\begin{cases}f(2)=4+2p+q \quad (p\in(-\infty,-4),x\in[-2,2]);\\ f(-\dfrac{p}{2})=q-\dfrac{p^2}{4} \quad (p\in[-4,4],x\in[-2,2]);\\ f(-2)=4-2p+q \quad (p\in(4,+\infty),x\in[-2,2]).\end{cases}$$

(2) 求 p、q 的值：

$\because -\dfrac{p}{2}\in[0,2]$ 时，$y_{\max}=10$，$y_{\min}=\dfrac{15}{4}$，再由 ② 知，

$\begin{cases}4-2p+q=10,\\ q-\dfrac{p^2}{4}=\dfrac{15}{4}.\end{cases}$ 解此方程组，得：$\begin{cases}p=-1,\\ q=4;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=9\\ q=24\end{cases}$（舍去）.

$\therefore p$ 的值是 -1，q 的值是 4.

例 6 某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴. 设淡水鱼的市场价格为 x 元／千克，政府补贴为 t 元／千克. 根据市场调查，当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系：

$P=1000(x+t-8)\ (x\geqslant 8,t\geqslant 0)$，

$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\ (8\leqslant x\leqslant 14)$.

当 $P=Q$ 时市场价格称为市场平衡价格.

(1) 将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域；

(2) 为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元？（1995 年高考试题）

解 (1) 依题意,得:$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$,

化简,得:$5x^2+8(t-10)x+4(t^2-16t+70)=0$ ①,

判别式 $\triangle=[8(t-10)]^2-4\times5\times4(t^2-16t+70)=16(50-t^2)$,

当 $\triangle\geqslant0$,即 $16(50-t^2)\geqslant0$ 时,由 ① 式得:

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

由 $\triangle\geqslant0$、$t\geqslant0$,$8\leqslant x\leqslant14$ 得不等式组:

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant14;\end{cases}$$

或 $$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant14.\end{cases}$$

解不等式(Ⅰ)得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$,不等式组(Ⅱ)无解.

故 所求的函数式为 $x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\,(t\in[0,\sqrt{10}])$.

(2) 为使 $x\leqslant10$,应有 $8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant10$,

化简,得:$t^2+4t-5\geqslant0$,

解此不等式,得:$t\geqslant1$ 或 $t\leqslant-5$(舍去,$\because t\geqslant0$).

$\therefore$ 由 $t\geqslant1$ 知,政府补贴至少为每千克 1 元.

例 7 已知 a、b、c 是实数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,$g(x)=ax+b$,当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$|f(x)|\leqslant1$.

(Ⅰ) 证明:$|c|\leqslant1$;

(Ⅱ) 证明:当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$|g(x)|\leqslant2$;

(Ⅲ) 设 $a>0$,当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$g(x)$ 的最大值为 2,求 $f(x)$.(1996 年高考试题)

证明 (Ⅰ):由已知,当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,$|f(x)|\leqslant1$,取 $x=0$,得 $|f(0)|=|a\cdot0^2+b\cdot0+c|\leqslant1$,

即 $|c|=|f(0)|\leqslant1$,

$\therefore\quad|c|\leqslant1$.

证明 (Ⅱ):

证法一 当 $a>0$ 时,$g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,$\therefore g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$,

$\because|f(x)|\leqslant1\ (-1\leqslant x\leqslant1)$,$|c|\leqslant1$,

$\therefore g(1)=a+b=f(1)-c\leqslant|f(1)|+|c|\leqslant2$,

$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\geqslant-(|f(-1)|+|c|)\geqslant-2$,

$\therefore\quad|g(x)|\leqslant2$;

当 $a<0$ 时,$g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数,$\therefore g(-1)\geqslant g(x)\geqslant g(1)$,

$\because|f(x)|\leqslant1\ (-1\leqslant x\leqslant1)$,$|c|\leqslant1$,

$\therefore g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\leqslant|f(-1)|+|c|\leqslant2$,

$g(1)=a+b=f(1)-c\geqslant-(|f(1)|+|c|)\geqslant-2$，

$\therefore\quad |g(x)|\leqslant 2$；

当 $a=0$ 时，$g(x)=b, f(x)=bx+c$.

$\because -1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore |g(x)|=|f(1)-c|\leqslant|f(1)|+|c|\leqslant 2$.

综上所述得：$|g(x)|\leqslant 2$.

证法二 由 $x=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$，得

$$g(x)=ax+b=a[(\frac{x+1}{2})^2-(\frac{x-1}{2})^2]+b(\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2})$$

$$=[a(\frac{x+1}{2})^2+b(\frac{x+1}{2})+c]-[a(\frac{x-1}{2})^2+b(\frac{x-1}{2})+c]$$

$$=f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x-1}{2})$$，

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $0\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$，$-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 0$，

根据含绝对值的不等式的性质，得：

$$|f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x-1}{2})|\leqslant|f(\frac{x+1}{2})|+|f(\frac{x-1}{2})|\leqslant 2.$$

$\therefore\quad |g(x)|\leqslant 2$.

（Ⅲ）$\because a>0$，$g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，当 $x=1$ 时取得最大值 2，即

$g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2\qquad$ ①，

$\because -1\leqslant f(0)=f(1)-2\leqslant 1-2=-1$，$\therefore c=f(0)=-1$.

$\because$ 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant -1$，即 $f(x)\geqslant f(0)$，根据二次函数的性质，直线 $x=0$ 为 $f(x)$ 的图象的对称轴，由此得 $-\dfrac{b}{2a}=0$，即 $b=0$. 由 ① 得 $\quad a=2$.

$\therefore f(x)=2x^2-1$.

单 元 测 试 题

一、选择题（本大题共 15 小题；第(1)－(10) 题每小题 4 分，第(11)－(15) 题每小题 5 分，共 65 分）

(1) 设全集 $I=R$，集合 $A=\{x|x=y^2+2;x,y\in R\}$，集合 $B=\{y|x^2=y-1,x,y\in R\}$，则(　　)

(A) $A\cap B=\varnothing$　(B) $A\cup B=I$　(C) $A\supset B$　(D) $\overline{A}\supset\overline{B}$

(2) 设 S,T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T, T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup T=$(　　)

(A) X　(B) T　(C) $\varnothing$　(D) S

(3) 函数 $y=x+\sqrt{x^2-5x-6}$ 的值域是(　　)

(A) $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$　(B) $(-\infty,-2\frac{1}{2}]\cup[6,+\infty)$

(C) $[-1,2\frac{1}{2}]\cup[6,+\infty)$　(D) $(-\infty,+\infty)$

(4) 已知实系数一次函数 $f(x)$ 使 $f[f(f(x))]=27x+26$ 成立，则 $f(x)=$(　　)

(A) $3x+2$　　(B) $3x-2$　　(C) $-3x+2$　　(D) $-3x-2$

(5) 已知 $F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)\ (x\neq 0)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $f(x)$(　　)

(A) 是偶函数　　(B) 是奇函数

(C) 是偶函数，也是奇函数　　(D) 不是偶函数，也不是奇函数

(6) 函数 $f(x)=-3x^2+4x(x\in[1,2])$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=$(　　)

(A) $\frac{2+\sqrt{4-3x}}{3}\ (x\in[1,2])$　　(B) $\frac{2+\sqrt{4-3x}}{3}\ (x\in[-4,1])$

(C) $\frac{2-\sqrt{4-3x}}{3}\ (x\in[1,2])$　　(D) $\frac{2-\sqrt{4-3x}}{3}\ (x\in[-4,1])$

(7) 若一次函数 $f(x)=kx+3k+1$ 在区间 $[-2,1]$ 上总是正值，则 k 的取值范围是(　　)

(A) $(-\frac{1}{4},+\infty)$　　(B) $(0,+\infty)$　　(C) $(-\infty,0)$　　(D) $(-\frac{1}{4},0)\cup(0,+\infty)$

(8) 设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，且 $f(x)+g(x)=\frac{3x+2}{x^2-1}$，则 $f(x)=$(　　)

(A) $\frac{-3x+2}{x^2+1}$　　(B) $\frac{-3x}{x^2-1}$　　(C) $\frac{2}{x^2-1}$　　(D) $\frac{2x^2+1}{3x^2-2}$

(9) 已知函数 $f(x)=\frac{x}{3}+a$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=bx+6$，则点 (a,b) 所在的直线的方程是(　　)

(A) $3x-2y+1=0$　　(B) $2x-3y+5=0$

(C) $x-4y+3=0$　　(D) $x+y-1=0$

(10) 在图 1－2 的各图中，函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ x^2 & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象是(　　)

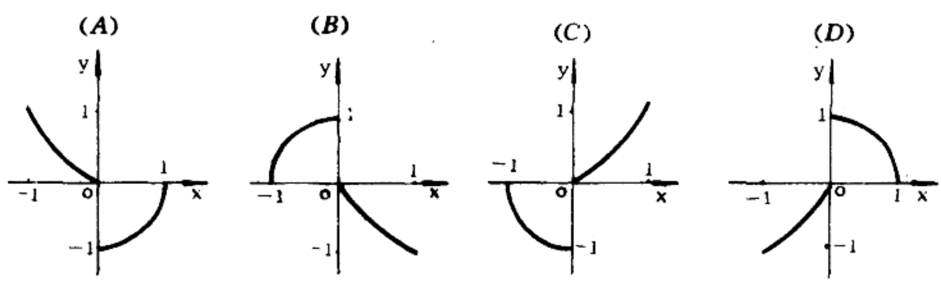


图 1－2

(11) 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是(　　)

(A) $(0,1)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(0,2)$　　(D) $[-2,+\infty]$

(12) 函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是(　　)

(A) $(-1,1)$　　(B) $[-1,0]$　　(C) $[0,1]$　　(D) $[-1,0)\cup(0,1]$

(13) 对于函数 $f(x)=\log_3 x$，下列不等式成立的是(　　)

(A) $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f(\frac{x_1+x_2}{2})$　　(B) $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f(\frac{x_1+x_2}{2})$

(C) $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$　　(D) $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$

(14) 已知 $f(x)=8+2x-x^2$，$g(x)=f(2-x^2)$，那么 $g(x)$ 在区间(　　)

(A) $(-1,0)$ 上是减函数　　(B) $(0,1)$ 上是减函数

(C) $(-2,0)$ 上是增函数　　(D) $(0,2)$ 上是增函数

(15) 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(\frac{b}{a})=f(b)-f(a)$，且 $f(\frac{\sqrt{3}-1}{2})=5$，则 $f(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ 的值是(　　)

(A) -10　　(B) -5　　(C) 5　　(D) 10

二、填空题(本大题共 5 小题；每小题 4 分，共 20 分)

(16) 已知集合 $A=\{x\mid x^2-a(x-a)-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_{\sqrt{3}}(x^2-5x+7)=0\}$，$C=\{x\mid \log_3(x^2+2x+1)=2\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，则 a 的值是________，集合 $A=$________.

(17) 已知函数 $y=f(x)$.

① 若 $f(x)$ 满足条件 $f(5-x)=f(5+x)$，且 $f(x)=0$ 时有六个实数根，则这六个实数根之和等于________；

② 若 $f(x)$ 对于所有非零实数都有 $f(x)+\frac{1}{2}f(\frac{1}{x})=2x$，则适合方程 $f(x)=f(-x)$ 的根有________个，即________.

(18) 已知函数 $f(x)=f(\frac{1}{x})\cdot\lg x+1$，则其解析式 $f(x)=$________，$f(100)=$________.

(19)① 已知函数 $y=\lg(3^x-9)-\frac{x}{3-|x|}$ 的定义域是________；② 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，则函数 $y=f(a^x)$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的定义域是________.

(20) 若方程 $2ax^2-x-1=0$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有且仅有一个实数根，则函数 $y=\log_a(x-3x^2)$ 的单调区间是________.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 65 分)

(21)(10 分) 已知 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的任一函数，且满足 $F(x)=f(x)+f(-x)$，①$F(x)$ 是奇函数还是偶函数？② 若 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ $(a>0)$ 上是减函数，它在区间 $[-b,-a]$ 上是增函数还是减函数？

(22)(7 分) 设 $f(x)=\begin{cases}-x & (x\leqslant 0)\\ x^2+1 & (x>0)\end{cases}$，　在平面直角坐标系中画出函数 $y=f(x-1)$ 的图象(图形).

(23)(12 分) 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，证明：①$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；② 对于不小于 3 的正整数 n，都有 $f(n)>\frac{n}{n+1}$.

(24)(12 分) 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$. ① 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式；

② 对自然数 k，求集合 $M_k = \{a \mid$ 使方程 $f(x) = ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实数根$\}$.

(25)(12 分) 给定实数 $a, a \neq 0$，且 $a \neq 1$，设函数 $y = \dfrac{x-1}{ax-1}$ ($x \in R$，且 $x \neq \dfrac{1}{a}$).

证明：① 经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴；② 这个函数的图象关于直线 $y = x$ 成轴对称图形.

(26)(12 分) 设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的奇函数，当 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) = \dfrac{2^x}{4^x+1}$.

① 求 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上的解析式；② 证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数；③ 当 $\dfrac{2}{5} < a < \dfrac{1}{2}$ 时，求关于 x 的不等式 $f(x) \geqslant a$ 在 $(0,1)$ 内的解集.

基础训练答案及提示

一、选择题

题名	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
答案	C	C	B	D	A	B	C	D	C	D	A	B	B	C	A	D	A

提示：

1. $\overline{A} = \{2,4,6\}, \overline{B} = \{1,2,4,6,7\}, A \cup \overline{B} = \{1,3,5,7\} \cup \{1,2,4,6,7\} = I$.

2. $\because B \subset A, \overline{A} \subset \overline{B}$；(或画图示意，易解)

3. 由 $M \cap N = N$ 知，$N \subseteq M$，则 $\overline{M} \subseteq \overline{N}$.

4. $\because A$ 中元素个数为奇数时，$x^2 + 4x - m = 0$ 的判别式 $\triangle = 4^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 0$，由此式得 $m = -4$，代入 A 中得 $A = \{-2\}$；把 $m = -4$ 代入 B 中得 $B = \{1,4\}$，

$\therefore A \cap B = \varnothing$.

5. 由 $\dfrac{4-x}{x+3} > 0$ 得 $-3 < x < 4$；由 $2x + 3p = 0$ 得 $x = -\dfrac{3}{2}p$；$\because B \subseteq A$，

$\therefore -3 < -\dfrac{3}{2}p < 4$；$\therefore -\dfrac{8}{3} < p < 2$.

6. $\because A$ 中，$x \neq 0$，则 $(0,0) \notin A$；又 $(0,0) \notin B$，$\therefore (0,0) \notin (A \cup B)$，

$\therefore \overline{A \cup B} = \{(0,0)\}$.

7. 从 1—10 这十个数中，任取两数之和，最小的是 $1 + 2 = 3$，最大的是 $9 + 10 = 19$，则集合 M 中共有 17 个元素，其非空真子集共有 $2^{17} - 2$ 个.

8. 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$ 得：$0 \leqslant 2x^2 - 1 < 1$，由此不等式得(Ⅰ)$2x^2 - 1 < 1$ 且(Ⅱ)$2x^2 - 1 \geqslant 0$，解不等式(Ⅰ)得 $-1 < x < 1$；解不等式(Ⅱ)得 $x \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，取(Ⅰ)、(Ⅱ)解集的交集.

9. 对二次三项式配方，得：$f(x) = \sqrt{-3(x-\dfrac{1}{3})^2 + \dfrac{4}{3}} \leqslant \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，又 $f(x) \geqslant 0$，

$\therefore 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

或：令 $f(x) = y$，则 $y = \sqrt{-3x^2 + 2x + 1}$. 对此式两边平方，得：$3x^2 - 2x + (y^2 - 1) = 0$，再由判别式 $\triangle \geqslant 0$，得 $|y| \leqslant \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，又 $y \geqslant 0$，则 $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，即 $0 \leqslant f(x) \leqslant$

$\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

10. 令 $t=\frac{x+1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t-1}$，把此式代入已知式，得：

$$f(t)=\frac{(\frac{1}{t-1})^2+1}{(\frac{1}{t-1})^2}+1=t^2-2t+3, \therefore f(x)=x^2-2x+3.$$

或：$\because f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+1}{x^2}+1=\frac{(x+1)^2-2x}{x^2}+1$

$$=(\frac{x+2}{x})^2-\frac{2(x+1)-2x}{x}+1$$

$$=(\frac{x+1}{x})^2-2\cdot(\frac{x+1}{x})+3,$$

$\therefore f(x)=x^2-2x+3$.

11. 由 $f(x)=3|x|+2$，得 $f[p(x)]=3|p(x)|+2$，又由 $f[p(x)]=g(x)$ 和 $g(x)=3x-4$，得 $f[p(x)]=3x-4$，则 $3|p(x)|+2=3x-4$，即 $|p(x)|=x-2$，

$\therefore p(x)=\pm(x-2)$，$\therefore p(5)=3$ 或 $p(5)=-3$.

12. ① 中，$f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\frac{x-2}{5}$，$\therefore f^{-1}[f(x)]=\frac{(5x+2)-2}{5}=x$，① 的结论错；③、④ 中注意定义域；③ 中 $f^{-1}(x)$ 的定义域应为 $x\geqslant 2$；④ 中 $f^{-1}(x)$ 的定义域应为 $x\neq 1$，且 $f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$，$f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{2+x}{1-x}$，$\therefore$ ④ 中结论也错，② 对.

13. ①、② 是偶函数；③ 是奇函数；④ 是非奇非偶函数，其定义域不是关于原点对称，④ 中的定义域求法如下：

分母：$\sin x+\cos x+1\neq 0\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})+\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\neq 0\Rightarrow 2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\neq 0$，则 $\cos\frac{x}{2}\neq 0$ 或 $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\neq 0$，由此可得 $\frac{x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{x}{2}\neq k\pi-\frac{\pi}{4}$，即 $x\neq 2k\pi+\pi(k\in Z)$ 或 $x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$.

14. $\because f(x)=x^2-2|x+3|=\begin{cases}x^2-2x-6=(x-1)^2-7 & (x\geqslant -3),\\ x^2+2x+6=(x+1)^2+5 & (x<-3).\end{cases}$

由二次函数的图象和函数的定义域知，函数 $f(x)$ 的递增区间为下列不等式组的解集：

$\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x>1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-3,\\ x>-1.\end{cases}$ $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的递增区间为 $x>1$.

15. 由 $f(x)=x+1$ 知 $f(x+1)=(x+1)+1=x+2$. 设点 (x,y) 在曲线 $f(x+1)$ 上，点 (x_0,y_0) 在 $f(x+1)$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线上，则

$\begin{cases}\frac{x+x_0}{2}=2,\\ y_0=y,\\ y=x+2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=4-x & ①\\ y_0=y & ②\\ y=x+2 & ③\end{cases}$ 由 ②、③ 式得 $y_0=x+2$ ④.

① + ④，得：$x_0+y_0-6=0$，$\therefore$ 曲线 $f(x+1)$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线是 $x+y-6=0$.