二十一世纪课程立体化系列教材

高等学校理工类专业

高等数学讲义

GAO DENG SHU XUE

主编 吴赣昌
陈 怡

下册

海南出版社

二十一世纪课程立体化系列教材

高等数学（理工类）立体化教材之

高等数学讲义

下 册

主编　吴赣昌

陈　怡

海南出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学讲义．理工类．下册／吴赣昌，陈怡编．
海口：海南出版社，2005.8
ISBN 7-5443-1312-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①吴…②陈…　Ⅲ．高等数学－高等
学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 042332 号

高等数学讲义（下册）

主　　编：吴赣昌　陈　怡
责任编辑：武　铠
出版发行：海南出版社
电　　话：0898－66814101　　邮政编码：570216
地　　址：海口市金盘开发区建设三横路 2 号
印　　刷：广东省佛山市汾江印刷厂有限公司
开　　本：850×1168 mm　1/32
印　　张：22.75　　字数：60 万字
版　　次：2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5443-1312-3/G・555
定　　价：43.00 元（上、下册）

内 容 提 要

本书参照教育部颁发的高等学校本科理工类专业高等数学课程教学大纲和考研大纲编写，在教学内容和符号表示上都与这两类大纲相适应.

本书分上、下两册出版.下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等.

本书的编写具有以下特点：(1) 书中融入了数学历史与数学文化的教育，使读者能在学习的过程中，窥探微积分这一近代数学中最伟大科学成就的形成、发展的概貌，领略数学文化的丰富多彩；(2) 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想；(3) 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出进一步的总结；(4) 充分考虑教学的需要，选编了题型较为丰富的例题，除精选部分例题放入本书外，其余放入了配套的教学（学习）系统光盘中，供师生选用. 此外，还在每小节后配有课堂练习，供教师教学选用.

高等数学立体化教材是在面向21世纪课程的教改实践中产生的，它在教育技术与信息技术相结合方面具有突出的特点，本书是高等数学立体化教材之讲义部分，与《高等数学多媒体学习系统》和《高等数学习题集》组成整套立体化教材，配合使用，互为补充. 其内容涵盖了课堂教学、习题课教学、数学实验教学、自学辅导、综合提高等方面，形成教与学的有机结合.

本书可作为高等院校理工类专业的教材或参考书.

目　录

第十一章 无穷级数

第十二章 微分方程

第八章　多元函数微分学

在一至六章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数. 但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量(因变量)与另外多个变量(自变量)的相互依赖关系. 由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上，进一步讨论多元函数的微分学. 讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为有关的概念和方法大都有比较直观的解释，便于理解，而且这些概念和方法大都能自然推广到二元以上的多元函数.

§8.1　多元函数的基本概念

一、平面区域的概念

与数轴上邻域的概念类似，我们引入平面上点的邻域的概念.

设 $P(x_0, y_0)$ 为直角坐标平面上一点，δ 为一正数，称点集

$$\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点 P 的 δ **邻域**，记为 $U_\delta(P)$，或简称为邻域，记为 $U(P)$.

根据这一定义，点 P 的 δ 邻域实际上是以点 P 为圆心、δ 为半径的圆的内部(图 8-1-1).

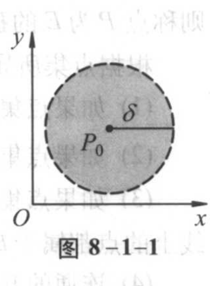

图 8-1-1

下面我们利用邻域来描述平面上点和点集之间的关系.

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点. 则点 P 与点集 E 之间必存在以下

三种关系之一：

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\subset E$, 则称 P 为 E 的**内点**(如图 8-1-2 中的点 P_1).

(2) 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\cap E=\varnothing$, 则称点 P 为 E 的**外点**(如图 8-1-2 中的点 P_2).

(3) 如果点 P 的任意一个邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点，则称点 P 为 E 的**边界点**(如图 8-1-2 中的 P_3).

点集 E 的边界点的全体称为 E 的**边界**.

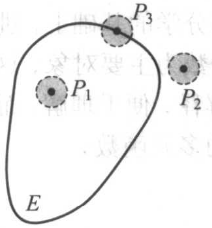

图 8-1-2

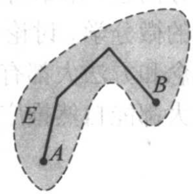

图 8-1-3

根据上述定义可知，点集 E 的内点必属于 E, 而 E 的边界点则可能属于 E 也可能不属于 E.

如果按点 P 的邻近是否有无穷多个点来分类，则有

(1) 如果对于任意给定的 $\delta>0$, 点 P 的去心邻域 $\mathring{U}_\delta(P)$ 内总有点集 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**;

(2) 设点 $P\in E$, 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得

$$U(P)\cap E=\varnothing,$$

则称点 P 为 E 的**孤立点**.

根据点集所属点的特征，可进一步定义一些重要的平面点集.

(1) 如果点集 E 内任意一点均为 E 的内点，则称 E 为**开集**.

(2) 如果点集 E 的余集 $\overline{E}$ 为开集，则称 E 为**闭集**.

(3) 如果点集 E 内的任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E, 则称 E 为**连通集**(图 8-1-3).

(4) 连通的开集称为**区域**或**开区域**.

(5) 开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

(6) 对于点集 E, 如果存在某一正数 K, 使得 $E\subset U_K(O)$, 则称 E 为**有界集**, 其中 O 为坐标原点.

(7) 一个点集如果不是有界集, 就称它为**无界集**.

例如, 点集 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是一区域, 并且是一有界区域(图 8–1–4).

点集 $\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 是一闭区域, 并且是一有界闭区域(图 8–1–5). 而点集 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 是一无界区域(图 8–1–6).

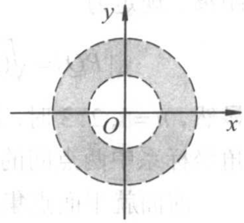

图 8–1–4

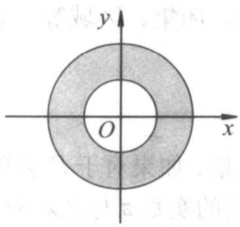

图 8–1–5

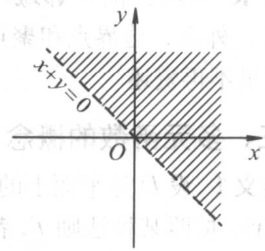

图 8–1–6

二、n 维空间的概念

我们知道, 数轴上的点与实数一一对应, 实数的全体记为 $\mathbf{R}$; 平面上的点与有序数组 (x,y) 一一对应, 有序数组 (x,y) 的全体记为 $\mathbf{R}^2$; 空间中的点与有序数组 (x,y,z) 一一对应, 有序数组 (x,y,z) 的全体记为 $\mathbf{R}^3$. 这样, $\mathbf{R}$、$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 就分别对应于数轴、平面和空间.

一般地, 设 n 为取定的一个自然数, 我们称 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 **n 维空间**, 记为 $\mathbf{R}^n$, 而每个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 **n 维空间的点**, $\mathbf{R}^n$ 中的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 来表示, 即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 数 x_i 称为点 x 的第 i 个

坐标．当所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时，这个点称为 $\mathbf{R}^n$ 的**坐标原点**，记为 O.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离，规定为

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然，$n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、平面直角坐标系及空间直角坐标系中两点间的距离一致.

前面就平面点集所叙述的一系列概念，可推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去.

例如，设点 $P_0\in\mathbf{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta,\ P\in\mathbf{R}^n\}$$

就称为 $\mathbf{R}^n$ 中点 P 的 δ **邻域**．以邻域为基础，可以进一步定义点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念．这里不再赘述.

三、多元函数的概念

定义 1 设 D 是平面上的一个非空点集，如果对于 D 内的任一点 (x,y)，按照某种法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的二元函数，它在 (x,y) 处的函数值记为 $f(x,y)$，即

$$z=f(x,y),$$

其中 x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**．点集 D 称为该函数的**定义域**，数集 $\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的**值域**.

注：关于二元函数的定义域，我们仍作如下约定：如果一个用算式表示的函数没有明确指出定义域，则该函数的定义域理解为使算式有意义的所有点 (x,y) 所成的集合，称为**自然定义域**.

类似地，可定义三元及三元以上函数．当 $n\geq 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**.

例 1 求二元函数

$$f(x,y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$$

的定义域.

解 要使表达式有意义，必须

$$\begin{cases}|3-x^2-y^2|\le 1\\ x-y^2>0\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}2\le x^2+y^2\le 4\\ x>y^2\end{cases}$$

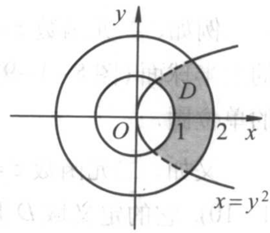

图 8-1-7

故所求定义域(图 8-1-7)

$$D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$$

例 2 已知函数 $f(x+y,x-y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，求 $f(x,y)$.

解 设 $u=x+y,\ v=x-y$，则

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2},$$

所以
$$f(u,v)=\frac{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2-\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2}=\frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

即有
$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

二元函数的几何意义

设 $z=f(x,y)$ 是定义在区域 D 上的一个二元函数，点集

$$S=\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形. 易见，属于 S 的点 (x,y,z) 满足三元方程

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0,$$

故二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形就是空间中区域 D 上的一张曲面(图 8-1-8)，定义域 D 就是该曲面在 xOy 面上的投影.

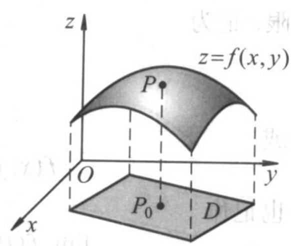

图 8-1-8

例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示以原点为中心、半径为 1 的上半球面(图 8－1－9)，它的定义域 D 是 xOy 面上以原点为中心的单位圆.

又如，二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示顶点在原点的圆锥面(图 8－1－10)，它的定义域 D 是整个 xOy 面.

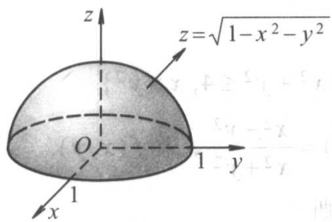

图 8－1－9

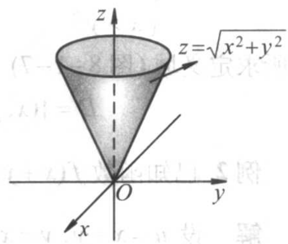

图 8－1－10

四、二元函数的极限

与一元函数极限概念类似，二元函数的极限也是反映函数值随自变量变化而变化的趋势.

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，恒有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为**函数 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限**. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

或

$$f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0)$$

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则，在此不再详述. 为了区别于一元函数的极限，我们称二元函数的极限为**二重极限**.

值得注意的是，在定义 2 中，动点 P 趋于点 P_0 的方式是任意的（图 8-1-11）. 即若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，则无论动点 P 以何种方式趋于点 P_0 都有 $f(P)\to A$. 这个命题的逆否命题常常用来证明一个二元函数的二重极限不存在.

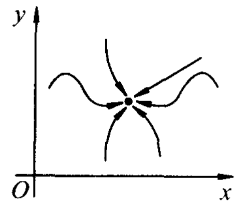

图 8-1-11

求多元函数的极限，一般都是转化为一元函数的极限来求，或通过适当放大后利用夹逼定理来计算.

例 3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解 因为当 $xy\neq 0$ 时，有

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|+|y|}{2|xy|}$$

$$=\frac{1}{2|y|}+\frac{1}{2|x|}\to 0\ (x\to\infty,\ y\to\infty),$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0.$$

例 5 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}$.

解 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\ln(x^2+y^2)},$$

而

$$|xy\ln(x^2+y^2)|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|$$
$$\leq|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|.$$

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\xlongequal{t=x^2+y^2}\lim\limits_{t\to 0^+}t\ln t=0$, 得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\ln(x^2+y^2)=0,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{xy}=e^0=1.$$

例 6 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证 取 $y=kx$ (k 为常数), 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

易见题设极限的值随 k 的变化而变化，故题设极限不存在.

五、二元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处**间断**.

例如，从例 6 知道，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以，无论怎样

定义函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 (0, 0) 点处的值，$f(x,y)$ 在 (0, 0) 点处都不连续，即在 (0, 0) 点处间断.

例 7 讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 (0,0) 处的连续性.

解 由 $f(x,y)$ 表达式的特征，利用极坐标

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=0=f(0,0),$$

所以函数在 (0, 0) 点处连续.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称该函数在**区域 D 内连续**. 在区域 D 上连续的二元函数的图形是区域 D 上一张连续曲面.

与一元函数类似，二元连续函数经过四则运算和复合运算后仍为二元连续函数. 由 x 和 y 的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的可用一个式子表示的二元函数称为**二元初等函数**. 一切二元初等函数在其定义区域内是连续的. 这里定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域. 利用这个结论，当要求某个二元初等函数在其定义区域内一点的极限时，只要算出函数在该点的函数值即可.

例 8 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[\ln(y-x)+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\left[\ln(1-0)+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}\right]$$
$$=1.$$

特别地，在有界闭区域 D 上连续的二元函数也有类似于一元连续函数在闭区间上所满足的定理. 下面我们不加证明地列出这些定

理.

定理 1（最大值和最小值定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

定理 2（有界性定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数在 D 上一定有界.

定理 3（介值定理） 在有界闭区域 D 上的二元连续函数，若在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

课堂练习

1. 设 $f\left(x-y, \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 求 $f(x, y)$.

2. 若点 (x, y) 沿着无数多条平面曲线趋向于点 (x_0, y_0) 时，函数 $f(x, y)$ 都趋向于 A，能否断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)=A$?

3. 讨论函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续性.

§8.2 偏导数

一、偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数的概念. 实际问题中，我们常常需要了解一个受到多种因素制约的变量，在其它因素固定不变的情况下，该变量只随一种因素变化的变化率问题，反映在数学上就是多元函数在其它自变量固定不变时，函数随一个自变量变化的变化率问题，这就是偏导数.

以二元函数 $z=f(x, y)$ 为例，如果固定自变量 $y=y_0$，则函数

$z=f(x,y_0)$ 就是 x 的一元函数，该函数对 x 的导数，就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的**偏导数**. 一般地，我们有如下定义：

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **处对 x 的偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ \text{或}\ f_x(x_0,y_0).$$

例如，有

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 y 的偏导数**为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ \text{或}\ f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x、y 的函数，它称为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**（简称为**偏导数**），记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x\ \text{或}\ f_x(x,y).$$

同理可以定义函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 y 的偏导数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y\ \text{或}\ f_y(x,y).$$

注：偏导数的记号 z_x，f_x 也记成 z'_x，f'_x，对下面的高阶偏导数也