21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

全程导学及习题全解

上册

同济大学第五版

主　编　周　珑

副主编　孟　慧　杨　春

主　审　王进良

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等数学

全程导学及习题全解

上册

同济大学第五版

主 编 周 珑
副主编 孟 慧 杨 春
主 审 王进良

◆知识归纳 梳理主线重点难点
◆习题详解 精确解答教材习题
◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

高等数学全程导学及习题全解．上册/周珑主编．—北京：中国时代经济出版社，2006.9

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 7-80221-122-0

Ⅰ．高… Ⅱ．周… Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第055922号

高等数学全程导学及习题全解（上册）

周珑 主编

出 版 者	中国时代经济出版社
地 址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦东办公区11层
邮政编码	100007
电 话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传 真	(010)68320634
发 行	各地新华书店
印 刷	北京市优美印刷有限责任公司
开 本	880×1230 1/32
版 次	2006年9月第1版
印 次	2006年9月第1次印刷
印 张	10
字 数	270千字
印 数	1~5000册
定 价	11.00元
书 号	ISBN 7-80221-122-0/G·070

内容简介

本书是根据高等教育出版社出版的，同济大学应用数学系主编的《高等数学》(上、下册)(第五版)的一本配套的学习辅导和习题解答教材。全书紧扣教材内容，针对各章节全部习题给出详细解答，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进的帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在《高等数学》(第五版)(上、下册)教材习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表性的题型，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为在校大学生和自考生学习《高等数学》(第五版)(上、下册)课程的教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书，也可以作为《高等数学》(第五版)(上、下册)课程教师的教学参考书。

前　　言

《高等数学》是解决理工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是理工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《高等数学》(第五版)(上、下册)课程的理论精髓和解题方法，我们根据同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)教材，编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据《高等数学》(第五版)教材中每一章的内容，编写了以下几方面的内容：本章小结：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论和重要公式等，帮助读者迅速了解本章重要知识点，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点题型进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

自测题：根据教学要求、教学重点，编写了一套难易适中的自测题，并对自测题进行了详细的解答。

本教材由周珑、孟慧、杨春等同志编写，全书由王进良老师主审。王进良老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，

对此深表感谢。本书编写过程中得到杜心康、宁建建等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！对《高等数学》（第五版）教材的作者——同济大学应用数学系的老师们，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，存在一些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2006 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

本章重点内容导学

一、映射与函数

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素$\begin{cases}\text{定义域}\\ \text{对应规律}\end{cases}$

3. 函数的特性

有界性、奇偶性、单调性、周期性

4. 初等函数的类型

二、极限

1. 数列的极限

(1)“$\varepsilon-N$”定义及其应用

(2)收敛数列的性质

唯一性、有界性、保号性

(3)极限存在准则

夹逼准则、单调有界准则、柯西准则

2. 函数的极限

(1)“$\varepsilon-\delta$”定义及其应用

(2)函数极限的性质

唯一性、局部保号性

3. 无穷小与无穷大的定义、关系

4. 极限运算法则及存在准则

5. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

三、函数的连续性

1. 函数的连续性

2. 函数的间断点

第一类间断点：$\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{cases}$

第二类间断点：$\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{cases}$

3. 连续函数的和、差、积、商的连续性

4. 闭区间上连续函数的有界性与最大值最小值定理，零点定理与介值定理.

典型例题讲解

例 1 求函数 $f(x)=\arcsin\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{\ln(x-\frac{1}{2})}$ 的定义域.

解 当 $\arcsin\sqrt{3x-1}$ 和 $\ln(x-\frac{1}{2})$ 同时有定义时，函数才有定义.

所以 $\begin{cases}0\leqslant\sqrt{3x-1}\leqslant 1\\ 3x-1\geqslant 0\\ x-\dfrac{1}{2}>0\\ x-\dfrac{1}{2}\neq 1\end{cases}$

解上述不等式可得

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\ x\geqslant\dfrac{1}{3}\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

∴函数的定义域为 $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{2}{3}$ 或 $(\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}]$.

例 2　设 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，求 $f(2x+\frac{1}{2})+f(2x-1)$ 的定义域.

解　$f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，要使 $f(2x+\frac{1}{2})+f(2x-1)$ 同时有定义.

可得 $\begin{cases}-1<2x+\dfrac{1}{2}<1\\ -1<2x-1<1\end{cases}$

解不等式可得

$$\begin{cases}-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{1}{4}\\ 0<x<1\end{cases}$$

∴函数的定义域为 $0<x<\frac{1}{4}$ 或 $(0,\frac{1}{4})$.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}x & x>0\\ 1+x & x\leqslant 0\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$

求 $f[g(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}f(-x^2) & x>0\\ f(x) & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1-x^2 & x>0\\ 1+x & x\leqslant 0\end{cases}$

$$f[f(x)]=\begin{cases}f(x) & x>0\\ f(1+x) & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x & x>0\\ 1+x & -1<x\leqslant 0\\ 2+x & x\leqslant -1\end{cases}$$

$$g[g(x)]=\begin{cases}g(-x^2) & x>0\\ g(x) & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ x & x\leqslant 0\end{cases}$$

例 4　求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}}\ (0\leqslant a\leqslant 1)$.

解　当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，

$1\leqslant\sqrt{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}}\leqslant\sqrt[n]{4}$

由夹逼定理有

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1.$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=0.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-12}{x^2-6x+9}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-3)}{(x-3)^2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x-3}$$

$$=\frac{2+4}{2-3}=-6.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

解 **解法一** $\lim\limits_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^2=e^2.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{2\sin x}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}}=e^2.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{12}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{12}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)$

$$=\lim_{x\to2}\frac{12-(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-x^2-2x+8}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-(x+4)}{x^2+2x+4}$$

$$=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}.$$

例 9　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+2x}+ax+b\right)=2$，求常数 a,b.

解　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+2x}+ax+b\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+(ax+b)(1+2x)}{1+2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+2a)x^2+(a+2b)x+b}{1+2x}=2$$

可得

$$\begin{cases}1+2a=0\\ \dfrac{a+2b}{2}=2\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{9}{4}$.

例 10　设 $f(x)=ax^2+bx$，$g(x)=\sin 2x$

试讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 无穷小量的关系.

解　$g(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$

当 $x\to 0$ 时，$g(x)\sim 2x$

∴当 $a\neq 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的二阶无穷小量；

当 $a=0$，且 $b=2$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小量；

当 $a=0$，$b\neq 2$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小量.

例 11　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0\\ 6 & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}} & x>0\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}{(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-3a\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)$$

$$=-6a$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\cdot\frac{x}{4}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}4\cdot\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}4\cdot\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$=2a^2+4$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则有

$$\begin{cases}-6a=6\\-6a=2a^2+4\end{cases}$$

解方程可得 $a=-1$

∴当 $a=-1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 12 证明方程 $x^6-2x^5+5x^3+1=0$ 在区间$[-1,0]$上有一个根.

证明 令 $f(x)=x^6-2x^5+5x^3+1$

则 $f(x)$ 在$[-1,0]$上连续

而且 $f(0)=1>0$,$f(-1)=-1<0$.

由零点定理可知在$[-1,0]$内至少存在一点 $\xi(-1<\xi<0)$,

使得 $f(\xi)=0$

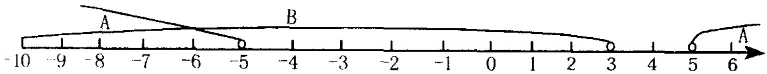
∴ξ 是 $x^6-2x^5+5x^3+1=0$ 在$[-1,0]$之间的一个根.

习题全解

习题 1—1

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出 $A\cup B$,$A\cap B$,$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解　$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，在数轴上画出 A、B.



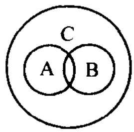
$\therefore A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$

$A\backslash B$ 即 A、B 的差集.

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证明　①设 $x\in(A\cap B)^C$



则 $x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$

$\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$　所以$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$；

②设 $x\in A^C\cup B^C$ 则 $x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow$

$x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$

则 $A^c\cup B^C\subset(A\cap B)^C$

则由①②可知$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f:X\rightarrow Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明

(1)$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2)$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明　(1)设 $x_0\in A\cup B$，

$y=f(x_0)\in f(A\cup B)=\{f(x)\mid x\in A$ 或 $x\in B\}\Leftrightarrow x_0\in A$ 或 $x_0\in B$

所以 $f(x_0)\in f(A)$或 $f(x_0)\in f(B)\Leftrightarrow f(x_0)\in f(A)\cup f(B)$

$\therefore f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2)$f(A\cap B)=\{f(x)\mid x\in A\cap B\mid\}$，$\forall y\in f(A\cap B)$，故 $\exists x_0\in A\cap B$，使得 $y=f(x_0)$

则 $x_0\in A$ 且 $x_0\in B$，即 $f(x_0)\in f(A)$且 $f(x_0)\in f(B)$，

所以 $y=f(x_0)\in f(A)\cap f(B)$

故有 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f:X\rightarrow Y$，若存在一个映射 $g:Y\rightarrow X$，使 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$，有 $I_Xx=x$；对于每一个 $y\in Y$，有 $I_Yy=y$，证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$.

证明 $\forall y\in Y,\exists x\in X$,使得 $x=g(y)$,

所以 $f(x)=f\circ g(y)=I_Y y=y$,

$\therefore f(x)$是满射.

对 X 中任意元素 $x_1,x_2,x_1\neq x_2$,要证 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 假设 $f(x_1)=f(x_2)$,

那么 $g\cdot f(x_1)=g\cdot f(x_2)$,即 $x_1=x_2$,与 $x_1\neq x_2$ 矛盾,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$

所以 f 是双射,g 是 f 的逆映射.

根据定义知,g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f:X\to Y,A\subset X$. 记 $f(A)$的原像为 $f^{-1}(f(A))$,证明:

(1)$f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2)当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证明 (1)$\forall x\in A$,则 $y=f(x)\in f(A)$,

所以 $x\in\{f^{-1}(y)\mid y\in f(A)\}$.

$\therefore f^{-1}(f(A))\supset A$.

(2)$x\in f^{-1}(f(A))$,$\exists y\in f(A)$使得

$f^{-1}(y)=x$

$\therefore f(x)=y$.

又$\because y\in f(A)$

$\therefore \exists x'\in A$,使得

$f(x')=y$.

当 f 是单射时,$x=x'\in A$

$\therefore f^{-1}(f(A))\subset A$

再由(1)结论,$f^{-1}(f(A))=A$.

6. **求下列函数的自然定义域:**

(1)$y=\sqrt{3x+2}$;　　(2)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(4)$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5)$y=\sin\sqrt{x}$;　　(6)$y=\tan(x+1)$;

(7)$y=\arcsin(x-3)$;　　(8)$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(9)$y=\ln(x+1)$;　　(10)$y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1)若函数 $y=\sqrt{3x+2}$有意义,则需满足 $3x+2\geqslant 0$,此函数的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -\dfrac{2}{3}\}$.