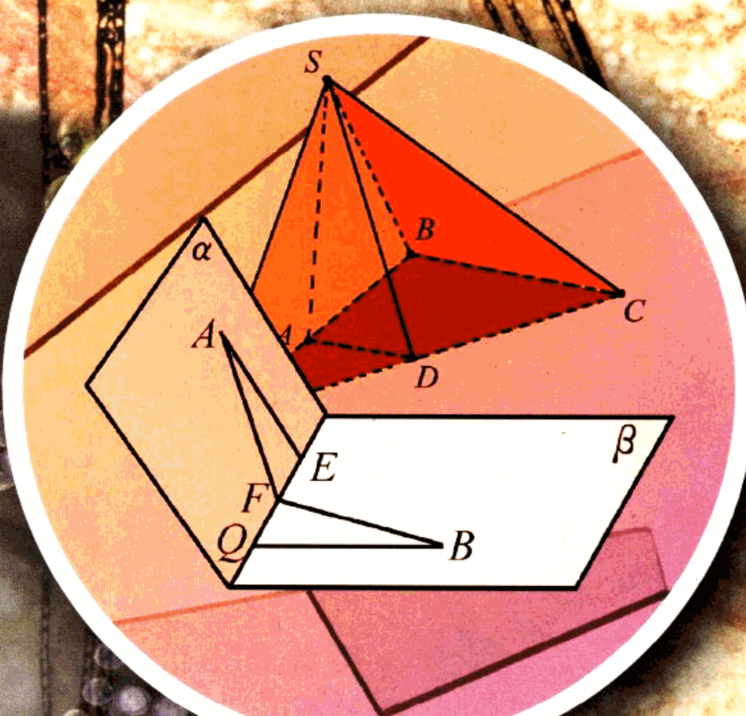
高中学科素质教育丛书

数学

SHUXUE

高中二年级（下）



四川出版集团·四川教育出版社

高中学科素质教育丛书

数　　学

高中二年级（下）

本册主编　李　勇

审　　定　杨开理

编　　著　周贤章　付光成

杨正义　高宇明

石玉峰　徐孝勇

张立洪　李孝成

郭宗芳　唐代勇

陈　伟　张昌金

四川出版集团

四川教育出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高中学科素质教育丛书. 数学. 二年级. 下/李勇编.
-成都：四川教育出版社，2005（2006重印）
ISBN 7-5408-4044-7

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第009579号

责任编辑　韦纪军
版式设计　张　涛
封面设计　金　阳
责任校对　伍登富
责任印制　黄　萍
出版发行　四川出版集团　四川教育出版社
（成都市槐树街2号　邮政编码　610031）
出 版 人　安庆国
印　　刷　资中县文化彩印厂
版　　次　2005年2月第1版
印　　次　2006年1月第2次印刷
成品规格　185mm×260mm
印　　张　10.25
字　　数　258千
印　　数　13601-23200册
定　　价　10.25元

本书若出现印装质量问题，请与本社调换。电话：(028) 86259359
编辑部电话：(028) 86259381　　邮购电话：(028) 86259694

前　言

为了让广大高中师生更好地理解新教材、用好新教材，四川教育出版社组织众多专家，经过反复研讨、论证，共同编写出一套适合素质教育、配合高中新教材使用的新的助学读物——“高中学科素质教育丛书”。丛书包括高中一年级的诸学科：语文、数学、英语、物理、化学、历史、思想政治、地理、信息技术。高中二年级则为：语文、数学、英语、物理、化学、生物或思想政治、历史、地理。各科均由经验丰富、功力深厚的优秀特级、高级教师和教研员执笔编写，并特约了各学科的权威教师对书稿进行仔细的审查和修改。编者根据各学科的不同特点，集合成不同板块，大体由“知识要点重点提示”、“学科素质要求”、“典型例题解析”、“素质能力训练”等板块（各书根据具体情况有所不同）构成，与教学同步。此外，各学科在章节（或单元）教学结束、期中和期末，还为学生设计了“综合素质检测（或单元检测等另外叫法）”，便于师生对照检查教学效果。各种“训练”和“检测”，均附有参考答案。

这套丛书的最大特点是一个“新”字。

一是与新教材配套。能让广大师生从教和学两个方面更准确地把握新教材的特点，从感知和训练两个方面去实现学科素质教育的目标。

二是角度新。以一种新的切入角度，将训练应试能力的现实与提高学科素养的方向有机地结合起来，体现了丛书的实用性和前瞻性。

三是体例新。丛书不同于传统的“单元练习”，既有基础知识的要求，也有学科素质的要求和训练，还有学科知识的适度扩展和延伸。

四是题型新。丛书各科的素质训练，既有基础知识题，又有能力训练题；既有单一题型，又有综合题型，还有开放性题型。新编题型占有较大比重，进一步扩大了学生的发挥空间。

在编写过程中，编者十分注意“3+X”高考改革趋势，强调以学生为本，兼顾差异，实行分层，注重学法，让每一位学生通过使用本丛书都有所收获，都有所发展。更希望它对广大师生的教和学都有所帮助！

编　者

目　录

第 9 章　直线、平面、简单几何体

[学习指导]

一、知识结构框图

- 直线和平面
  - 平面
    - 平面的概念和性质（三个公理及推论）
    - 平面的表示法及斜二测画法
  - 空间两条直线
    - 平行直线 — 平行公理及公理 4
    - 相交直线 — 等角定理
    - 异面直线
      - 判定定理
      - 所成的角
      - 距离
  - 空间直线与平面
    - 直线在平面内
    - 直线与平面平行
      - 判定、性质
      - 线面距离
    - 直线与平面相交
      - 线面垂直
        - 判定、性质
        - 点面距离
      - 斜交
        - 三垂线定理
        - 射影定理
        - 直线与平面所成的角（最小角原理）
  - 空间两个平面
    - 平行
      - 判定、性质
      - 面面距离
    - 面面垂直 — 判定、性质
    - 相交 — 斜交、二面角及其平面角
- 简单几何体
  - 棱柱
    - 棱柱有关概念及性质
    - 棱柱侧面积及体积
  - 棱锥
    - 棱锥有关概念及性质
    - 棱锥侧面积及体积
  - 欧拉公式 — V+F−E=2 及应用
  - 球
    - 球的有关概念及性质
    - 球的表面积、体积

二、学习目标要求

1．掌握平面的基本性质，会画图表示平面．

2．了解空间两条直线的位置关系，能够画出空间两条直线的各种位置关系的图形；掌握两条直线所成的角和距离的概念（对于异面直线的距离，只要求会利用已给出公垂线的计算）．

3．了解空间直线和平面的位置关系，能够画出空间直线和平面的各种位置关系的图形；掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；掌握直线和平面垂直的判定和性质定理；掌握斜线在平面上的射影、直线与平面所成的角、直线与平面的距离的概念；了解三垂线定理及其逆定理．

4．了解两个平面的位置关系，能够画出两个平面的各种位置关系的图形；掌握两个平面平行的判定定理和性质定理；掌握二面角、二面角的平面角及两个平行平面间的

距离概念；掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理.

5. 进一步熟悉反证法，会用反证法证明简单的问题.

6. 了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会用斜二测画法画水平放置的平面图形和直棱柱的直观图.

7. 了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质，会画正棱锥的直观图.

8. 了解多面体、凸多面体、正多面体的概念，了解多面体的欧拉公式.

9. 了解球的概念，掌握球的性质，掌握球的体积及表面积公式.

10. 通过本章的学习，培养空间想象能力，发展逻辑思维能力.

三、重点难点分析

1. 本章的重点是平面的基本性质、空间直线的位置关系、直线与平面之间及两平面之间的平行和垂直关系. 其中关于平面基本性质的公理，是研究立体几何的重要基础.

2. 本章的难点是建立正确的空间观念，在对图形的认识方面实现由平面到立体的过渡.

四、学习方法引导

线与线、线与面、面与面之间的平行与垂直关系是学习本章的两条主线；线线平行⇒线面平行⇒面面平行；线线垂直⇒线面垂直⇒面面垂直. 就是说，要证面面平行（垂直），先证线面平行（垂直）；要证线面平行（垂直），先证线线平行（垂直）. 这种转化思想对证题思路及突破口的选择提供了明确的方向. 值得注意的是，这个思想及转化的方向是可逆的，许多情况下，为了证线线垂直，先由某些条件证明线面垂直，然后由性质定理得到线线垂直. 同样，要证线面垂直，也可先证面面垂直，这就是说，面面平行⇒线面平行⇒线线平行；面面垂直⇒线面垂直⇒线线垂直，这条线索代表了线线、线面、面面平行与垂直的性质定理及其关系，掌握好转化的思想和方法，对培养推理能力和提高解题应变能力十分有益.

求角度问题的解题步骤是：(1) 找出这个角；(2) 证该角合题意；(3) 作出这个角所在三角形，解这个三角形，求出角. 求角度问题不论哪种情况都归结到两条直线的成角问题，即在线线成角中找到答案. 线线距离、线面距离、面面距离、点线距离、点面距离的转化，最终都得转化为两点间的距离问题. 在计算两点间的距离时，一般要把未知量和足够的已知量归结到一个或几个有关的三角形中，通过解三角形的方法，求出两点间的距离，有时也可用等积法和二次函数求最值等方法求之.

立体几何和平面几何有着密切的联系，空间图形的局部性质往往可以透过平面图形的性质去研究，利用截面可以将柱体中的元素关系转化为平行四边形中的元素关系，锥体中的元素关系转化为三角形中的元素关系，球体中的元素关系转化为圆中的元素关系等. 这是立体几何问题转化为平面几何问题的常用方法之一.

本章中，线、面间的平行与垂直关系及角、距离、面积与体积的计算等，多放在几何体中进行考查，对数学能力的要求较高. 在解答时，应综合基本知识深刻理解题意，灵活地应用基本的思想方法进行分析和推理. 所涉及的重要数学思想方法有：化归思想、类比思想、极限思想等. 化归思想是中学数学中最基本、最重要的数学思想之一.

§9.1 平面

知识要点归纳

1．平面的概念、画法及记法．

2．平面的基本性质：公理1～公理3及公理3的3个推论，会利用平面的基本性质解决共点、共线、共面问题．证线共点，可先证其中两线交于一点，再证该点在其余直线上．证点共线，可证这些点都是某两个平面的公共点，由公理2即得．证点线共面，可先由其中一部分元素确定一个平面，再证其余元素也在该平面内；或先说明某些元素共面于α，另一些元素共面于β，再证α、β重合，即同一法．

典型例题导引

【例1】 判断下列命题是否正确：

(1) 点$A\in$直线a，点$A\in$平面α，则$a\subset\alpha$．(2) 点$A\in$直线a，直线$a\not\subset$平面α，则$A\notin\alpha$．

(3) 若两平面有三个公共点，则两平面重合．(4) 点$A\in\alpha$，$A\in\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，则$A\in l$．

(5) 三条两两相交的直线在同一平面内．(6) 三点确定一个平面．

【分析】 (1) 若$A=a\cap\alpha$，仍符合题设．(2) 若$a\cap\alpha=A$，符合题设，但结论不成立．(3) 若这三点共线，则两平面可相交．(4) 公理2的应用．(5) 三条直线交于一点，直线满足题设，但结论不成立．(6) 共线三点确定无数个平面．

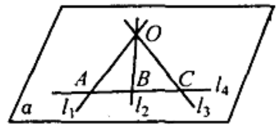
【解】 (1)、(2)、(3)、(5)、(6) 都不正确，只有 (4) 正确．

【评析】 此题考查公理及推论的运用，注意其中符号语言的表达．

【例2】 已知直线l_1、l_2、l_3交于一点O，直线l_4分别与l_1、l_2、l_3相交于点A、B、C．求证：l_1、l_2、l_3、l_4共面．

【分析】 设其中l_1、l_4确定平面α，证明l_2、l_3都在α内即可．

【证明】 $\because$ $l_1\cap l_4=A$，$\therefore$ l_1和l_4确定平面α．



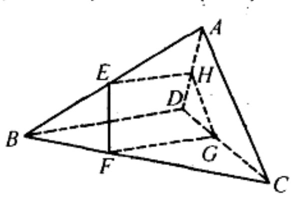
$\because$ $O\in l_1$，$\therefore$ $O\in\alpha$，$\because$ $l_4\subset\alpha$，$B\in l_4$，$C\in l_4$，

$\therefore$ $B\in\alpha$，$C\in\alpha$，又$O\in\alpha$，$\therefore$ $l_2\subset\alpha$，$l_3\subset\alpha$，

$\therefore$ l_1、l_2、l_3、l_4共面于α．

【评析】 此题考查公理1与公理3的推论的应用．

【例3】 如图，已知空间四边形$ABCD$中，E、H分别是边AB、AD的中点，F、G分别是边BC、CD上的点，且$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{2}{3}$．



【求证】 三条直线EF、GH、AC交于一点．

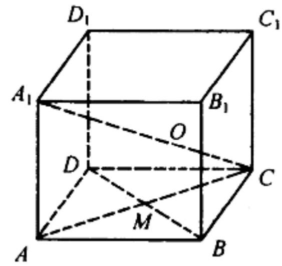
【分析】 要证三线共点，可设其中两条直线有交点，且该交点在第三条直线上．

【证明】 $\because$ $\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}=1$，$\therefore$ $EH \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}BD$．又$\because$ $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $\frac{FG}{BD}=\frac{2}{3}$，且 $FG\parallel BD$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为梯形，从而两腰 EF、GH 必相交于一点 P．$\because$ $P\in$直线 EF、$EF\subset$平面 ABC，$\therefore$ $P\in$平面 ABC．同理 $P\in$平面 ADC．$\therefore$ P 在平面 ABC 和平面 ADC 的交线 AC 上，$\therefore$ EF、GH、AC 三线交于一点．

【点评】 平面几何中证多线共点的方法也适用，但在思考中应考虑空间图形的新特点．

【例 4】 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 A_1C 与平面 BDC_1 交于点 O，AC、BD 交于点 M．求证：点 C_1、O、M 共线．



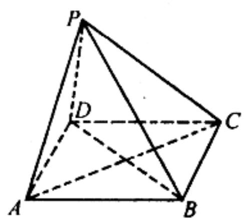
【分析】 要证若干点共线的问题，只要证这些点同在两个相交平面内即可．

【证明】 如图，$A_1A\parallel C_1C$，$\therefore$ A_1A 与 C_1C 可确定平面 A_1C．$\because$ $O\in A_1C$，$\therefore$ $O\in$平面 A_1C．
$\because$ 平面 $BC_1D\cap$直线 $A_1C=O$，$\therefore$ $O\in$平面 BC_1D．
$\therefore$ O 在平面 A_1C 与平面 BC_1D 的交线上．$\because$ $AC\cap BD=M$，$\therefore$ $M\in$平面 BC_1D 且 $M\in$平面 A_1C，故平面 $BC_1D\cap$平面 $A_1C=C_1M$，$\therefore$ $O\in C_1M$ 即 O、C_1、M 三点共线．

开放探索创新

【例 5】 有空间不同的五个点：(1) 若有某四点共面，则这五点最多可确定多少个平面？(2) 若任意四点都在同一平面内，则这五点共能确定多少个平面？并说明你的理由．

【解析】 (1) 当共面的某四点中任后三点不共线，另一点不在该平面内时，这五点确定的平面最多．如图，即这五点最多可确定 7 个平面．



(2) 若任意四点都在同一平面内时，这五点必共面．$\because$ 若 A、B、C、D 四点在平面 α 内，又$\because$ A、B、C、P 在同一平面内，可分如下情况：

【证明】 (1) 若 A、B、C 三点不共线，则 α 为 A、B、C 确定的平面，$\therefore$ $P\in\alpha$，五点共面．(2) 若 A、B、C 三点在直线 l 上，则①当 D 或 P 也在 l 上时，五点共面；② 若 D、P 都不在 l 上，则 DP 直线与 AB 直线必在 A、B、D、P 所在的平面上，$\therefore$ C 也在这一平面内，从而五点也共面．

【评析】 此题考查平面的基本知识及空间想象能力，要注意分类讨论的必要性和全面性．

学习目标评估

一、选择题

1．下列命题中，正确的是： (   )

A. 一条直线与一个点确定一个平面.

B. 有三个公共点的两个平面必定重合.

C. 若线段 AB 在平面 α 内，则 AB 延长线上的一点也在 α 内.

D. 三条直线两两相交，则这三条直线共面.

2. 在空间中，下列命题不成立的是： ( )

A. 两组对边都平行的四边形是平行四边形.

B. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

C. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. 语句“直线 a 和 b 相交于平面 α 内一点 A”，用符号表示为： ( )

A. $a\cap b=A$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$. B. $a\cap\alpha=A$，$b\cap\alpha=A$.

C. $a\cap b=A$，$A\in\alpha$. D. $a\cap\alpha=A$，$A\in b$.

4. 已知点 P、Q 在平面 α 内，点 M 在平面 β 内，且 $\alpha\cap\beta=l$，$M\notin l$，$PQ\cap l=R$，过 P、Q、M 的平面为 γ，则 $\beta\cap\gamma$ 是： ( )

A. 直线 MR. B. 直线 MQ. C. 直线 PM. D. 直线 PQ.

5. 命题甲：空间中若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线. 它的逆命题记作乙，则： ( )

A. 甲、乙都正确. B. 甲、乙都不正确.

C. 甲不正确，乙正确. D. 甲正确，乙不正确.

6. 平面 α、β 的公共点多于 2 个，则 α、β 的关系： ( )

A. 相交. B. 重合. C. 有两条交线. D. 相交或重合.

7. 两条相交直线 l，m 都在平面 α 内且都不在平面 β 内. 命题甲：l 和 m 中至少有一条与 β 相交. 命题乙：平面 α 与 β 相交. 则甲是乙的什么条件： ( )

A. 充分不必要条件. B. 必要不充分条件.

C. 充要条件. D. 不充分不必要条件.

8. 三个互不重合的平面把空间分成 n 个部分，则 n 的值为： ( )

A. 4，6. B. 4，5，6，8. C. 7，8. D. 4，6，7，8.

二、填空题

9. 点 M 在直线 a 上，a 在平面 α 内，则 M、a、α 之间上述关系的集合关系是 M ____ a，a ____ α，M ____ α.

10. 直线 l 及 l 外不共线的三点，最多可确定平面的个数________.

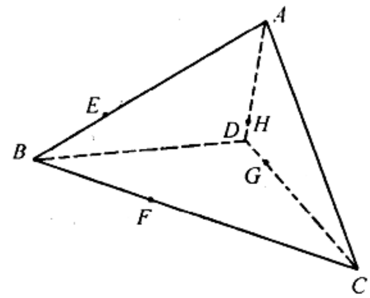
11. 空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、AD 的中点，那么 $EFGH$ 的形状是________.

12. 三条直线 a、b、c 确定三个平面 α、β、γ，则这三条直线的公共点的个数是______.

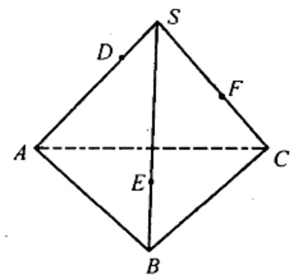
三、解答题

13. 已知：$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b=A$，$P\in b$，$PQ/\!/a$. 求证：$PQ\subset\alpha$.

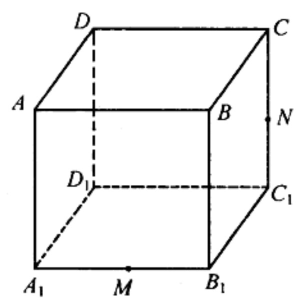
14．如图，空间四边形$ABCD$中，E、F、G分别在AB、BC、CD上且满足$AE:EB=CF:FB=2:1$，$CG:GD=3:1$，过E、F、G的平面交AD于H．(1) 求$AH:HD$；(2) 求证：EH、FG、BD三线共点．



15．如图，D、E、F分别是空间四边形$SABC$的边SA、SB、SC上的点，且$FD\cap CA=M$，$EF\cap BC=N$，$DE\cap AB=P$．求证：M、N、P三点共线．



16．如图，正方体的棱长为4cm，M、N分别是A_1B_1和CC_1的中点．(1) 画出过D、M、N三点的平面，DMN与平面BB_1C_1C，平面AA_1B_1B的两条交线；(2) 设过D、M、N三点的平面与B_1C_1交于P，求$PM+PN$的值．



§9.2　空间直线

知识要点归纳

1．$$\text{两条直线的位置关系}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{平行}\\ \text{相交}\end{array}\right\}\text{在同一平面内}\\ \text{异面—不同在任一平面内}\end{cases}$$

2．平行公理是立体几何中平行关系过渡的重要原理，这种平行关系的传递不受直线条数的限制．

3．平行公理是判断两条直线平行的重要方法：寻找第三条直线分别与前两条直线平行．

4．证明角的相等问题，等角定理及推论是较常用的方法．另外，通过证明三角形的相似或全等也可以．

5．异面直线的画法：平面衬托法，几何体衬托法．判定方法：1）定义；2）判定定理．证明两条直线异面，一般有以下几种方法：(1) 反证法；(2) 用“平面内一点与平面外一点连线，和平面内不过该点的直线是异面直线”来判定．

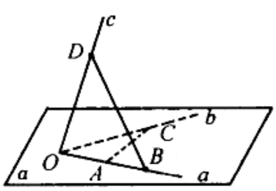
6. 异面直线所成角的解题思路是，把空间两异面直线通过平移，转化为平面内相交直线所成角，具体的平移过程，视题而定. 求角度问题解题程序是先找到该角，证该角合题意，作出该角所在三角形，解这个三角形，求出该角的某个三角函数值，再根据范围 $(0, \frac{\pi}{2})$ 写出这个角.

7. 求异面直线距离的方法是直接法，步骤是：(1) 找（解）；(2) 证；(3) 求.

典型例题导引

【例1】 已知不共面的三条直线 a、b、c 都经过点 O，且 A、$B\in a$，$C\in b$，$D\in c$（点 A、B、C、D 异于 O）. 求证：AC、BD 是异面直线.

【分析】 空间任意两条直线有且仅有三种位置关系，若能排除其中的平行或相交的两种关系，则必为异面直线.



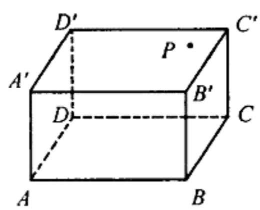
证法 1. 假设 AC、BD 不是异面直线，则 AC、BD 共面于 α. ∵ $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，∴ $a\subset\alpha$，∴ $O\in\alpha$. ∵ $C\in\alpha$，∴ $b\subset\alpha$，又∵ $D\in\alpha$，∴ $c\subset\alpha$，∴ a、b、c 三条直线共面于 α，这与 a、b、c 不共面相矛盾，∴ 假设不成立，

∴ AC、BD 是异面直线.

证法 2. ∵ $a\cap b=O$，∴ a、b 确定平面 α，则点 $D\notin\alpha$，（否则 $c\subset\alpha$）. ∵ $A\in a$，$C\subset b$，∴ $A\in\alpha$，$C\in\alpha$，∴ $AC\subset\alpha$. 又 $B\in\alpha$，$B\notin AC$、$D\notin\alpha$. 由“连接平面内一点与平面外一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线”可知 AC、BD 为异面直线.

【评析】 此题考查异面直线的判定方法. 注意，使用反证法时，要把可能的情况一一反驳.

【例2】 如图在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的 $A'C'$ 面上有一点 P（P 点不在对角线 $B'D'$ 上）.



(1) 过 P 点在空间作一直线 l，使 $l/\!/BD$，应该如何作图. 并说明理由.

(2) 过 P 点在平面 $A'C'$ 内作一直线 l'，使 l' 与直线 BD 成 α 角，这样的直线有几条，应该如何作图？

【分析】 空间内作直线应以一个平面为依托，第 (1) 问可由平行公理传递. 第 (2) 问应利用异面直线所成角的概念去作.

【解】 (1) 连接 $B'D'$，在平面 $A'C'$ 内过 P 作直线 l，使 $l/\!/B'D'$，则 l 即为所求作的直线. ∵ $B'D'/\!/BD$，$l/\!/B'D'$，∴ $l/\!/BD$.

(2) 在平面 $A'C'$ 内，作 l'，使 l' 与 $D'B'$ 相交成 α 角. ∵ $BD/\!/B'D'$，∴ l' 与 BD 也成 α 角，即 l' 为所求作的直线. 若 l' 与 BD 是异面直线，则 l' 与 BD 所成的角 $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，这样的 l' 有且只有一条. 当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，这样的 l' 有两条. 若 l' 与 BD 共面，则与 BD 平行，这样的直线只有一条.

【评析】 此题考查公理 4 及异面直线所成角的概念在作图上的应用，空间中的作图通

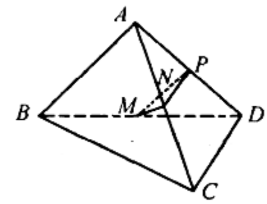
常要通过相关性质转化为平面作图，要保证每一步都有依据.

【例 3】 空间四边形 $ABCD$ 的各边及对角线的长均为 a，M、N 分别是 BD、AC 的中点.

(1) 求证 $MN<AB$.

(2) 求证 MN 与 AB、CD 所成角相等.

(3) 求 BD、AC 间的距离.



【分析】 此题中形成的几何体为正四面体，注意利用其性质简化运算. 求异面直线所成的角，可根据定义构成平面角；求异面直线的距离，则应先找其公垂线段.

【解】 (1) 证明：取 AD 中点 P，连接 MP、NP，由题意得：$MP \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB$，$NP \underline{\parallel} \frac{1}{2}CD$，

$\therefore$ $MP=NP=\frac{1}{2}a$. 在 $\triangle MNP$ 中，由两边之和大于第三边即得

$MP+NP=a=AB>MN$，$\therefore$ $MN<AB$.

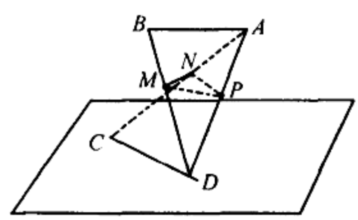
(2) 证明：$\because$ $MP\parallel AB$，$NP\parallel CD$，$\therefore$ MN 与 AB 所成角等于 MN 与 MP 所成角，MN 与 CD 所成角等于 MN 与 NP 所成角. $\because$ $MP=NP$. $\therefore$ $\triangle MNP$ 是等腰三角形，即 MN 与 AB、CD 所成角相等.

(3) 解：连接 BN、DN，$\because$ $\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 是等边三角形，$\therefore$ $BN=DN$.

$\because$ M 为 BD 中点，$\therefore$ $MN\perp BD$. 同理 $MN\perp AC$，且 MN 与 AC、BD 分别交于 N、M，MN 是 AC、BD 的公垂线. 由题意知，$BN=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BM=\frac{1}{2}a$，$\therefore$ $MN=\sqrt{BN^2-BM^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 即 BD、AC 之间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

【评析】 此题考查异面直线所成的角，异面直线间的距离及有关的几何知识. 注意利用三角形的中位线平移构造平面角的方法和公垂线段的找法. 思考：如何求 MN 与 AB 所成的角.

【例 4】 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD=8$，M、N 分别是 BD、AC 的中点，若异面直线 AB 与 CD 成角为 $60°$，求 MN 的长.



【分析】 把空间中线段 MN 构造成一个三角形的边.

【解】 取 AD 的中点 P，连 PM、PN，则 $PM=4$，$PN=4$. $\angle MPN=60°$ 或 $120°$，$\therefore$ $MN=2\times4\times\sin30°=4$，或 $MN=2\times4\sin60°=4\sqrt{3}$.

【评析】 从空间来考虑问题的习惯要逐渐形成.

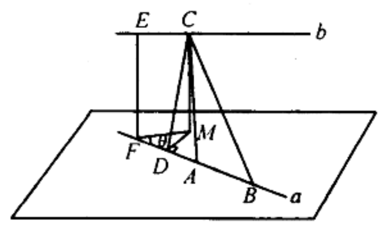
开放探索创新

【例 5】 已知 a、b 是异面直线，A、$B\in a$ 且 AB 的长为定值，$C\in b$

(1) 当线段 AB 在直线 a 上移动时，C 为定点，证明 $\triangle ABC$ 面积不变. (2) 当 C 点在直线 b 上移动，问点 C 在何位置时，$\triangle ABC$ 的面积最小.

【解析】 (1) 要证 $\triangle ABC$ 面积不变，即证点 C 到直线 a 的距离 CD 不变. 设 EF 为 a、

b 公垂线段，a、b 所成角为 θ，$CE=m$，作 $CM \mathrel{\underline{\parallel}} EF$，作 $MD \perp AB$，连 CD，则 CD 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高．设 $EF=d$，$\because$ $MD=m\sin\theta$，$CM=d$ 均为定值，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle CMD$ 中，CD 也是定值，故 $\triangle ABC$ 面积不变．



(2) 由 (1) 可知，要使 $\triangle ABC$ 面积最小，则需使 DM 最小．(因 CM 为定值)，而 $DM=m\sin\theta$ 且 θ 角为定值，$\therefore$ $m=0$ 时，DM 最小，此时 C 点为公垂线段 EF 的端点 E．

学习目标评估

一、选择题

1. 异面直线指的是：（　　）

A. 在空间不相交的直线．

B. 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线．

C. 分别位于两个不同平面内的两条直线．

D. 不能同在一个平面内的两条直线．

2. 如果直线 a、b 分别与直线 c 所成的角相等，则：（　　）

A. $a \parallel b$．　　B. a 与 b 相交．

C. a、b 为异面直线．　　D. 不能确定．

3. 两直线不平行是两直线为异面直线的：（　　）

A. 充分非必要条件．　　B. 必要非充分条件．

C. 充要条件．　　D. 既非充分又非必要条件．

4. 设空间三条直线 a、b、c，若 $a \perp c$，$b \perp c$，则下列命题正确的是：（　　）

A. c 是 a、b 的公垂线．　　B. a 与 b 不能相交．

C. a 与 b 不能平行．　　D. a 与 b 的关系不能确定．

5. 平面 $\alpha \cap \beta = l$，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，a、b 是异面直线，那么 l 与 a、b 的关系是：（　　）

A. l 与 a、b 都不相交．　　B. l 至多与 a、b 之一相交．

C. l 至少与 a、b 之一相交．　　D. l 与 a、b 都相交．

6. 若 a、b 为两条异面直线，AB 为其公垂线，直线 $l \parallel AB$，则 l 与 a、b 两直线的交点个数为：（　　）

A. 0 个．　　B. 1 个．　　C. 最多 1 个．　　D. 最多 2 个．

7. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=BC$，但 $AB \neq AD$，M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点，则：（　　）

A. MN 与 AC、BD 都不垂直．

B. MN 与 AC、BD 都垂直．

C. MN 仅能与 AC、BD 之一垂直．

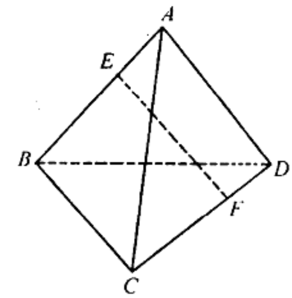
D. 以上三者都有可能．

8. 如图，$ABCD$ 为一正四面体（各边都相等），动点 E、F 分别在 AB、CD 上滑动．

设$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}=k$（$k\neq 0$），如果 EF 与 AD、BC 所成的角分别为θ_1 和 θ_2，则 $\theta_1+\theta_2=$： （　　）

A. 30°.　　B. 60°.

C. 90°.　　D. 不能确定.



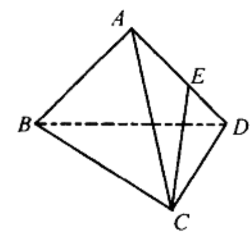
提示：正四面体中 $AD\perp BC$.

二、填空题

9. 设 a、b、c 表示直线，给出四个论断：(1) $a\perp b$，(2) $b\perp c$，(3) $a\perp c$，(4) $a/\!/c$. 以其中任意两个为条件，另外的某一个为结论，写出你认为正确的一个命题______.

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AE=B_1F=\dfrac{1}{3}$，其中 E、F 分别在边 AB、A_1B_1 上，则异面直线 BC，EF 的距离是________.

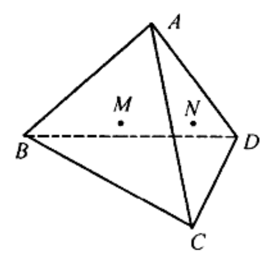
11. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，四条棱 AB、BC、CD、DA 及对角线AC、BD 均相等，E 为AD 的中点，则 AB 和CE 所成的角为________.



12. 已知异面直线 a，b 所成的角是 80°，P 为空间一定点，则过点 P 且与直线a，b 所成角都是 50°的直线有且只有________条.

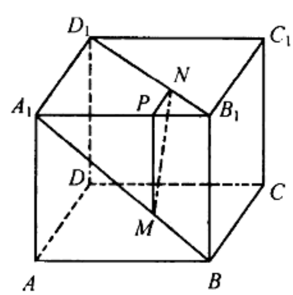
三、解答题

13. 如图，A 是$\triangle BCD$ 所在平面外一点，M、N 分别是$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 的重心，若 $BD=6$，求 MN 的值.

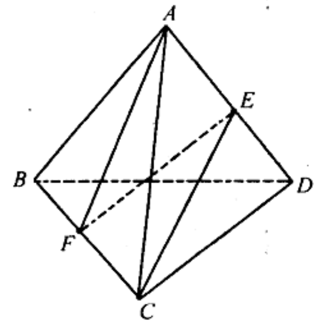


14. 如图，在棱长为 a 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N、P 分别为边A_1B、B_1D_1、A_1B_1 上的点，且$\dfrac{B_1N}{B_1D_1}=\dfrac{BM}{BA_1}=\dfrac{1}{3}$，又 $PN/\!/A_1D_1$.

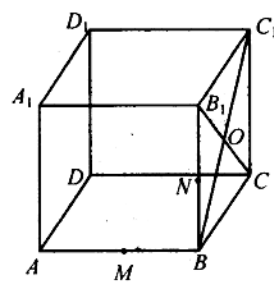
(1) 求证：$PM/\!/AA_1$；(2) 求 MN 的长.



15. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA=BD=AC=a$，E、F 分别为 AD、BC 的中点.（1）求证：EF 是 AD 和 BC 的公垂线；（2）求 AD 和 BC 间的距离；（3）求异面直线 AF 与 CE 所成的角.



16. 如图所示，在棱长为 1 的正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，M 为 AB 的中点，N 为 BB_1 的中点，O 为面 BCC_1B_1 的中心.（1）过 O 作一直线与 AN 交于点 P，与 CM 交于点 Q（只写作法，不必证明）；（2）求 PQ 的长.



§9.3　直线与平面平行的判定和性质

知识要点归纳

1. 直线与平面的位置关系有三种：直线在平面内、直线与平面相交、直线与平面平行. 要注意，后两种又统称为直线在平面外.

2. 证明直线和平面平行的方法有：(1) 根据定义采用反证法；(2) 利用线面平行的判定定理（线//线⇒线//面）.

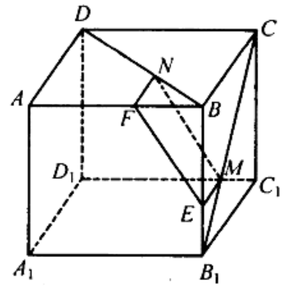
3. 证明直线与直线平行的方法有：(1) 利用线线平行定义，证共面且无公共点；(2) 利用三线平行公理，(3) 利用线面平行的性质定理（线//面⇒线//线）.

4. 辅助线（面）是解决有关线面问题的关键，要充分发挥辅助面在化空间问题为平面问题中的转化作用.

典型例题导引

【例 1】　正方体 AC_1 中，点 N 在 BD 上，点 M 在 B_1C 上，且 $CM=DN$. 求证：MN//平面 AA_1B_1B.

【分析】 要证 $MN /\!/$ 平面 AA_1B_1B，根据线面平行的判定定理，需在平面 AA_1B_1B 内找到与 MN 平行的直线，要充分利用 $CM=DN$ 这一条件.

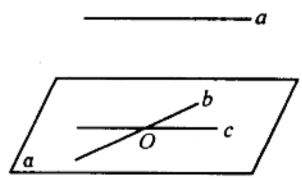


【证明】 作 $ME /\!/ BC$，$NF /\!/ AD$ 分别交 BB_1 和 AB 于 E、F，连接 EF. 由 $\dfrac{ME}{BC}=\dfrac{B_1M}{B_1C}$ 与 $\dfrac{NF}{AD}=\dfrac{BN}{BD}$，又由已知 $CM=DN$，可证得 $ME \underline{/\!/} NF$，$\therefore$ $MNFE$ 是平行四边形，$\therefore$ $MN /\!/ EF$. 又 $MN \not\subset$ 平面 AA_1B_1B，$EF \subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore$ $MN /\!/$ 平面 AA_1B_1B.

【评析】 本题是将证“线面平行”转化为证“线线平行”.

【例 2】 经过二异面直线中的一条直线与另一条平行的平面有几个？证明你的结论.

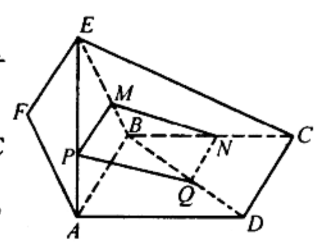


【讲解】 如图所示，设 a，b 是两条异面直线，在 b 上任取一点 O，过 O 作直线 $c /\!/ a$，则相交直线 b、c 可确定一个平面 α，从 $a /\!/ c$，$c \subset \alpha$ 且 $a \not\subset \alpha$ 知 $a /\!/ \alpha$，故过 b 存在平面 α 平行于直线 a. 下面证唯一性.

假设平面 α' 也是过 b 且与直线 a 平行的另一个平面. 设过平行直线 a、c 的平面为 β，且 $\beta \cap \alpha'=c'$，则 c' 与 c 相交于 O 点，且 $c' /\!/ a$，即在平面 β 内过点 O 有两条直线 c、c' 都与 a 平行，与平面几何中的平行公理矛盾，这不可能. 故除平面 α 外，再无过 b 且与 a 平行的平面. 因此，过两条异面直线中的一条而与另一条平行的平面有且只有一个.

【点评】 “存在”是定性问题，“唯一”是定量问题，对存在性问题的证明往往用构造法，而唯一性的证明一般是用反证法，本题反映的这个命题很重要，保证了异面直线公垂线的唯一性.

【例 3】 已知有公共边 AB 的两个全等的矩形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 不在同一个平面内，P、Q 分别是对角线 AE、BD 上的点，且 $AP=DQ$，如下图. 求证：$PQ /\!/$ 平面 CBE.



【分析】 显然，直线 PQ 在平面 CBE 外，因此要证明 $PQ /\!/$ 平面 CBE，只需在平面 CBE 内找一条直线，使 PQ 平行于这条直线.

【证明】 作 $PM /\!/ AB$ 交 BE 于点 M，作 $QN /\!/ AB$ 交 BC 于点 N，则 $PM /\!/ QN$. 由 $\dfrac{PM}{AB}=\dfrac{EP}{EA}$，$\dfrac{QN}{CD}=\dfrac{BQ}{BD}$，$AP=DQ$，可得 $EP=BQ$，又 $\because$ $AB=CD$，$EA=BD$，$\therefore$ $PM \underline{/\!/} QN$，

$\therefore$ 四边形 $PMNQ$ 是平行四边形，$\therefore$ $PQ /\!/ MN$，又 $\because$ $PQ \not\subset$ 平面 CBE，

$MN \subset$ 平面 $\subset BE$，$PQ /\!/ MN$，$\therefore$ $PQ /\!/$ 平面 CBE.

【另分析】 如果 PQ 和平面 BCE 真的平行，那么经过 PQ 的平面和平面 BCE 的交线必然平行，这样就可考虑延长 AQ 交 BC 的延长线于 G，连 EG，则 EG 应和 PQ 平行. 是否平行呢？再分析，只要 $\dfrac{AQ}{QG}=\dfrac{AP}{PE}$ 即可，而 $\dfrac{AQ}{QG}=\dfrac{DQ}{QB}$ 由已知可证得上式（证明略）.