

大象 专题

教材精讲
与中考
试题研究

北京名师新奉献

一元二次方程

初中数学

丛书主编 希 扬

6969



大象出版社

大象专题——教材精讲与中考试题研究

一元二次方程

丛书主编 希 扬
本册编写 刘燕燕
责任编辑 史 军
责任校对 方 丽
版式设计 尚文生

出 版	大象出版社 (郑州市经七路 25 号 邮政编码 450002)
网 址	www. daxiang. cn
发 行	大象出版社总发行部
经 销	全国新华书店
制 版	河南第一新华印刷厂
印 刷	河南第二新华印刷厂
版 次	2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷
开 本	890 × 1240 1/32
印 张	6 5
字 数	241 千字
印 数	1—5 000 册
书 号	ISBN 7 - 5347 - 3341 - 3/G · 2748
定 价	7. 80 元

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。

印厂地址 郑州市商城路 231 号

邮政编码 450000

电话 (0371) 6222800 - 3081

编委会名单

总策划：大象出版社

丛书主编：希 扬

副主编：彭广仁 魏秀敏 李 利
孔 杰 彭 勃

编 委：封学英 赵 霞 李瑞萍
翁文利 陈 方 李 健
马 静 高金华 郝宏文
陈育红 冯 鸣 姜立波
隋 芳 张永忠 李历清
刘丽桦

执行策划：北京斜阳编辑服务中心

编写说明

在学习的过程中,每个学生都会遇到不同的难关,有人学不好数学的三角函数,有人最怵物理的受力分析,还有人看到有机化学的题就发蒙。而传统的同步类辅导书在指导学生学习时,以年级划分、章为单位,平均分配兵力,很难针对学生的弱点对症下药。因此大象出版社经过深入的市场调研和精心策划,专门组织高水平的作者队伍,为学生编写了这套突破专题知识的丛书。

本书共分为数理化三科,按照知识块分专题成书,根据教育部最新的《国家课程标准》及教学过程中公认的知识体系编写,不局限于某一版本的教材,可适用于各地使用各种版本教材的教师和学生。旨在通过详细的讲解和训练,使学生在某一年级某一学习阶段就某一专题达到牢固掌握的水平,并通过密切联系中(高)考来拓展和深化该专题的知识体系,使学生在中(高)考中获得好成绩。

丛书各专题内容为相对独立的知识块,按先基础后综合的模式编写。基础部分按教学过程中的相关章节编写,各章分为知识讲解和中(高)考试题研究两部分。知识讲解部分的内容有:

专题概述:描述本专题知识在学科学习中的地位、作用及历年来在中(高)考中被考查的情况。

知识网络:包括专题知识网络和本章知识网络。以框图形式勾勒本章知识结构及知识之间相关联系,在学生头脑中留下清晰的知识脉络。

精讲·精析·精练:重在打基础,将知识点讲透练透。讲解与例题力求精准、透彻、全面,不是仅仅停留在教材水平上,而是将教师教学经验融于其中,讲出理解问题的关键点、记忆的窍门、易混易错之处。通过叙述、对比、点拨等手段解决学生初学知识点时的所有困惑,使学生牢固掌握概念,打好学习基础。

设置重点难点热点、知识点精析、典型例题分析、夯实基础训练几个栏目。

巩固·拓展·提高:重在提高和拓展,这部分源于课本知识,但更丰富和深入。旨在使学生开阔眼界,提高能力,内容为水平高、难度大的综合性较强的知识和题目,满足学生提高和在考试中取得好成绩的需要。设置疑难互动问答、进阶例题研究、拓展提高训练几个栏目。

中(高)考试题研究则是以本章知识在中(高)考中的历年试题(各地各类)为研究对象和写作内容,站在中(高)考的高度上对一章知识进行综合,将知识的学习和应用提高到一个新的水平上。设置:中(高)考数据分析、中(高)考经典回放、中(高)考题型设计、中(高)考实战演练几个栏目。

专题知识综合应用是放在全书最后的综合内容,将整个专题知识放到学科学习和3+X高考情境中研究。设置专题知识整合、联系实际应用、3+X解读、专题知识综合测试等栏目。其中3+X解读栏目又由学科内综合解读、学科内综合应用训练、理科综合解读、理科综合应用训练、文理大综合解读、文理大综合应用训练等内容组成。这部分内容旨在培养学生综合利用知识解决问题的能力。

通过“基础—提高—综合—应用”这几个层面逐渐深入地学习专题知识,我们期待着每一位使用《大象专题》的学生都能在这一专题的学习中打下牢固的基础,取得长足的进步。鉴于本书编写难度大、时间紧,疏漏在所难免,恳请广大读者批评指正,以便再版时完善。

《大象专题》编委会

目 录

● 专题概述

专题知识网络	1
--------------	---

● 第一章 一元二次方程

本章知识网络	2
1.1 一元二次方程	3
1.2 一元二次方程的解法	10
1.3 一元二次方程的根的判别式	30
1.4 一元二次方程的根与系数的关系	44
1.5 二次三项式的因式分解	68
1.6 一元二次方程的应用	81
中考试题研究	97
本章综合测试	105

● 第二章 可化为一元二次方程的方程或方程组

本章知识网络	110
2.1 分式方程和无理方程	111
2.2 列分式方程解应用题	130
2.3 简单的二元二次方程组	145
中考试题研究	161
本章综合测试	166

目 录

● 专题知识综合应用

专题知识整合	170
联系实际应用	182
专题知识综合测试	186

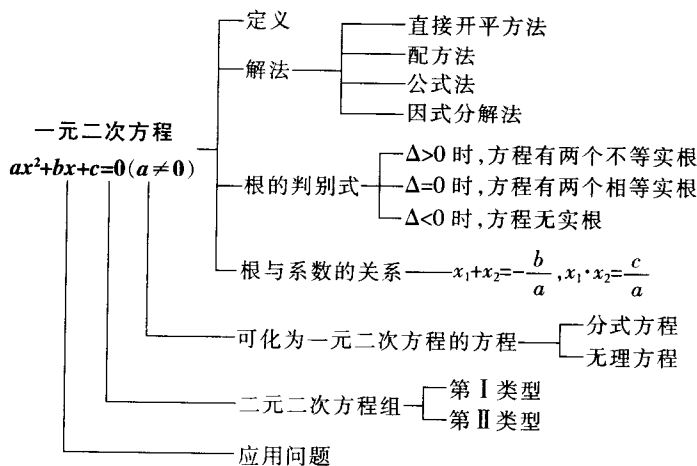
一元二次方程是中学数学的主要内容之一,在初中代数中占有重要的地位.本书知识的学习,在全部代数知识的学习中起着承上启下的作用,它既是对已学过的知识(实数、整式、分式、根式和一元一次方程)的巩固和加深,又是为今后学习指数、对数、三角函数方程、不等式、函数等内容奠定基础.一元二次方程作为工具,几乎无处不用.因此,要想学好数学就一定要把一元二次方程学好学扎实.

本书各章节主要知识在全国各地的中考试卷中所占分数比例大致如下表:

内容	与一元二次方程解法有关的问题	一元二次方程根的判别式及根与系数的关系	分式方程	应用问题
所占分数百分比	10% ~ 15%	7.5% ~ 10%	5% ~ 8%	5% ~ 12%



专题知识网络

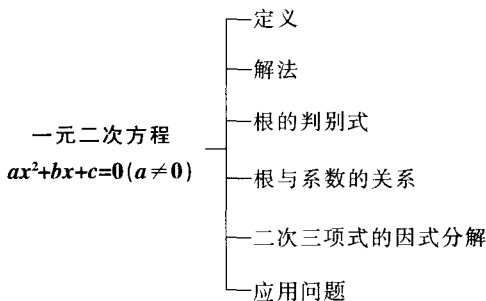


第一章

一元二次方程



本章知识网络



本章知识主要是一元二次方程的解法. 在求解的过程中, 我们发现有的方程有解, 而有的方程无解, 且方程两根的和与积与方程的系数间有着内在的联系, 于是引出了一元二次方程根的判别式和根与系数的关系. 此外, 利用求根公式还可解决二次三项式在实数范围内的分解问题. 最后, 还可通过列一元二次方程解决实际问题. 本章的重点是一元二次方程的解法. 难点是配方法和列方程解应用题. 关键是熟练掌握一元二次方程的解法, 特别是公式法.



1.1 一元二次方程

精讲·精析·精练

重点难点连接点

重点 1. 整式方程的概念. 2. 一元二次方程的定义. 3. 一元二次方程的一般形式.

难点 一元二次方程的一般形式的正确理解及其各项系数的确定.

知识网络连接点 1. 一元二次方程的定义. 2. 一元二次方程的一般形式.

知识点精析

1. 整式方程的概念

方程的两边都是关于未知数的整式, 这样的方程叫做整式方程, 如一元一次方程和一元二次方程都是整式方程.

注意: 有些含字母系数的方程, 尽管分母中含有字母, 但只要分母中不含未知数, 这样的方程仍是整式方程. 如 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 (a \neq 0)$ 就是关于 x 的整式方程.

2. 一元二次方程的定义

方程经变形后, 能化为最简形式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 它只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2, 最高次项的系数不等于 0, 这样的整式方程叫做一元二次方程.

一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 其中 ax^2 叫做二次项, a 叫做二次项系数; bx 叫做一次项, b 叫做一次项系数; c 叫做常数项.

注意: 一元二次方程中二次项是不可缺少的项, 因此 $a \neq 0$ 这一条件必不可少.

3. 不完全的一元二次方程

我们把缺一次项或常数项的一元二次方程称为不完全的一元二次方程. 一元二次方程可分类如下:

$$\text{一元二次方程 } \begin{cases} \text{完全的一元二次方程 } ax^2 + bx + c = 0 (b \neq 0, c \neq 0) \\ ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \end{cases} \begin{cases} ax^2 + c = 0 (b = 0, c \neq 0) \\ \text{不完全的一元二次方程 } \begin{cases} ax^2 + bx = 0 (b \neq 0, c = 0) \\ ax^2 = 0 (b = 0, c = 0) \end{cases} \end{cases}$$

4. 把一元二次方程化成一般形式

任何一个一元二次方程经过变形(去分母、去括号、移项、合并同类项)都可以化成一般形式. 在确定二次项系数、一次项系数和常数项时, 必须把一元二次方程化为一般形式. 另外, 各项系数和常数项除了数值外, 还必须带符号.

典型例题分析

例 1 判断下列关于 x 的方程是不是一元二次方程:

$$(1) x^2 + 4x = 0; \quad (2) x^2 - 3xy + 2y^2 = 0; \quad (3) \frac{x}{x^2 + 3} = -2;$$

$$(4) \sqrt{3x-1} = -x; \quad (5) 3x(x-3) = 3x^2 - 5; \quad (6) ax^2 + bx + c = 0;$$

$$(7) \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{6} = 0; \quad (8) px^2 - 3x + q = 0 (p \neq 0).$$

分析 一元二次方程必须具备下列三个条件: 1. 是整式方程; 2. 经化简后只含一个未知数; 3. 未知数的最高次数是 2, 用上述三条标准去判断.

解 方程(3)(4)不是整式方程, 故不是一元二次方程. 方程(5)化简后得 $9x - 5 = 0$, 故不是一元二次方程. 方程(6)未明确 $a \neq 0$, 故它不是一元二次方程. 方程(2)是关于 x 的一元二次方程, 若把 x, y 都看作是未知数, 则它不是一元二次方程. 因此, 方程(1)(2)(7)(8)是一元二次方程.

点拨 判断是否是一元二次方程, 先看是否是整式方程, 再将方程化为一般形式, 然后根据一元二次方程的定义这三要点进行判别.

例 2 关于 x 的方程:

(1) $(m+1)x^2 - (m-1)x = 2m$; (2) $(m^2+2)x^2 - mx + (m-5) = 0$. 若都是一元二次方程, 分别求出 m 的取值范围.

分析 这是考查一元二次方程的一般形式附加条件的问题, 只要 $a \neq 0$ 即可.

解 (1) 由 $m+1 \neq 0$, 得 $m \neq -1$.

(2) $\because m^2 \geq 0, \therefore m^2 + 2 > 0$, 即 $m^2 + 2 \neq 0, \therefore m$ 可取任意实数.

点拨 在今后有关一元二次方程的待定系数的求解问题中, 一定要注意 $a \neq 0$ 这一条件.

例 3 将下列关于 x 的一元二次方程化成一般形式, 再写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

$$(1) (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + (2x - 1)^2 = x - 2; \quad (2) x^2 - a(3x - 2a + b) - b^2 = 0.$$

分析 一元二次方程的一般形式是等号左边关于未知数的降幂排列, 右边为 0. 根据题设, 方程(2)中的 a, b 均为常数.

解 (1) 去括号、移项、合并同类项得: $5x^2 - 5x + 1 = 0$. $\therefore$ 二次项系数是 5,

一次项系数是 -5 , 常数项是 1 .

(2) 去括号、合并同类项得: $x^2 - 3ax + 2a^2 - ab - b^2 = 0$. $\therefore$ 二次项系数是 1 , 一次项系数是 $-3a$, 常数项是 $2a^2 - ab - b^2$.

点拨 一元二次方程中各项的系数均是相对于一元二次方程的一般形式而言的. 要确定方程的各项系数首先应将方程化为一般形式. 此外, 在写各项系数时一定要注意符号. 如方程(1)中的一次项系数是 -5 , 而不是 5 .

夯实基础训练

一、选择题

1. 下列方程是一元二次方程的是()

A. $bx + x^2 = 8$

B. $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{2}{3}$

C. $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 3 = 0$

D. $(\sqrt{2} - 1)x^2 = \sqrt{2} + 1$

2. 方程 $3(x - 2)^2 = 4$ 化为一元二次方程一般形式后, 二次项系数、一次项系数、常数项分别为()

A. $3, 12, 12$

B. $3, -12, 8$

C. $3, 12, 8$

D. $3, -12, 4$

3. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程的条件是()

A. a, b, c 为任意实数

B. a 与 c 异号

C. a 与 c 不同时为零

D. a 取不为零的实数

4. 一元二次方程 $-x^2 + 3x + 4 = 0$, 把二次项系数变为正数, 且使方程的根不变的是()

A. $x^2 + 3x + 4 = 0$

B. $x^2 - 3x + 4 = 0$

C. $x^2 + 3x - 4 = 0$

D. $x^2 - 3x - 4 = 0$

5. 下列方程是不完全的一元二次方程的是()

A. $2x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 3$

B. $5x^2 = x - 8$

C. $(2x)^2 = (x - 1)^2$

D. $x^2 - 3(x + 4)(x - 4) = 0$

二、填空题

6. 一元二次方程的一般形式是_____.

7. 方程 $-2x^2 + 10 = 0$ 的一次项系数是_____.

8. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - a(2ax - b) = 3$ 中, 常数项是_____.

9. 若方程 $kx^2 + 5x = 2x^2 + 3$ 是一元二次方程, 则 k 的取值范围是_____.

10. 当 m _____ 时, 方程 $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x - m = 0$ 是关于 x 的一元一次方程; 当 m _____ 时, 上述方程是关于 x 的一元二次方程.

答案与解析

1. 解: A 有两个未知数, 不是; B 不是整式方程; C 最高次数是 4; D 是一元二次方程. 答案: D. 点拨: 用一元二次方程定义的四条标准去判断.

2. 解: 去括号、移项、合并同类项得方程 $3x^2 - 12x + 8 = 0$. 答案: B. 点拨: 确定二次项系数、一次项系数及常数项前应先将方程化成一般形式. 此外, 不要丢掉符号.

3. 解: 根据一元二次方程定义, 只须 $a \neq 0$ 即可. 答案: D.

4. 解: 根据等式性质, 方程两边都乘 -1 , 得到 $x^2 - 3x - 4 = 0$. 答案: D.

5. 解: A 化简后为 $2x^2 - x - 3 = 0$; B 化简后为 $5x^2 - x + 8 = 0$; C 化简后为 $3x^2 + 2x - 1 = 0$; D 化简后为 $-2x^2 + 48 = 0$. 答案: D. 点拨: 是否是不完全的一元二次方程, 关键看化简后是否缺一次项或常数项.

6. 答案: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.

7. 答案: 0.

8. 解: 化简后得 $x^2 - 2a^2x + ab - 3 = 0$, 常数项是 $ab - 3$.

9. 解: 原方程化为 $(k-2)x^2 + 5x - 3 = 0, k-2 \neq 0, \therefore k \neq 2$.

10. 解: 当 $m+1=0$ 即 $m=-1$ 时, 方程是关于 x 的一元一次方程, 当 $m+1 \neq 0$ 即 $m \neq -1$ 时, 方程是关于 x 的一元二次方程. 答案: $m = -1, m \neq -1$.

巩固·拓展·提高

疑难互动问答

? 判断一个方程是否是一元二次方程, 应注意什么?

? 除了看是否满足三个条件外, 还应注意不能只看表面现象. 例如 $3x^2 - 2y + 2(x+y) - \frac{1}{3} = 0$, 不仔细看一定认为它是二元的, 但经整理后实际上是一元二次方程. 又如 $2x(x-3) = 2x^2 - 7$, 表面上看是一元二次方程, 但经整理后得 $-6x + 7 = 0$, 并不是一元二次方程. 所以, 要判定一个方程是否是一元二次方程, 应先整理成一般形式后再判断.

? 为什么说 $a \neq 0$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的重要组成部分?

? 因为只有当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 才能叫做一元二次方程, 而当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 它是一元一次方程. 如果题设明确指出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程, 那么 $a \neq 0$ 的条件就被隐含在题设中. 这一点非常重要.

? 如果条件是用“关于 x 的一元二次方程”这样的语句表述的,它意味着什么?

? 它就隐含了二次项系数不为零的条件.例如,“关于 x 的一元二次方程 $(m^2 - 1)x^2 - (m + 2)x + 3m = 0$ ”,这时题设中就隐含了 $m \neq \pm 1$ 的条件.这一点容易忽视,一定要注意.

? 如果条件是用“关于 x 的方程”这样的语句表述的,它意味着什么?

? 此时,就要对二次项的字母系数进行讨论.例如,“关于 x 的方程 $(m^2 - 1)x^2 - (m + 2)x + 3m = 0$ ”,这时就有两种情形,当 $m = \pm 1$ 时,它是一元一次方程;当 $m \neq \pm 1$ 时,它是一元二次方程.

进阶例题研究

例 1 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是()

A. $ax^2 + bx + c = 0$

B. $5k^2 - kx + 4 = 0$

C. $2x^3 - 4x^2 + x = 0$

D. $(m^2 + 1)x^2 - \sqrt{2}x = 0$

分析 所谓“关于 x 的方程”,就是指方程中只有 x 是未知数,而其他字母都可看作是已知数.因此判断如下:A 不一定是一元二次方程,因为缺少 $a \neq 0$ 这一条件;B 中未知数最高次数是 1;C 中未知数最高次数是 3;D 中二次项系数 $m^2 + 1$ 一定是正数,因而一定不等于零,所以 D 是一元二次方程.

解 选 D.

点拨 “关于 x 的方程”,实指方程中只有 x 是未知数,而其他字母都是常数,可看作是已知数.

例 2 当 m 为何值时,方程 $(m + 1)x^{12m+1} - 2mx = 1$ 是关于 x 的一元二次方程?

分析 根据一元二次方程的定义求解.

解 由 $12m + 1 = 2$, 得 $m = \pm 1$. 又 $\because m + 1 \neq 0, \therefore m \neq -1, \therefore m = -1$ 舍去, $\therefore m = 1$.

点拨 此题不仅要考虑 x 的指数是 2,还要考虑二次项系数不等于 0.

例 3 试判断关于 x 的方程 $3x^2 - 2x(mx + m - 4) = x$ 是不是一元二次方程.

分析 先把方程化为一般形式,再分情况讨论.

解 去括号、移项、合并同类项得 $(3 - 2m)x^2 - (2m - 7)x = 0$, 当 $3 - 2m = 0$ 即 $m = \frac{3}{2}$ 时,原方程不是一元二次方程;当 $3 - 2m \neq 0$, 即 $m \neq \frac{3}{2}$ 时,原方程是一元二次方程.

点拨 审题时特别要注意“关于 x 的方程”与“关于 x 的二次方程”的区别,前者要分两种情形讨论,后者则隐含着条件“二次项系数不等于 0”.

例 4 若 $x^{a+b} - 3x^{a-b} + 2 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程,试确定 a, b 的值.

分析 此题与前两例类型相同,但难于前例.一般同学会认为有两解,即 $\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=1, \\ a-b=2. \end{cases}$ 但是这样考虑还不够全面,实际上, $a+b$ 和 $a-b$ 至少有一个为 2 即可,所以,此题应有五种情形.

解 由题意: $\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=1, \\ a-b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+b=1, \\ a-b=1 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=0, \\ a-b=2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=2, \\ b_1=0; \end{cases} \begin{cases} a_2=\frac{3}{2}, \\ b_2=\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} a_3=1, \\ b_3=1; \end{cases} \begin{cases} a_4=\frac{3}{2}, \\ b_4=-\frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} a_5=1, \\ b_5=-1. \end{cases}$

拓展提高训练

一、选择题

- 无论 a 为什么实数,下列方程中一定是关于 x 的一元二次方程的是()
 A. $2ax^2 + bx + c = 0$ B. $(a^2 - 1)x^2 + bx - c = 0$
 C. $|a|x^2 + bx + c = 0$ D. $(a^4 + 1)x^2 - bx - c = 0$
- 若 $(b-1)^2 + a^2 = 0$,则下列方程中是一元二次方程的是()
 A. $(a-1)x^2 + (b-1)x - 5 = 0$ B. $(b^2 - 1)x^2 = 5 - (a+2)x$
 C. $ax^2 + 4x - b = 0$ D. $(b-1)x^2 + ax - 1 = 0$
- 把关于 x 的方程 $mx^2(x+1) = mx^3 + nx^2 + px + q (m \neq n)$ 化成一元二次方程的一般形式后, a, b, c 分别为()
 A. $a = m - n, b = p, c = q$ B. $a = m - n, b = -p, c = q$
 C. $a = m - n, b = -p, c = -q$ D. $a = m - n, b = p, c = -q$
- 如果 $(3k+1)x^2 + 2kx = -3$ 是关于 x 的一元二次方程,那么不等式 $\frac{k-1}{2} \geq \frac{4k+1}{3} - 1$ 的解集是()
 A. $k \leq \frac{1}{5}$ B. $k \leq \frac{1}{5}$ 且 $k \neq -\frac{1}{3}$
 C. $k \geq \frac{1}{5}$ D. $k \geq \frac{1}{5}$ 且 $k \neq -\frac{1}{3}$

二、填空题

5. 方程 $(m^2 - 9)x^2 + (m - 3)x + 2m - 1 = 0$, 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 为一元一次方程;

当 m _____ 时,为一元二次方程.

6. 方程 $(m-3)x^{m^2-5m+8} + (m-2)x + 7 = 0$, 当 m _____ 时, 方程是一元二次方程.

7. 若方程 $my^2 + (m+2)y^3 - y + 3 = 0$ 是关于 y 的一元二次方程, 则 m _____.

8. 若关于 x 的方程 $(m+1)x^{|1-m|} + mx - 1 = 0$ 是一元二次方程, 则 m _____.

三、解答题

9. 关于 x 的方程 $(6m^2 - m - 5)x^{m+1} + 5x = 15$ 可能是一元二次方程吗?

10. 如果 $2x^2 - 3x - 1$ 与 $a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 是同一个多项式的不同形式, 求 $\frac{a-b}{c}$ 的值.

11. 试证明关于 x 的方程 $(m^2 - 4m + 6)x^2 - 3m - 8 = 0$, 不论 m 取何值, 该方程都是一元二次方程.

答案与解析

1. 解: A 中缺少条件 $a \neq 0$, 所以不一定. B 中当 $a = \pm 1$ 时, $a^2 - 1 = 0$, 即它不一定是. C 中 $|a|$ 有可能为 0. D 中 $a^4 + 1$ 一定大于 0, 符合定义, 所以应选 D.

答案: D. 点拨: 判断方程是否是一元二次方程, 只看二次项系数是否为零, 不看正负性.

2. 解: 由非负数性质得 $b-1=0$ 且 $a=0$, 即 $a=0, b=1$, 将它们代入各选项中, 用定义去判断得到只有 A 中方程符合题意. 答案: A. 点拨: 这里用到非负数的一个重要性质: 几个非负数相加得 0, 则每个数必是 0.

3. 解: 把方程整理得 $(m-n)x^2 - px - q = 0$, 因而 $a = m-n, b = -p, c = -q$. 答案: C. 点拨: a, b, c 一定要带上符号.

4. 解: 由题意 $3k+1 \neq 0$, 即 $k \neq -\frac{1}{3}$, 又解不等式得 $k \leq \frac{1}{5}$, 二者合起来得到 $k \leq \frac{1}{5}$ 且 $k \neq -\frac{1}{3}$. 答案: B. 点拨: 一道题中同一字母表示同一个数量, 要全面考虑问题.

5. 解: 当 $m^2 - 9 = 0$ 且 $m-3 \neq 0$, 即 $m = -3$ 时, 为一元一次方程; 当 $m^2 - 9 \neq 0$, 即 $m \neq \pm 3$ 时, 为一元二次方程. 答案: $m = -3, m \neq \pm 3$.

6. 解: 由题意, $m^2 - 5m + 8 = 2$ 且 $m-3 \neq 0$, 即 $m = 2$.

7. 解: 由题意, $m+2=0$ 且 $m \neq 0$, 即 $m = -2$.

8. 解: 由题意, $|1-m|=2$ 且 $m+1 \neq 0$, 即 $m = 3$. 点拨: 注意 $|1-m|=2$ 的解有两个: $m_1 = 3, m_2 = -1$, 但 $m = -1$ 不合题意舍去.

9. 解: 由题意, $m+1=2$ 即 $m=1$, 代入 $6m^2-m-5=0$, 此时, 方程不是一元二次方程. 故该方程不可能是一元二次方程.

10. 解: 由题意, $2x^2-3x-1 \equiv a(x-1)^2+b(x-1)+c$, 整理得 $2x^2-3x-1 \equiv ax^2+(b-2a)x+a-b+c$, 得
$$\begin{cases} a=2, \\ b-2a=-3, \\ a-b+c=-1. \end{cases} \text{ 解之得 } \begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=-2. \end{cases} \therefore \frac{a-b}{c} = -\frac{1}{2}. \quad \text{答案: } -\frac{1}{2}. \quad \text{点拨: “} \equiv \text{” 是“恒等于”符号. 一般可通过“} \equiv \text{” 两边的对应系数相等, 得到相应的方程组来求解.}$$

11. 解: $\because m^2-4m+6 = m^2-4m+4+2 = (m-2)^2+2 > 0, \therefore m^2-4m+6 \neq 0. \therefore$ 不论 m 取何值, 原方程都是一元二次方程. 点拨: 这里对于 m^2-4m+6 的变形方法叫做“配方法”, 这是一种非常重要的数学方法, 希望同学们注意使用.



1.2 一元二次方程的解法

精讲·精析·精练

重点难点连接点

重点 1. 用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b(b \geq 0)$ 的方程. 2. 用配方法解形如 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 中的数字系数的一元二次方程. 3. 用一元二次方程求根公式解一元二次方程. 4. 用因式分解法解一元二次方程.

难点 1. 对二次三项式 $ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的配方. 2. 求根公式的推导及运用求根公式时运算的准确性. 3. 灵活选用适当的方法解一元二次方程. 4. 解字母系数的一元二次方程.

知识网络连接点 1. 一元二次方程的求根公式. 2. 因式分解法解一元二次方程.

知识点精析

1. 直接开平方法

如果一元二次方程的一边是含有未知数的代数式的平方, 另一边是一个非负的常数, 那么就可以用直接开平方法求解. 这种方法适合解形如 $a(x-b)^2=c$ 的