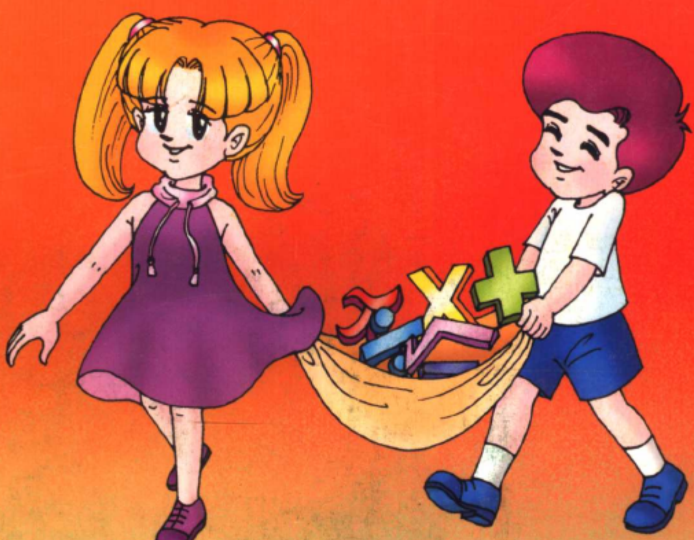
高中暑假作业

GAOZHONGSHUJIAZUOYE

数学

二年级



浙江教育出版社

高中暑假作业·数学 二年级

浙江省教育厅教研室/编

责任编辑 华 琼 汪 晖 **责任校对** 郑德文
装帧设计 韩 波 **责任印务** 温劲风

▶ **出　　版** 浙江教育出版社
（杭州市天目山路40号　邮编310013）
▶ **发　　行** 浙江省新华书店集团有限公司
▶ **图文制作** 杭州兴邦电子印务有限公司
▶ **印　　刷** 杭州长命印刷有限公司
▶ **开　　本** 787× 1092 1/16
▶ **印　　张** 4.5
▶ **字　　数** 105 000
▶ **版　　次** 2003年5月第1版
▶ **印　　次** 2006年5月第4次
▶ **印　　数** 00001—23500
▶ **书　　号** ISBN 7-5338-4759-8/G·4729
▶ **定　　价** 4.60元

联系电话：0571-85170300-80928
E-mail: zjjy@zjcb.com
网　　址：www. zjeph.com

编写说明

课程改革的目标之一是改变过于强调接受学习、死记硬背、机械训练的教学状况，倡导学生主动参与、乐于探究、勤于动手，培养学生搜集和处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力。这套暑假作业的编写力图体现这一要求。它遵循教学大纲规定的教学范围和要求，但不拘泥于教材内容，不拘泥于常规练习方式。暑假作业的设计既复习已学知识，又准备后续学习，并有助于学生的自主发展。

暑假生活应该是愉快的、丰富多彩的，但在身心放松的同时，有计划地安排时间进行学习也是必要的。我们期望暑假作业能满足同学们的这种需要。

这套暑假作业（高中部分学科）是根据教育部2000年1月颁发的《全日制普通高级中学课程计划（试验修订稿）》及相应学科教学大纲组织编写的，全套含语文、数学、外语、理科综合、文科综合五种，分高一、高二两个年级，共十册。

这套暑假作业由浙江省教育厅教研室统一组织编写。参与高中数学暑假作业编写的人员有：王而冶、许芬英、金克勤、李学军、占章根、郑日锋等；参加本册编写的人员有：金克勤、李学军等，由张金良负责统稿。

浙江省教育厅教研室

2003年3月

____月____日 星期____

1. 若$6<a<10$，$\frac{1}{2}a\leqslant b<2a$，$c=a+b$，则$c$满足的关系是(　　).

(A) $9<c<30$　　(B) $9\leqslant c<18$　　(C) $9<c\leqslant 18$　　(D) $15\leqslant c<30$

2. 设$a>b>0$，且$a+b=1$，则a^2+b^2，$2ab$，a，b，$\frac{1}{2}$的大小关系是(　　).

(A) $a^2+b^2>2ab>\frac{1}{2}>a>b$　　(B) $a^2+b^2>2ab>a>b>\frac{1}{2}$

(C) $a^2+b^2>2ab>a>\frac{1}{2}>b$　　(D) $a>a^2+b^2>\frac{1}{2}>2ab>b$

3. 已知$a,b,c,d\in(0,+\infty)$，且$a>b$，则$\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$，$\frac{b+c}{a+c}$，$\frac{a+d}{b+d}$的大小关系是________________.

4. 设三角形的三边长为3，4，5，P是三角形内一点，则P到这个三角形三边距离乘积的最大值是________.

5. 若$a\in\mathbf{R}$，$a\neq 1$，比较$\frac{1}{1+a}$与$1-a$的大小.

6. 已知a,b,c为互不相等的正数，且$abc=1$. 求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

第1天

阅读思考　算术平均数与几何平均数定理的几何解释

在教科书中，算术平均数与几何平均数定理的几何解释是：如图1－1，以$a+b$长的线段为直径作圆，在直径AB上取点C，使$AC=a$，$CB=b$. 过点C作垂直于直径AB的弦DD'，连接AD，DB. 由$\text{Rt}\triangle ACD\backsim\text{Rt}\triangle DCB$，得$CD^2=CA\cdot CB$，即$CD=\sqrt{ab}$. 这个圆的半径是$\frac{a+b}{2}$，显然，它大于或等于$CD$，即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当点$C$与圆心重合，即

$a=b$时，等号成立.

现在，再给出另外两种几何解释：

(1) 在周长一定的所有矩形中，正方形的面积最大.

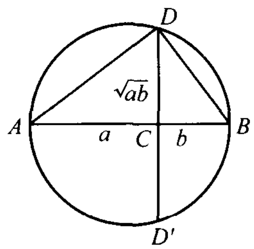


图 1—1

证明：设矩形相邻两边长分别为 a,b，则其算术平均数 $m=\frac{a+b}{2}$. 再设 $t=\frac{a-b}{2}$，有 $a=m+t,b=m-t$，

$\because$ $ab=(m+t)(m-t)=m^2-t^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-t^2$.

$\because$ $t^2\geqslant 0$， $\therefore$ $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

$\because$ $a+b=$定值， $\therefore$ 仅当 $t=0$，即 $a=b=m$ 时等号成立. 也就是说，当 $a=b$ 时，矩形面积取最大值，此时矩形为正方形.

(2) 在面积一定的所有矩形中，正方形的周长最小.

证明：设 $a\cdot b=m$，则 $b=\frac{m}{a}$，矩形的周长为 $2a+2b=2\left(a+\frac{m}{a}\right)=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{m}{a}}\right)^2+4\sqrt{m}$.

$\because$ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{m}{a}}\right)^2\geqslant 0$， $\therefore$ $2a+2b\geqslant 4\sqrt{m}$，即 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{m}{a}}\right)^2=0$，即 $a=b$ 时等号成立.

又$\because$ m 为定值， $\therefore$ 当 $a=b$ 时，矩形的周长取最小值，这时矩形为正方形.

由此我们不难得到下列命题：

(1) 在周长等于定值的所有三角形中，正三角形的面积最大；而面积等于定值的所有三角形中，正三角形的周长最小. 特别地，当三角形为直角三角形时，若其周长为定值，则面积最大的是等腰直角三角形；若面积为定值，则当两直角边相等时，周长取最小值.

(2) 在全面积等于定值的圆柱中，当其高等于底面直径时，其体积取最大值；反之，在体积等于定值的圆柱中，当高等于其底面直径时，全面积取最小值.

上述结论被人们广泛应用于茶杯、罐头和听装饮料瓶的设计生产中，体现了数学知识在解决生产、生活实际问题中的作用.

练一练 某饮料厂要求设计一种圆柱体形罐装饮料桶，设底面半径为 r，高为 h，体积为 V.

(1) 若罐装饮料桶的上、下底面厚度都是侧面厚度的 2 倍，则 r 与 h 之比是多少时用料最省？

(2) 当罐装饮料桶的上、下底面厚度都是侧面厚度的 k 倍时，r 与 h 之比是多少时用料最省？

(3) 当罐装饮料桶的侧面与底面厚度相同时，r 与 h 之比是多少时接缝最少(接缝需焊接或卷边，接缝少则省工省力)？

___月___日 星期___

1. 设 x,y,z 都是正数，且 $x^2+y^2=z^2$，则 x^3+y^3 与 z^3 的大小关系是(　　).

(A) $x^3+y^3=z^3$　　(B) $x^3+y^3>z^3$　　(C) $x^3+y^3<z^3$　　(D) 不能确定

2. 若 $a>b>1$，设 $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则 P,Q,R 的大小关系是(　　).

(A) $R<P<Q$　　(B) $P<Q<R$　　(C) $Q<P<R$　　(D) $P<R<Q$

3. 已知 $f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=x^2+1$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$的取值范围是____________.

4. 已知 a,b,x_1,x_2 都是正数，且它们互不相等. 若 $y_1=\frac{ax_1+bx_2}{a+b}$，$y_2=\frac{ax_2+bx_1}{a+b}$，则 y_1y_2 与 x_1x_2 的大小关系是____________.

5. 若 $a,b\in(0,+\infty)$，求证：$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

6. 已知函数 $f(x)=\log_a x\quad(a>0$，且 $a\neq1)$，若 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，判断$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$的大小，并加以证明.

第2天

动脑动手

如图 2—1 电路中，电源的电动势为 E，内阻为 r，R_1 为固定电阻，问：可变电阻 R_2 调至何值时，它所消耗的电功率最大，其最大电功率是多少？

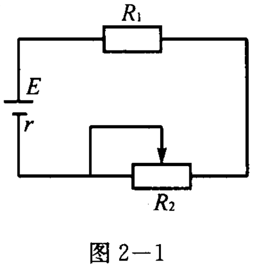


图 2—1

拓展开阔

用电阻值分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 $(a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6)$ 的电阻安装成一个如图 2—2 的组件，在组装中应如何选取电阻，才能使该组件的总电阻值最小？证明你的结论.

分析：我们可以从最简单的组装开始考虑，再逐步调整，以达到目的.

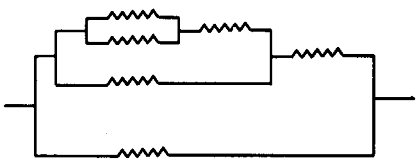


图 2—2

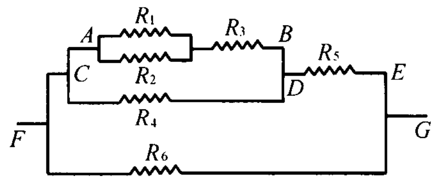


图 2—3

解：如图 2—3，设 6 个电阻的组件的总电阻为 R_{FG}.

(1) 当 R_1,R_2 并联时，所得组件电阻值 R 满足 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，若交换 R_1,R_2，R 不变，且当 R_1 或 R_2 变小时，R 也减小，因此不妨设 $R_1>R_2$.

(2) 设三个电阻的组件的总电阻为 R_{AB}，如图 2—4，则

$$R_{AB}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1+R_2}.$$

显然，R_1+R_2 越大，则 R_{AB} 越小. 所以，要使 R_{AB} 最小，必须取 R_3 为三个电阻中阻值最小的一个.

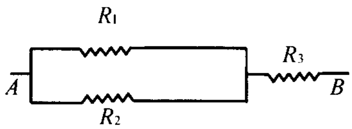


图 2—4

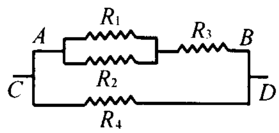


图 2—5

(3) 设四个电阻的组件的总电阻为 R_{CD}，如图 2—5，则

$$\frac{1}{R_{CD}}=\frac{1}{R_{AB}}+\frac{1}{R_4}=\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4}{R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4}.$$

记 $S_1=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}R_iR_j$，$S_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}R_iR_jR_k$，则 S_1,S_2 为定值，于是 $R_{CD}=\frac{S_2-R_1R_2R_3}{S_1-R_3R_4}$. 显然，当 R_3R_4 最小，且 $R_1R_2R_3$ 最大值时，R_{CD} 最小，故应取 $R_4<R_3$，$R_3<R_2$，$R_3<R_1$，才能使总电阻的阻值最小.

(4) 把由 R_1,R_2,R_3 组成的组件用等效电阻 R_{AB} 代替，要使 R_{FG} 最小，由(3)知，必须使 $R_5<R_6$；又由(1)知，应使 R_{CE} 最小. 由(2)知，要使 R_{CE} 最小，必须 $R_5<R_4$，且应使 R_{CD} 最小；而由(3)知，要使 R_{CD} 最小，应使 $R_4<R_3<R_2$，且 $R_4<R_3<R_1$.

综上所述，当 $R_i=a_i(i=3,4,5,6)$，R_1,R_2 是 a_1,a_2 任意排列时，R_{FG} 最小.

____月____日　星期____

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a^2+b^2=10$,则 $a-b$ 的取值范围是(　　).

(A) $[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$　　(B) $[-2\sqrt{10},2\sqrt{10}]$

(C) $[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$　　(D) $[0,\sqrt{10}]$

2. 设 $a>0,b>0$,则下列不等式不成立的是(　　).

(A) $a+b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$　　(B) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$

(C) $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geqslant a+b$　　(D) $\dfrac{2ab}{a+b}\geqslant\sqrt{ab}$

3. 已知 $x>0,y>0,x+y=1$,则$\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)$的最小值是________.

4. 已知 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三边,且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\dfrac{2}{c}$,则$\angle C$ 的取值范围是________.

5. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,试用三种不同的方法证明:$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

6. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,若 $f(1)=\dfrac{7}{2}$,问:是否存在 $a,b,c\in\mathbf{R}$,使得不等式 $x^2+\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 2x^2+2x+\dfrac{3}{2}$对一切实数 x 都成立?证明你的结论.

动脑动手

现有 A,B,C,D 四个长方形容器,容器 A,B 的底面积均为 a^2,高分别为 a 和 b,容器 C,D 的底面积均为 b^2,高分别为 a 和 $b(a\neq b)$.现规定一种游戏规则:每人一次从四个容器中取两个,盛水多者为胜,问:先取者有没有必胜的方案?

阅读思考

Cauchy-Schwarz Inequality

The Cauchy-Schwarz Inequality is another highlight in the topic of inequality. Like the inequality A. M. $\geqslant$G. M. , the Cauchy-Schwarz Inequality is an important vehicle for proving a wide variety of inequalities.

Theorem Cauchy-Schwarz Inequality

Let $a_1, a_2, \cdots, a_n$ and $b_1, b_2, \cdots b_n$ be two sets of real numbers. Then $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2)$, and equality holds only when $a_i=0$ or $b_i=\lambda a_i$, for some $\lambda \in \mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,n$.

Proof If $a_1=a_2\cdots=a_n=0$, the equality holds. For other cases, define the quadratic polynomial $f(x)$ by

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2 \\
&= (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),
\end{aligned}
$$

which is non-negative for all real values of x. Recall that a quadratic function $Ax^2+Bx+C(A>0)$ is non-negative if and only if its discriminant, which equals to B^2-4AC, is non-positive. Applying this result to $f(x)$, we can deduce that $[2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)]^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant 0$, or $[(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)]^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$ and hence the result.

Equality holds when there exists a real number x such that $f(x)=0$. This occurs only when $a_1x-b_1=a_2x-b_2=\cdots=a_nx-b_n=0$, i. e. $b_i=xa_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

Exercises Let $a_1, a_2, \cdots, a_n$ and $b_1, b_2, \cdots, b_n$ be two sets of real numbers. Prove that $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$.

Hence deduce that if $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ and $R(x_3, y_3)$ are only three points in the xOy plane, then $QP\leqslant PR+QR$.

____月____日　星期____

1. 若关于 x 的不等式 $\dfrac{x+a}{x^2+4x+3}>0$ 的解为 $-3<x<-1$ 或 $x>2$，则 a 的取值为(　　).

(A) 2　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $-\dfrac{1}{2}$　　(D) -2

2 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，不等式 $f(x)>0$ 的解集为 (m,n)，不等式 $g(x)>0$ 的解集为 $\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$，其中 $0<2m<n$，则不等式 $f(x)g(x)>0$ 的解集为(　　).

(A) $\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)$　　(B) $\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{n}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{n}{2},-\dfrac{m}{2}\right)$

(C) $(-n,-m)$　　(D) $\left(m,\dfrac{n}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{n}{2},-m\right)$

3. 不等式 $-2<\dfrac{x-1}{x-3}<3$ 的解集是________________.

4. 若不等式 $(m-1)x<\sqrt{4x-x^2}$ 的解集是 $\{x\mid 0<x<2\}$，那么实数 m 的值是________.

5. 解不等式：$|\sqrt{2x-1}-x|<2$.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ma^x-1}{a^x+1}$ $(a>0$，且 $a\neq 1$，$m\in\mathbf{R})$ 为奇函数.

(1) 求 m 的值；

(2) 解关于 x 的不等式 $f^{-1}(x)>\log_a 2(x+1)$.

第4天

提炼总结　　不等式的解法

一元一次不等式和一元二次不等式是最简单的不等式，其他不等式，如高次不等式、分式不等式、绝对值不等式等都可转化为一元一次不等式(组)或一元二次不等式(组)来解.

解不等式时，要注意不等式的同解原理和变形的等价性的使用，对各类不等式要掌握它的特点及变形过程中的特殊性，注意归纳解各类不等式的思路和方法. 解不等式的思想是化归和转化.

(1) 高次不等式的解法

高次不等式若能等价变形为一次因式或二次因式连乘积的不等式,可用两种方法求解:①转化为一次或二次不等式组;②利用数轴标根法.数轴标根法是将不等式的右边变为0,左边分解成一次因式的连乘积(注意未知数系数为正,各个因式按其根从小到大排列,将在实数范围内不能分解成一次因式的多项式定出符号并作同解变形),再把 $f(x)=0$ 的根标在数轴上,然后从最右一个区间开始,自右至左依次标上"+""-""+",…,以此判断 $f(x)$ 在各区间内的符号,从而求出不等式的解,它的实质是列表法.用数轴标根法求解时应注意:如果不等式不含等号,那么标根用空心圈;如果含等号,则用实心点.

(2) 分式不等式的解法

分式不等式既可以转化为高次不等式求解,也可以直接用数轴标根法求解.若转化为高次不等式求解,则当不等式不含等号时,求出的解就是分式不等式的解;当不等式含等号时,求出的解中去掉分母的根或增加分子的根后就是分式不等式的解.若直接用数轴标根法求解,当不等式不含等号时,标根都用空心圈;含等号时,分子的根用实心点,分母的根用空心圈.

分式不等式一般整理成 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ $(g(x)\neq0)$ 的形式,再转化为整式不等式求解:$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$;$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.如果不等式含有等号,如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0$,则与 $\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0,\\ g(x)\neq0\end{cases}$ 同解.

(3) 含绝对值不等式的解法

含绝对值不等式的解法的基本思想是设法去掉绝对值符号,一般有以下四种解法:

①根据实数的绝对值的意义去掉绝对值符号.

$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$;

$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

②利用平方法去掉绝对值符号.这种解法适用于两边都是一次的正值不等式.

③利用数形结合的方法.

④利用零点分段去掉绝对值符号.这种方法常用于求解含有多个绝对值的不等式.

练一练

设函数 $f(x)=\log_b\dfrac{x^2-2x+2}{1+2ax}$ $(b>0$ 且 $b\neq1)$,求 $f(x)$ 的定义域.

____月____日　星期____

1. 某商品计划两次提价，有甲、乙、丙三种方案. 甲方案：第一次提 $p\%$，第二次提 $q\%$（其中 $p\neq q$）；乙方案：第一次提 $q\%$，第二次提 $p\%$；丙方案：第一次提 $\frac{p+q}{2}\%$，第二次提 $\frac{p+q}{2}\%$. 则实施甲、乙、丙三种方案后，商品价格的大小关系是（　　）.

(A) 甲＝乙＜丙　　(B) 甲＝乙＞丙

(C) 甲＝乙＝丙　　(D) 甲＜乙＜丙

2. 根据市场调查结果，预测某种家用商品从年初开始 n 个月内的累积需求量 S_n（万件）近似地满足 $S_n=\frac{n}{90}(21n-n^2-5)$ $(n=1,2,\cdots,12)$. 按此预测，该年度内，需求量超过 1.5 万件的月份是（　　）.

(A) 5 月、6 月　　(B) 6 月、7 月　　(C) 7 月、8 月　　(D) 8 月、9 月

3. 一架直升机从地面竖直向上匀加速飞行，如果加速度为 $x\,\mathrm{m/s^2}$，飞机每秒的耗油量为 $y\,\mathrm{mL}$，y 与 x 之间的关系式为 $y=2x+8$，且飞机上升的高度 $h(\mathrm{m})$，时间 $t(\mathrm{s})$，加速度 $x\,\mathrm{m/s^2}$ 之间的关系是 $h=\frac{1}{2}xt^2$. 若使飞机上升到 800 m 高空的耗油量最少，则加速度 $x=$__________ $\mathrm{m/s^2}$.

4. 用一块长为 a，宽为 b $(a>b)$ 的矩形木板，在二面角为 90° 的墙角处围出一个形状为直三棱柱的储物仓（使木板垂直于地面，两边与墙面贴紧），则储物仓的容积的最大值为__________.

5. 用总长为 14.8 m 的钢条制作一个长方形容器的框架，如果所制作容器的底面的一边比另一边长 0.5 m，那么高为多少时容器的容积最大？求出它的最大容积.

6. 某地区四个农庄 A,B,C,D 恰好坐落在边长为 2 km 的正方形顶点上. 为发展经济，当地政府决定建立一个使得任何两个农庄都有通道的道路网，道路网由一条中心道及四条支道组成，并要求四条支道的长度相等（如图 5－1）.

(1) 若道路网总长度不超过 5.5 km，试求中心道长度的取值范围；

(2) 问：中心道长为何值时，道路网总长度最短？

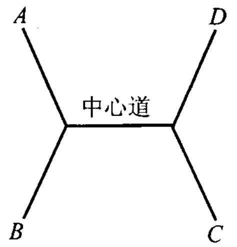


图 5－1

拓展开阔

最小斯坦纳树

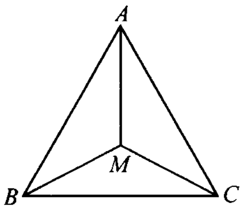


图 5—2

有一个地质勘探队在荒无人烟的地区钻探到三口高产油井,它们相距数千米之遥.为了便于管理,准备建一座工程指挥所,从指挥所到三口油井要修三条通讯线路.指挥所应建在什么地方,才能使三条通讯线路的总长最短?

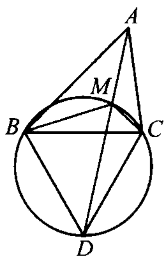


图 5—3

记三口油井分别为 A,B,C,指挥所记为 M.如果把指挥所建在某一口油井处,是否线路最短呢?如图 5—2,假如 A,B,C 是正三角形的三个顶点,三角形的边长为 a.若把指挥所 M 建在 A 处,则所建通讯线路总长为 $AB+BC=2a$.但若把指挥所 M 建在三角形的重心处,不难算出通讯线路总长 $MA+MB+MC=\sqrt{3}a\approx1.732a$.显然,第二种方案的线路更短.那么对任意三角形,指挥所 M 建在重心处是否总是线路最短呢?答案并非这么简单,正确的结论是:如果 $\triangle ABC$ 中的一个角,不妨设为 $\angle A$,大于或等于 $120°$,则 M 取在 A 处;如果三个角均小于 $120°$,可按下述方法确定 M 的最佳地址:以 BC 为边在三角形的另一侧作正三角形 BCD,$\triangle BCD$ 的外接圆与 A,D 连线的交点 M 即为所求(如图 5—3).不难看出,此时 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$.有兴趣的同学可以证明:按上述方法确定的点 M 使得 $MA+MB+MC$ 最小.

上面这个例子只考虑了将平面上三个点连接起来的方法.下面我们再考虑四个点位于某正方形的四个顶点(是四个点的特殊情况)的例子.

设有四个通讯站位于某边长为 a 的正方形的四个顶点上,今要架设通讯线路将它们连起来,如何布置线路才能使总长度最短?

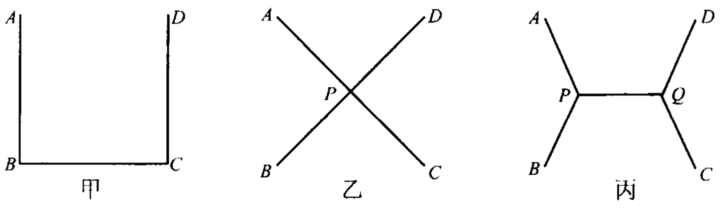


图 5—4

右图给出了三种设计方案:采用甲方案,所需线路总长为 $3a$;采用乙方案,需在对角线交点处加一个结点 P,其线路总长为 $2\sqrt{2}a\approx2.828a$;采用丙方案,这里加了两个结点 P 和 Q,四条线段 AP,BP,CQ,DQ 均相等,图中的六个角均等于 $120°$,不难计算得线路总长为 $(\sqrt{3}+1)a\approx2.732a$.显然,丙方案是最优的.

早在 1640 年,法国数学家费尔马就研究过平面上三点连线问题,这里所举的第一个例子称为费尔马问题,点 M 称为费尔马点.到 19 世纪中叶,瑞士数学家斯坦纳把费尔马问题的研究推广到平面上 n 个点连线的情形:在平面上有任意 n 个点,如何连接才能使总长度最短?在第二个例子中,丙方案添了两个点 P 和 Q,使总长度最短.新添的两个点 P 和 Q 通常称为斯坦纳点.任何一种连接方案(如图 5—4)都称为斯坦纳树,其中长度最短的称为最小斯坦纳树.

____月____日 星期____

1. 已知直线 l,l' 关于 y 轴对称，它们的倾斜角分别为 α,β，则 $\alpha+\beta$ 的值为(　　).

(A) 0　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) π　　(D) 2π

2. 若直线 l 的倾斜角是连结$(-3,5)$,$(0,9)$两点的直线的倾斜角的 2 倍，则直线 l 的斜率为(　　).

(A) $\frac{24}{25}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $-\frac{7}{25}$　　(D) $-\frac{24}{7}$

3. 若直线 l 的斜率 k 满足 $-\sqrt{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是____________.

4. 若 $A(3,1)$,$B(-2,m)$,$C(8,11)$在同一条直线上，则实数 $m=$________.

5. 在直角坐标平面上有两个不同的点 $M(\cos\theta,1)$和 $N(0,\sin^2\theta)$，求直线 MN 的斜率及倾斜角的范围.

6. 如果不过点 $P_2(x_2,y_2)$的直线 $l:Ax+By+C=0$ 与点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的连线相交于 P，试证：P 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

动脑动手

请利用第 6 题的结论证明平面几何中著名的梅涅劳斯定理：如果一条直线和$\triangle ABC$ 的三边或其延长线分别交于 P,Q,R 三点，那么$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=-1$.

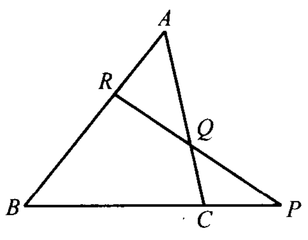


图 6—1

第6天

阅读思考 笛卡儿与解析几何思想的建立

科学的需要和对方法论的兴趣，推动了笛卡儿对坐标几何的研究. 传说有这么一个故事：

有一天，笛卡儿（1596～1650，法国哲学家、数学家、物理学家）生病卧床，但他的头脑一直没有休息，他在反复思考一个问题：几何图形是直观的，而代数方程则比较抽象，能不能用几何图形来表示方程呢？问题的关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组“数”挂上钩. 突然，他看见屋顶角上一只蜘蛛正在拉丝织网. 蜘蛛的“表演”，使笛卡儿的思路豁然开朗. 他想，可以把蜘蛛看做一个点，它在屋子里可以上、下、左、右运动，能不能把蜘蛛的每个位置用一组数确定下来呢？他又想，屋子里相邻的两面墙与地面相交成三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把相交成的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置，都可以用这三根数轴上找到的有顺序的三个数来表示. 反过来，对任意一组三个有顺序的数，例如3，2，1，也可以用空间中的一个点 P 来表示（如图 6—2）. 同样，用一组数 (a,b) 可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示（如图 6—3）. 直角坐标系的创建，给代数和几何架起了一座桥梁. 它使几何概念可以用代数的方法来描述，几何图形可以通过代数形式来表达，由此可以将先进的代数方法应用于几何学的研究.

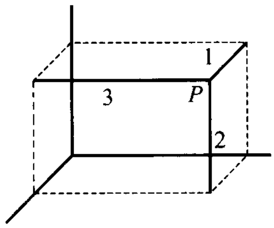


图 6—2

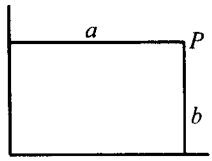


图 6—3

笛卡儿在创建直角坐标系的基础上，创造了用代数方法来研究几何图形的数学分支——解析几何. 他的设想是：只要把几何图形看成是动点的运动轨迹，就可以把几何图形看成由具有某种共同特性的点组成. 比如，我们把圆看成是平面上一个动点对定点 O 作等距离运动的轨迹，也就可以把圆看成由无数到定点 O 的距离相等的点组成的. 笛卡儿根据这个想法，在《几何学》一书中，最早为运动着的点建立坐标，开创了几何和代数挂钩的解析几何.

解析几何的重要性在于它的方法——建立坐标系，用方程来表示曲线，通过研究方程来研究曲线.

我们学习解析几何，主要是掌握它的基本思想、基本方法. 解析几何的基本方法包括两个方面：一是从图形到方程，二是从方程到图形，也就是选择坐标系，建立图形方程. 通过对方程的研究得到图形的性质，了解图形的形状.

坐标的思想方法在日常生活中也经常用到. 例如象棋、国际象棋中棋子的定位；电影院、剧院、体育馆的看台、火车车厢的座位及高层建筑的房间编号等都用到坐标的思想. 随着同学们知识的不断积累，坐标方法的应用会更加广泛.

____月____日　星期____

1. 下列四个命题中，真命题是(　　).

(A) 经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 表示

(B) 经过任意两个不同点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示

(C) 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示

(D) 经过定点 $A(0,b)$ 的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示

2. 过点 $M(2,1)$ 的直线 l 与 x 轴、y 轴分别相交于 P，Q 两点，且 $|MP|=|MQ|$，则直线 l 的方程是(　　).

(A) $x-2y+3=0$　　(B) $2x-y-3=0$

(C) $2x+y-5=0$　　(D) $x+2y-4=0$

3. 已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{4}$，与两坐标轴围成的三角形面积为 8，则直线 l 的方程是________.

4. 已知直线 l 过点 $(-3,2)$，且方向向量是 $\boldsymbol{a}=(2,-3)$，则 l 的一般式方程是________.

5. 如图 7—1，一直线 l 被两直线 l_1：$4x+y+6=0$ 和 l_2：$3x-2y-6=0$ 截得的线段的中点恰好是坐标原点，求直线 l 的方程.

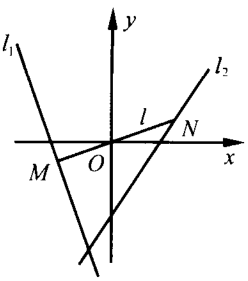


图 7—1

6. 两条平行直线分别过点 $P(-2,-2)$，$Q(1,3)$，它们之间的距离为 d，如果这条直线各自绕点 P，Q 旋转并互相保持平行.

(1) 求 d 的变化范围；

(2) 用 d 表示这两条直线的斜率；

(3) 当 d 取最大值时，求这两条直线方程.

第7天

动脑动手

为了绿化城市，有关部门计划在矩形区域 $ABCD$ 内建一个矩形草坪，$\triangle AEF$ 区域内有一文物保护区，不能占用，如图 7－2. 经测量，$AB=100$ m，$BC=80$ m，$AE=30$ m，$AF=20$ m. 请问应如何设计绿化地带，才能使草坪的面积最大？

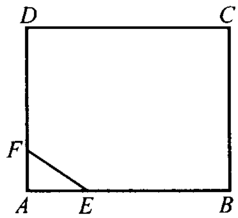


图 7－2

阅读思考

The Equations of Line

A linear function is a function of the form $f(x)=kx+b$, where k and b are constants. The graph of f is a line. On the other hand, a line which is not parallel to y-axis can be represented by a linear equation, $y=kx+b$.

Given that line l contains points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) $(x_1 \neq x_2)$. Since $y_1=kx_1+b$, $y_2=kx_2+b$, subtract $y_1-y_2=k(x_1-x_2)$, $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, k is the slope of this line.

If $x=0$, then $y=b$, and b is called y-intercept.

An equation or the line in form of $y=kx+b$ is called the slope intercept form equation.

The definition of slope leads to many forms of equations of lines that are useful for determining the rule of a linear function.

The point slope form equation of a line is $y-y_1=k(x-x_1)$, since $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. The form is used to determine the equation of a line when the slope k and the coordinates of one point (x_1, y_1) are known.

Exercises

please use the given information to write each equation in standard form.

(1) $k=\dfrac{3}{2}$, y-intercept: -4;

(2) $A(-2,10)$, $B(5,-4)$.