激发学习潜能　获得最大成功

实践提高

激发 ➔ 推动 ➔ 获得

- 学法指导
- 实践提高
- 测试训练

AAA 学习法

阶段评估

- 自检程序

主　编　王春光
副主编　谷　松

高中版

Arouse
Advance
Achieve

济南出版社

实践提高

激发➡推动➡获得

高中版

Arouse
Advance
Achieve

济南出版社

本册说明

《实践提高》是“AAA 学习法”结合各科学习内容有针对性的具体指导，是在学生初步形成“八字方针”的全新学习理念的前提下，具体运用“AAA 学习法”的理论和方法，针对高中各科知识体系、知识点，进行重点讲解，使学生能将科学的学习方法与所学知识结合起来。本册书按高中的主要课程分为数学、物理、化学、生物、英语、语文、政治、历史、地理九部分，每一部分又按高中教学体系分为若干章节，这些章节又分别按“好学篇”、“会学篇”、“学会篇”、“学好篇”逐一讲解。

好学篇中，先是以与该学科知识有关的历史典故和生活中的相关现象、趣味问题为先导，将学生的学习积极性调动起来，激发学生对该学科的学习兴趣。

会学篇中，结合高中各学科的课标及知识结构，指出了重要知识点及难点，具体介绍了“创新十法”和其他学习法在该学科中的应用。同时标出了参考学习用时，要求大家注意学习效率。

学会篇中，首先梳理了各部分知识体系，并有针对性地介绍各种学习方法在解决实际问题的运用。

学好篇中，先是解答了好学篇中的趣味问题，剖析了相关知识的内在联系；然后重点分析了具有代表性的例题，着力于知识的牢固掌握与方法的灵活运用，训练学生具备一定的知识综合和迁移能力；最后给出了精选的高考题、竞赛题、综合题、开放题，供学生自由发挥，培养创新思维。

本册书是以全新的学习理念来激发学生的学习兴趣，结合高中生的知识结构，对“AAA 学习法”进行具体讲解，使学生逐步深入理解“创新十法”；针对高中生的学习能力，着重强调由感性学习上升为理性学习；并使学生能够开拓视野，形成个性化的创新意识。

目　录

生物部分

英语部分

语文部分

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

政治部分

历史部分

地理部分

数学部分

一、集合与简易逻辑

好学篇
——培养好奇心，与成功人士为伍

1 相关知识

罗素提出，集合可以分为两类：一类是集合 A 是它本身的元素（这种集合称为本身分子集），如“一切名词的集合”，它本身也是一个名词，它也属于这个集合，还有像“一切集合的集合”也是一个本身分子集；另一类是非本身分子集，这就是平常所见的集合，比如有理数集 Q，它不是有理数，所以 $Q\notin Q$，那么一切非本身分子集的全体构成的集合 $Q=\{x \mid x\notin x\}$ 属于哪一种集合呢？

如果 Q 是本身分子集，即 $Q\in Q$，又由 Q 的定义 $Q\notin Q$；如果 Q 不是本身分子集，即 $Q\notin Q$，由 Q 的定义，又有 $Q\in Q$。综上，不论 Q 是不是本身分子集，都会产生逻辑矛盾。这就是著名的“罗素悖论”。

为了解决“罗素悖论”，当时数学家提出了“集合论”，专门研究集合问题。

2 身边的学问

狭路相逢：歌德是 18 世纪德国的一位著名文学大师，一天，他与一位文艺批评家“狭路相逢”。这位批评家生性古怪，遇到歌德走来，不仅没有相让，反而卖弄聪明，一边高傲地往前走，一边大声说道：“我从来不给傻子让路！”面对如此尴尬局面，但见歌德笑容可掬，一边谦恭地闪在一旁，一边有礼貌地回答道：“呵呵，我可恰恰相反。”结果故作聪明的批评家反倒自讨没趣。

3 趣味问题

某班的两个同学在谈论班上的三个同学 A、B、C 的身高时，一个说：“如果 B 不是最高的，则 A 就是最矮的。”另一个则说：“如果 C 不是最矮的，则 A 必是最高的。”这两个同学的话都是正确的。那么你能否确定 A、B、C 三位同学的高矮次序呢？并说明理由。

会学篇
——方法就像戏剧，各有各的内容

在高中数学中，集合的初步知识和简易逻辑知识，与其他代数内容密切联系，是学习、掌握和使用数学语言的基础，是学习高中数学的出发点。

集合概念及其基本理论，称为集合论，是近现代数学的基础。一方面，许多重要的数学分支都建立在集合论的基础上；另一方面，集合论及其反映的数学思想，在越来越广泛的领域中得到应用。逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科。学习数学需要全面理解概念，正确进行表述、判断和推理，这就离不开对逻辑知识的掌握和运用。更广泛地说，在日常生活、学习、工作中，基本的逻辑知识也是认识问题、研究问题不可缺少的工具。身边的学问中，歌德与批评家都巧妙地运用了逻辑知识；纵观近几年的高考试题，这些知识虽然都是以选择题、填空题出现，难度也不是很大，但每年都有所考查。特别是“集合”和“充分条件与必要条件”这两部分内容不可小视。

1 课标及重要知识点

（1）理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合。

（2）掌握简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法。

（3）理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义；理解 4 种命题及其相互关系；掌握充要条件的意义。

本章内容的主要知识点有：集合的概念及其运算；简易逻

辑，包括逻辑关联词，"或"、"且"、"非"的含义及复合命题真假的判定，4 种命题及其相互关系；充要条件；含绝对值不等式的解法，一元二次不等式的解法。其中集合的概念及其运算，逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义与充要条件是重点。有关集合的各个概念的涵义以及概念相互之间的区别与联系，对一些代数命题真假的判断是难点。

2　学习方法

(1) 一般学习方法

① 逻辑还原法

由于本章知识主要是以逻辑为基础，所以应主要运用逻辑还原的思想来考虑问题，从而降低问题的难度。集合问题常与不等式、函数、方程、曲线有关，所以常用数形结合转化为不等式或方程的思想来求解。复合命题可还原为简单命题去处理。充要条件问题可以还原为充分条件和必要条件去处理。

② 本章所体现的重要数学思想方法

本章体现的主要数学思想方法有数形结合思想、逻辑划分思想、函数方程思想、等价转换思想，而配方法、判别方法、图像法、反证法等数学方法在本章也得到广泛应用。对于这些思想和方法应深刻理解，并有意识地加以运用。

(2) 具体学习方法

①集合语言、符号、表示方法；集合间的关系，子、交、并、补是重点之一。在学习时务必深刻理解，准确掌握。例如对于交集与并集的概念，应注意符号之间的区别与联系，交集是 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，而并集是 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

②含绝对值不等式和一元二次不等式的解法及其应用也是一个重点，在学习这部分内容时，应抓住等价转化这一重要思想方法。特别是将一元二次不等式的解法与二次函数联系起来，进行理解学习。

③命题、4 种命题、充要条件的意义又是一个重点。在判断一个命题是否为复合命题时，一般方法是看它是否含有逻辑联结词。但有些命题省略了逻辑联结词。如命题："菱形的对角线垂直平分"，它就是一个 p 且 q 形式的复合命题。像这类问题，需从命题的语意上进行认真分析，正确判断。在判断复合命题的真假时，应善于利用真值表进行逻辑推理。对于充要条件的判断与寻求，首先应分清命题的条件与结论，否则充分性与必要性容易混淆。4 种命题中，互为逆否命题同时真或同时假，它是反证法的理论依据，是等价转化的又一体现。对复合命题 p 或 q 中"或"的含义的理解，可联想并集概念。数学中的"或"表示"可兼有但不必须兼有"，而生活中的"或"表示"不兼有"。

④对复合命题"p 或 q"，"p 且 q"的否定。"p 或 q"的否定是"(非 p)且(非 q)"，如"$x=\pm1$"的否定是"$x\neq1$ 且 $\neq-1$"；"p 且 q"的否定是"(非 p)或(非 q)"，如 $1<x<2$ 的否定，"$x\leqslant1$ 或 $x\geqslant2$"。

3　参考用时(课时如表 1-1)

表 1-1

	教学	自学
1.1　集合	2	2
1.2　子集、全集、补集	2	3
1.3　交集、并集	2	3
1.4　绝对值不等式的解法	2	3
1.5　一元二次不等式解法	2	2
1.6　逻辑联结词	2	3
1.7　4 种命题	3	3
1.8　充分条件与必要条件	2	3
小结与复习	3	4
总　结	20	26

学会篇

——成功与否，做过后才知道

1　知识体系

- 集合与简易逻辑
  - 集合
    - 集合的有关概念与运算
      - 子集：$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$
      - 补集：$C_uA=\{x|x\in u$ 且 $x\notin A\}$
      - 相等：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$
      - 全集：含有我们要研究的全部元素的集合
      - 交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$
      - 并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$
    - 含绝对值不等式的解法
      - $|x|>a(a<0)$，$x\in R$
      - $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$
      - $|x|<a(a<0)$，无解
      - $|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$
    - 一元二次不等式的解法
      这里面 $\triangle=b^2-4ac$
      $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$　$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$
      - $ax^2+bx+c>0(a<0)$
        - $\triangle>0$
        - $\triangle=0$
        - $\triangle<0$
      - $ax^2+bx+c>0\ (a>0)$
        - $\triangle>0$　$x>x_2$ 或 $x<x_1(x_2>x_1)$
        - $\triangle=0$　$x\in R$ 且 $x\neq x_1(x_2=x_1)$
        - $\triangle<0$　$x\in R$
      - $ax^2+bx+c<0(a>0)$
        - $\triangle>0$　$x_1<x<x_2$　$(x_2>x_1)$
        - $\triangle=0$　$x\in\Phi$
        - $\triangle<0$　$x\in\Phi$
      - $ax^2+bx+c<0(a<0)$
        - $\triangle>0$
        - $\triangle=0$
        - $\triangle<0$
  - 简易逻辑
    - 命题及其表现形式
      - 简单命题
      - 复合命题
        - 非 p
        - p 且 q
        - p 或 q
    - 4 种命题及其之间的关系、反证法
      - 原命题：若 p 则 q
      - 逆命题：若 q 则 p
      - 否命题：若非 p 则非 q
      - 逆否命题：若非 q 则非 p
      - 原命题⇔逆否命题
    - 充要条件及其判定
      - 充分条件
      - 必要条件
      - 充分且必要条件

2　经典解析

例 1　下面两个集合是否相等？$A=\{y|y=x^2+2x+3,x\in R\}$，$B=\{(x,y)|y=x^2+2x+3,x\in R\}$。

解析　要解决这个问题，就必须对描述法表示集合很清楚。

A 集合是二次函数 $y=x^2+2x+3$ 的值域，而集合 B 则是 $y=x^2+2x+3$ 图像上的点集合。显然 A 与 B 不相等。

例 2　(1996 年全国高考题)已知全集 $U=N$，集合 $A=\{x|x=2n,n\in N\}$，集合 $B=\{x|x=4n,n\in N\}$，则(　　)

A. $U=A\cup B$　　B. $U=(C_uA)\cup B$

C. $U=(C_uA)\cup(C_uB)$　　D. $U=A\cup(C_uB)$

解析　首先明白集合运算关系。需要判断集合间是否具有某些运算关系的问题，一般可从两个方面入手：一是集合的构成；二是先寻找某些集合间的关系(包含)，再运用集合的运算性质求解。

要注意到集合 A 和 B 的元素分别为 2 的倍数和 4 的倍数，因此可把自然数集划分成 4 个子集。

$N_1=\{x|x=4n+1,n\in N\}$，$N_2=\{x|x=4n+2,n\in N\}$，$N_3=\{x|x=4n+3,n\in N\}$，$N_4=\{x|x=4n,n\in N\}$，则 $U=N_1\cup N_2\cup N_3\cup N_4$。所以 $C_uB=N_1\cup N_2\cup N_3$，而 $A=N_2\cup N_4$，所以 $U=A\cup(C_uB)$。本例也可从 A 与 B 之间的关系入手分析：由列举法可知，$A\supseteq B$，而 $U=B\cup(C_uB)$，$U=A\cup(C_uB)$。答案　D

例 3　命题 A："p 或 q"是真命题，命题 B："p 且 q"为真命题，则 A 是 B 的什么条件？(　　)

A. 充分非必要条件　　B. 非充分也非必要条件

C. 充要条件　　D. 必要非充分条件

解析　首先弄清复合命题为真的含义，p 或 q 为真，要求 p、q 只要有一个为真即可为真，p 且 q 为真，要求 p、q 都为真。另外，对于充要条件更要分清条件与结论后进行判断。用定义法来判断，其中 A 是条件，B 是结论。

p 或 q 为真，则 p 真或 q 真，所以 p 且 q 不一定为真；而 p 且 q 为真，则 p 真且 q 真，所以 p 或 q 必真。综上，A 是 B 的必要但不充分条件，故选 D。

例 4　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+4\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围。

常规思维　$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$

若 $B=\varnothing$，$\varnothing\subseteq A$，所以，又要满足 $\triangle=4a^2-4a-8<0$ 即 $-1<a<2$，所以 $a\in\{x|-1<a<2\}$。

若 $B\neq\varnothing$，此时 $\triangle=4a^2-4a-8\geqslant 0$，$a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$，B 的两个根为 $x_1=a-\sqrt{a^2-a-2}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-a-2}$。由 $B\subseteq A$

可得：$\begin{cases}a-\sqrt{a^2-a-2}\geqslant 1,\\ a+\sqrt{a^2-a-2}\leqslant 4,\\ a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1,\end{cases}$　解之得：$2\leqslant a\leqslant\dfrac{18}{7}$。

数形结合思想

若 $B=\varnothing$，同常规解法。

若 $B\neq\varnothing$，令 $f(x)=x^2-2ax+a+2$，由图 1－1 可看出：

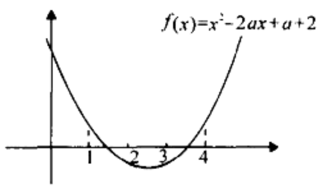


图 1－1

$$\begin{cases}\triangle=4a^2-4a-8\geqslant 0 & (B\neq\varnothing)\\ f(1)=3-a\geqslant 0 & (f(1)\geqslant 0)\\ f(4)=18-7a\geqslant 0 & (f(4)\geqslant 0)\\ 1\leqslant -\frac{-2a}{2}\leqslant 4 & (\text{对称轴在}[1,4]\text{中})\end{cases}$$

解之得，$2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}$。

例 5　设集合 A、B 都是全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集，已知 $(C_IA)\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$(C_IA)\cap(C_IB)=\{2,5\}$，求 $C_I(A\cup B)$ 和 $A\cap(C_IB)$。

解析　集合语言转化为图形语言

如图 1－2 所示，用方框表示全集 I，两个圆分别表示集合 A 和 B，由 $(C_IA)\cap B=\{1\}$，故 A 外 B 内填 1；由 $A\cap B=\{3\}$，则在 A 与 B 的公共部分填 3；由 $(C_IA)\cap(C_IB)=\{2,5\}$。则在 A 和 B 之外、方框内填上 2 和 5。于是 4 在 B 外 A 内。

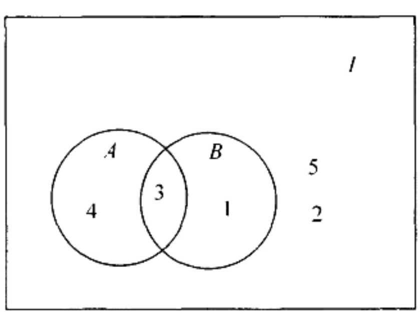


图 1－2

从图中便可知 $C_I(A\cup B)=\{2,5\}$，$A\cap(C_IB)=\{4\}$。

例 6　若不等式 $0\leqslant x+1\leqslant 2$ 成立时，则关于 x 的不等式 $x-a-1>0$ 也成立。求实数 a 的取值范围。

解析　若从不等式的角度，难以解释“也成立”的含义；而用集合的语言，则问题就变得清晰起来。数形结合形象、直观，有利于呈现集合之间的关系。

设集合 $A=\{x|0\leqslant x+1\leqslant 2\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x-a-1>0\}=\{x|x>a+1\}$，$A$，$B$ 如图 1－3 所示，可知 $a+1<-1$，即 $a<-2$。所以，a 的取值范围是 $\{a|a<-2\}$。

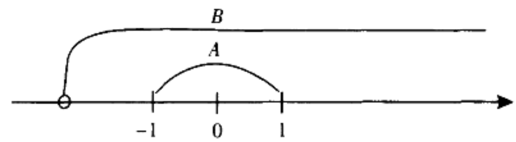


图 1－3

例 7　设 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x^2+2x-3>0\}$，$C=\{x|x^2-3ax+2a^2<0\}$，试求实数 a 的取值范围，分别满足 (1) $C\subseteq(A\cap B)$，(2) $C\supseteq(C_RA\cap C_RB)$。

解析　首先应把 A、B、C 集合化简，由于 C 集合中含有参数 a，应进行分情况求解。

(1) $A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$，$A\cap B=\{x|1<x<4\}$，因为 $C=\{x|(x-a)(x-2a)<0\}$，且 $C\subseteq(A\cap B)$，即 $C\subseteq\{x|1<x<4\}$，所以当 $a<0$ 时，不满足题意；当 $a=0$ 时，$C=\Phi$ 满足题意；当 $a>0$ 时，$C=\{x|a<x<2a\}\subseteq\{x|1<x<4\}$，即有 $a\geqslant 1$ 且 $2a\leqslant 4$，所以 $1\leqslant a\leqslant 2$。

综上可得：当 $1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$C\subseteq(A\cap B)$。

(2) 因为 $C_RA\cap C_RB=C_R(A\cup B)=\{x|-3\leqslant x\leqslant -2\}$ 且 $C\supseteq\{x|-3\leqslant x\leqslant -2\}$，即有 $2a<-3$ 且 $a>-2$，即 $-2<a<-3/2$。

学好篇

阿基米德是整个历史上最伟大的数学家之一，后人常把他和牛顿、高斯并列为有史以来三个贡献最大的数学家。

他的著作《论浮体》是古代第一部流体静力学著作，是第一次将数学用于流体静力学，因此被尊为流体静力学的创始人。在数学方面，他还发现了 13 种半正多面体，用边表示三角形面积的“海伦公式”和七边形的作图法。

阿基米德的睿智，已伸展到 17 世纪中叶的无穷小分析领域里去了，他运用这种富有启发性的方法，获得大量的辉煌成果，为后人开辟了一个广阔的领域。

趣味问题解答

从第一个人的话中，假设 B 不是最高，则 A 是矮，则 B 一定是第二高的，则 C 最高，但与第二句矛盾；反之，假设 C 不是最矮，同样会使第一句矛盾。故而 B 最高、C 最矮、A 处于中间。

答案　B 是高　C 是矮　A 处于中间

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1　高考题

例　已知 $c>0$，设 P：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减，Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R。如要 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围。

解析　函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减$\Leftrightarrow 0<c<1$。不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上恒大于 1。

因为 $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\geqslant 2c\\ 2c, & x<2c\end{cases}$

所以 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上的最小值为 $2c$，

所以不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R。

$R\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>1/2$。如果 P 正确，且 Q 不正确，则 $0<c\leqslant 1/2$。如果 P 不正确，且 Q 正确，则 $c\geqslant 1$。所以 c 的取值范围为 $0<c\leqslant 1/2$ 或 $c\geqslant 1$。

评注：本小题主要考查集合、函数、不等式、绝对值等基础知识，考查分析和判断能力。在解答过程中蕴涵着分类讨论思想和转化思路。

2　综合题

例　在图 1-4 所示电路图中，闭合开关 A 是灯泡 B 亮的什么条件？

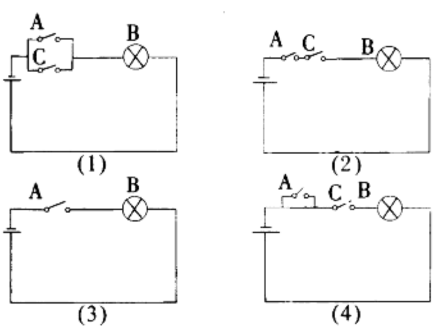


图 1-4

解析　(1) A 闭合$\Rightarrow$B 亮，而 B 亮时 A 不一定闭合，故 A 是 B 的充分但不必要条件。(2) A 闭合 B 不一定亮，而 B 亮 A 必须闭合，故必要条件。(3) A 闭合 B 亮，而 B 亮 A 必闭合，所以 A 是 B 的充要条件。(4) A 闭合 B 不一定亮，而 B 亮 A 不一定闭合，所以 A 是 B 的既不充分也不必要条件。

3　竞赛题

例　设 S 为集合$\{1,2,3,\cdots,50\}$的具有下列性质的子集，S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除。那么 S 中元素最多可能有多少个？

解析　对于两个不同的自然数 a 与 b，如果要求$(a+b)$不被 7 整除，就是要求它们的和被 7 除所得的余数不为 0。我们把集合$\{1,2,\cdots,50\}$按照其中元素被 7 除得的余数相同与否进行归类，余数相同的组成一个集合，这样得到 7 个子集，然后从这 7 个子集中适当取满足题意的元素组成集合 S。

将集合 $A=\{1,2,\cdots,50\}$ 划分为 7 个子集：$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_6$，其中 A_i 中的每个元素除以 7 后余数为 $i(i=0,1,2,\cdots,6)$ 即：

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$

S 最多包含 A_0 的一个元素。但是，若 S 包含其他任何一个子集的一个元素时，则它必可以包含这个子集的全部元素。因为 A_1 包含 8 个元素，其他每个子集包含 7 个元素，且 S 不能同时包含 A_1 和 A_6 的元素，或者 A_2 与 A_5 的元素，或者 A_3 与 A_4 的元素。故最大子集 S 包含 $1+8+7+7=23$ 个元素。

4　开放题

例　设 $a,b\in R$，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in Z\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in Z\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 xOy 内的点集，讨论是否存在 a 与 b，使 $A\cap B\neq\Phi$，且$(a,b)\in C$。

思路点拨　讨论存在性问题可以先假设存在实数 a 与 b 使结论成立，找出结论成立的必要条件，如果存在，再证明它的充分性。

答案　满足条件的 a、b 不存在。

二、函　数

好学篇

——当你感到无趣时，不妨换个方式

1　相关知识

函数是数学的一种思想，它是高中数学中极为重要的内容，函数的观点和方法贯穿整个高中数学的全过程，同时应用于几何问题的解决。

最早使用“函数”这个数学术语的是莱布尼茨，但其含义和现在不同，他指的是关于曲线上一些线段（如横坐标、纵坐标、弦、切线、法线等）。1718 年，瑞士数学家约翰·贝努利给出函

数的一个定义,同时第一次使用了"变量"这个词。他写道:"变量的函数就是变量和变量以任何方式组成的量。"以后,随着数学的不断发展而变化。

2　身边的学问

一般地,广告宣传投资很高,费用过大,达不到最大利润;广告宣传投资过低,宣传不到位,也达不到最大利润。通过市场分析与统计,建立适当的函数,求得极值,即是最大利润。同样可以分析电影标价的调整。

当你坐在电影院看电影的时候,你有没有想过下面这些问题?

(1) 假若你是电影院的经理,应该如何确定投资广告宣传的费用,以获取最大的利润?

(2) 假若你是电影院的经理,是否应该根据不同影片,适当调整电影票价,以获取最大利润?如何调整?

3　趣味问题

某市 2001 年末汽车拥有量为 30 万辆,预计此后每年报废上一年末汽车拥有量的 6%,并且每年新增汽车的数量相同。为保护环境,要求该城市汽车拥有量不得超过 60 万辆,那么每年新增汽车的数量不应超过多少辆?

会学篇

——让正确的方法引导你走向成功

函数是高中数学中最重要、最基础的内容,函数的观点和方法贯穿整个高中代数的全过程,同时应用于几何问题的解决。它就像一根红线贯穿其中。

函数一方面在人一生的生活、学习、工作中应用相当广泛,许多实际问题可以构造函数模型,加以解决;另一方面,也是进一步学习高等数学的基础。从高考角度看历年高考试题中函数的知识点和函数思想均占有相当的地位。无论是在客观题目中,还是在主观题目中都会出现,可以说考查面不但全面,而且有些题目还有一定的难度,足见函数知识的重要性。

1　课标及重要知识点

(1) 了解映射的概念,在此基础上加深对函数概念的理解。

(2) 了解函数单调性的概念,掌握判断一些简单函数的单调性的方法。

(3) 了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系,会求一些简单函数的反函数。

(4) 理解分数指数的概念,掌握有理指数幂的运算性质。

(5) 掌握指数函数的概念、图像和性质。

(6) 理解对数函数的概念,掌握对数的运算性质。

(7) 掌握对数函数的概念、图像和性质。

(8) 能够运用函数的单调性、指数函数、对数函数的性质解决某些简单的实际问题。

(9) 实习作业以函数应用为内容,培养自己用函数知识解决实际问题的能力。能对客观事物中的数量关系和数学模式进行思考和判断,培养自己的数学建模能力,进一步发展自己的数学实践能力。

本章主要知识点:映射、一一映射;函数的概念以及函数定义域、值域,函数的表示方法,函数的单调性;反函数及其求法;指数函数、对数函数的概念、图像及性质;函数的综合运用。它们都是本章的重点。难点是对函数、反函数概念的理解以及求函数的值域,和函数的综合运用。

2　学习方法

(1) 一般学习方法

① 温故求新法

"创新十法"中的温故求新思想在函数中应用广泛,许多函数问题中许多情况下就是通过对原有函数问题解法的反复模拟练习之后,才能解决新问题。

② 逻辑还原法

"创新十法"中的逻辑还原思想具体表现在对一些复杂函数问题的分解,或者把反常规问题转化为常规问题来解决。

③ 超前记忆法

超前记忆法在函数学习中十分重要。例如,对函数的奇偶性学习,三角函数的方法提前用到函数中来,使得函数体系掌握得更完善。

(2) 具体学习方法

如何确定函数的定义域和值域是本章的重点,也是难点。

① 函数的定义域

求函数的定义域一般有三类问题:一是给出函数的解析式,求定义域。此类函数定义域为使解析式有意义的 x 取值范围。解决方法是,根据解析式列出 x 所满足的不等式(或组),解出 x 的取值范围。二是并没有给出函数的解析式,而是由 $f(x)$ 的定义域求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域,或由复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域求外函数 $f(x)$ 的定义域。这里依据内函数 $u=g(x)$ 的值域是外函数 $f(u)$ 的定义域,求解 x 的范围。三是实际问题或几何问题。x 的取值范围不但要使解析式有意义,

还应符合问题的要求。

② 如何求函数的值域

求函数值域的方法较多，下面介绍几种常用方法：

观察法：如函数 $y=(25-x^2)^{1/2}$，其域值为$[0,5]$。

配方法：如求函数 $y=x-2x^{1/2}+3$ 的值域，因为 $y=(x^{1/2}-1)^2+2\geqslant 2$，故所求值域为$[2^{1/2},+\infty]$。

反函数法：如求函数 $y=(2x-1)/(3x+2)$的值域。由 $y=(2x-1)/(3x+2)$得：$x=(2y+1)/(2-3y)$，因为 $2-3y\neq 0$，所以 $y\neq 2/3$，所以值域为$(-\infty,2/3)\cup(2/3,+\infty)$。

判别式法：判别式法是根据函数定义，把其所给解析式整理成关于 x 的二次方程，从而利用方程有解的判定而求出 y 的取值范围。此方法在应用时，应注意函数的定义域应为全体实数，否则可能产生增值。如：求函数 $y=(2x-1)/(x^2+1)$的值域。由于 $x\in R$，函数式可变为：$yx^2-2x+y+1=0$，当 $y=0$ 时，$x=1/2$；当 $y\neq 0$ 时，$\triangle=4-4y(y+1)\geqslant 0$，解得 $-(1+5^{1/2})/2\leqslant y\leqslant(-1+5^{1/2})/2(y\neq 0)$。所以其值域为 $-(1+5^{1/2}/2\leqslant y\leqslant(-1+5^{1/2})/2$。

利用函数的单调性求值域法：例如，求函数 $y=x+4/x(0<x\leqslant 2)$的值域。可以证明：$y=x+4/x$ 在区间$(0,2)$单调递减，所以 $y=x+4/x$ 的值域为$[4,+\infty]$。

如何求一个函数的反函数也是本章的重点和难点。

③求一个函数 $y=f(x)$的反函数的求法

由 $y=f(x)$（可视为 x 的方程），解得 $x=f^{-1}(y)$。

互换 $x=f^{-1}(y)$中的 x，y 得 $y=f^{-1}(x)$。

指出反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域。

如何判断函数的单调性又是重点，也是难点。

④判断函数单调性的方法

定义法，即作差比较法，步骤是：作差→变形→判断。

图像法：先做出函数的图像，利用图像的直观性进行判断。

复合函数判断法如表 1－2 表示。

表 1－2

$y=f(u)$	增	增	减	减
$u=g(x)$	增	减	增	减
$y=f[g(x)]$	增	减	减	增

⑤如何做函数的图像法

做函数的图像常用方法有：一种是描点做图法，另一种是变换作图法。

3　参考用时（课时如表 1－3）

表 1－3

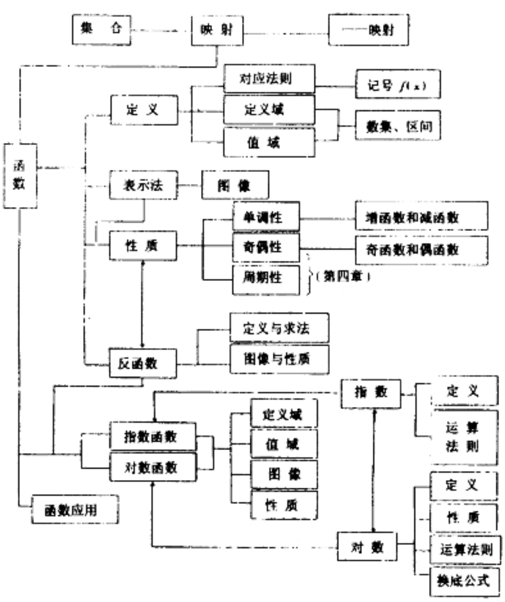
	教学	自学
2.1　函数	2	4
2.2　函数的表示法	2	3
2.3　函数的单调性	3	4
2.4　反函数	3	4
2.5　指数	4	5
2.6　指数函数	3	4
2.7　对数	4	5
2.8　对数函数	3	4
2.9　函数的应用举例	3	5
实习作业	1	3
小结与复习	3	3
总　计	31	44

学会篇

——不付出而收获，那是一种懒惰

1　知识体系

本章内容分为三部分：映射与函数，指数与指数函数，对数与对数函数。



2　精典解析

（1）定义域、值域的求法

例 1　① 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,4)$，求函数 $f(x+3)+f(x^2)$ 的定义域；

② 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(-1,1)$，求函数 $f(x)$ 的定义域；

求函数的定义域，一般转化为不等式（组），进而求得。但本题的解法在基本方法里也提到。

解析　要注意这里每组中前后两个函数中"x"的含义，它是用相同的字母来表示不同的函数的自变量，因此它们的取值范围不一定相同。但它们又有联系，即为 $f(x)$ 中的 x 与 $f(g(x))$ 中 $g(x)$ 取相同的值时，它们所对应的函数值相等。

① 由题意有，$\begin{cases}0\leqslant x+3\leqslant 4,\\ 0\leqslant x^2\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$。

所以，所求函数的定义域为 $(-2,1)$。

② 因为函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(-1,1)$ 即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $t=2x-1\in(-3,1)$。故所求函数的定义域为 $(-3,1)$。

例 2　若函数 $y=(ax+b)/(x^2+1)$ 的值域为 $[-1,4]$，求实数 a、b 的值。

解析　这是涉及逆向思维的问题，可以这样地考虑：当值域不知道时，该用什么方法求其值域呢？宜用判别式法，因此先用判别式求 $y=(ax+b)/(x^2+1)$ 的值域，再当它与已知值域相等时，求出 a、b 即可。

由 $y=(ax+b)/(x^2+1)$，得 $yx^2-ax+y-b=0$。

由于 $y=0$，显然在其值域 $[-1,4]$ 内，因此只需考虑 $y\neq 0$，又 $x\in R$，所以 $\triangle=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$，即 $4y^2-4by-a^2\leqslant 0$。而其值域为 $[-1,4]$，所以不等式 $4y^2-4by-a^2\leqslant 0$ 的解为 $-1\leqslant y\leqslant 4$。

所以 -1 和 4 是关于 y 的方程 $4y^2-4by-a^2=0$ 的两根。

$$\begin{cases}-1+4=b\\ -1\times 4=-a^2/4\end{cases}\quad 即\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}\quad 或\begin{cases}a=-4\\ b=3\end{cases}$$

故所求的 a、b 的值为 $\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4\\ b=3\end{cases}$

（2）求反函数

例 3　求函数 $y=x^2-2x+3$，$(-5\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数。

解析　根据基本方法所讲的方法求解。

因为 $-5\leqslant x\leqslant 0$，所以 $y=(x-1)^2+2$，$y\in[3,38]$，由 $y=(x-1)^2+2$ 得 $(x-1)^2=y-2$。而 $-5\leqslant x\leqslant 0$，因为 $x-1<0$，所以 $x-1=-(y-2)^{1/2}$，即 $x=1-(y-2)^{1/2}$。故所求的反函数为 $y=1-(x-2)^{1/2}(3\leqslant x\leqslant 38)$。

（3）求函数的单调区间

例 4　求函数 $f(x)=x+1/x\ (x>0)$ 的单调区间。

解析　回顾常用函数 $y=x^2$，它的单调区间的求法是根据单调性的定义求解的，那么我们可以模拟定义法，来求 $f(x)$ 的单调区间。

设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=x_2+1/x_2-x_1-1/x_1=(x_2-x_1)(x_1x_2-1)/x_1x_2$。可看出当 $x_1,x_2\in(0,1)$ 时，$x_2-x_1>0$，$x_2x_1-1<0$；当 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 时，$x_2-x_1>0$，$x_2x_1-1<0$。从而有 $x_1,x_2\in(0,1)$ 时 $f(x_2)-f(x_1)<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，$x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$。所以 $f(x_2)>f(x_1)$，所以 $f(x)=x+1/x$，$(x>0)$，在区间 $(0,1)$ 内是单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 内为单调递增。

例 5　已知函数 $f(x)=(a^x-1)/(a^x+1)(a>0$ 且 $a\neq 1)$。

① 求函数 $f(x)$ 的值。

② 讨论函数 $f(x)$ 的单调性。

解析　① 求 $f(x)$ 的值域既可反解出 a^x，也可由分离常数来完成；②讨论函数的单调性关键在于分离常数，集中变量。

① 因为 $f(x)=(a^x-1)/(a^x+1)=1-2/(a^x+1)$，而 $a^x>0$，所以 $a^x+1>1$，所以 $0<2/(a^x+1)<2$，所以 $-1<f(x)<1$，故所求值域为 $(-1,1)$。

② 因为 $f(x)=1-2/(a^x+1)$。所以当 $a>1$ 时，$t=a^x+1$ 在 R 上单调递增，且 $t=a^x+1>1$，而函数 $u=g(t)=2/t$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，函数 $y=1-u$ 单调递增。

所以 $f(x)=1-2/(a^x+1)$ 在 R 上单调递增。同理可得：当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递减。

故当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 R 上递增；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 R 上递减。

（4）函数图像应用

例 6　讨论关于 x 的方程 $|x^2-4x+3|=a(a\in R)$ 的实数解的个数。

解析　若用代数方法讨论，去掉绝对值符号后转化成两个一元二次方程，讨论起来十分烦琐。因此，解答本题时，应借助函数方程思想，利用数形结合方法解决。

做函数 $y=|x^2-4x+3|$ 及 $y=a$ 的图像如图 1-5 所示，方程 $|x^2-4x+3|=a\ (a\in R)$ 的实数解就是两个函数图像的交点（纵坐标相等）的横坐标 x 的值，因此原方程解的个数就是两个函数图像的交点个数，由图 1-5 可知：

① 当 $a\in(-\infty,0)$ 时，原方程没有实数解；

② 当 $a=0$ 或 $a\in(1,+\infty)$ 时，原方程有 2 个实数解；

③ 当 $a=1$ 时，原方程有 3 个实数解；

④ 当 $0<a<1$ 时，原方程式有 4 个实数解。

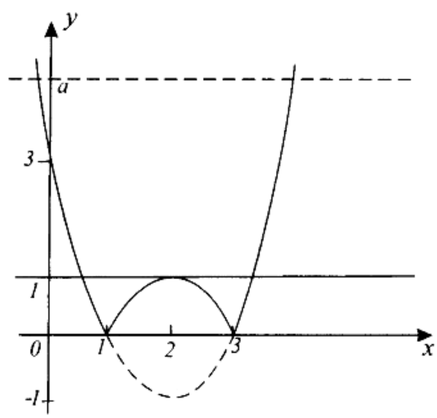


图 1 - 5

学好篇

卡尔达诺，意大利人，1501 年 9 月 24 日生于帕维亚。在历史上，他是闻名全欧的医生，但是他也是一名伟大的数学家，他成功地用几何方法对三次方程求解公式进行了证明。

他被誉为 16 世纪文艺复兴时期人文主义的代表人物和百科全书式的学者。他一生共写了各种类型论著 200 多种，内容涉及物理学、机械学、天文学、化学、生物学、密码术及占星术等等。

趣味问题解答

注意到该市每年年末汽车拥有量是一个变量，设为 x（万辆），依题意，x 的取值范围为 $[0,6]$。若设每年新增汽车数量（常量）为 a（万辆），则问题转化为：对任意 $x\in[0,60]$，都有 $0.94+a\leqslant 60$，在此条件下，求 a 的最大值。

设每年年末汽车的拥有量为 x（万辆），每年新增汽车为 a（万辆），则对于 $x\in[0,60]$ 内任意的 x，都有 $(1-6\%)x+a\leqslant 60$，即 $a\leqslant 60-0.94x$ 恒成立而 $0\leqslant x\leqslant 60$，且 $f(x)=60-0.94x$ 在 $[0,60]$ 上递减，所以 $f(x)\geqslant 60-0.94\times 60=3.6$，所以 $a\leqslant 3.6$。故每年新增汽车不超过 3.6 万辆。

1 高考题

例 设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数，且满足条件：$f(-1)=f(1)=0$；对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$。

(1) 证明：对任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$。

(2) 判断函数 $g(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x, & x\in[0,1]\end{cases}$，是否满足题设条件。

(3) 在区间 $[-1,1]$ 上是否存在满足题设条件的函数 $y=f(x)$，且使得对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|=|u-v|$。若存在，请举一例；若不存在，请说明理由。

解析 (1) 证明：由题设条件可得，当 $x\in[-1,1]$ 时，有 $|f(x)|=|f(x)-f(1)|\leqslant|x-1|=1-x$，即 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$。

(2) 解：函数 $g(x)$ 满足题设条件。验证如下：$g(-1)=0=g(1)$，对任意的 $u,v\in[-1,1]$ 时，当 $u,v\in[0,1]$ 时，同理有 $|g(u)-g(v)|=|(1-u)-(1-v)|=|u-v|$；当 $u,v\in[-1,0]$ 时同理有 $|g(u)-g(v)|=|u-v|$；当 $u,v<0$ 时，设 $u\in[-1,0)$，$v\in(0,1]$，有 $|g(u)-g(v)|=|(1+u)-(1-v)|=|u+v|\leqslant|v-u|$。

所以，函数 $g(x)$ 满足题设条件。

(3) 这样的函数不存在，理由如下：

假设存在 $f(x)$ 满足条件，则由 $f(-1)=f(1)=0$ 得：

$$|f(1)-f(-1)|=0 \qquad ①$$

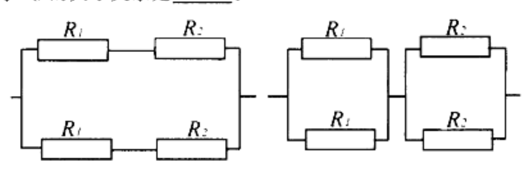
由于对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|=|u-v|$，所以，

$$|f(1)-f(-1)|=|1-(-1)|=2 \qquad ②$$

①与②矛盾，因此假设不成立，即这样的函数不存在。

2 综合题

例 已知 R_1、R_2 是阻值不同的两个电阻，现分别按图 1 - 6(a) 和图 1 - 6(b) 连接。设相应的总值分别为 R_A、R_B，则 R_A 与 R_B 的大小关系是______。



(a) (b)

图 1 - 6

解析 由上图 1 - 6(a) 可知

$$\frac{1}{R_A}=\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_1+R_2}=\frac{2}{R_1+R_2}，所以 R_A=\frac{R_1+R_2}{2}。$$

电路图 1 - 6(b) 可知

$$R_B=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}+\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=\frac{2}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}，所以 R_A>R_B。$$

注 本题是物理和数学综合题，考查了电阻的并联与串联的计算方法，以及运用函数值大小的比较，同时要用到重复不等式的知识。

3　竞赛题

例　若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求 $[a,b]$。

解析　分三种情况讨论区间 $[a,b]$。

(1) 若 $0\leqslant a<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，故 $f(a)=2b$，$f(b)=2a$。于是有

$$\begin{cases}2b=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}\\2a=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}\end{cases}$$

解之得　$[a,b]=[1,3]$

(2) 若 $a<0<b$，$f(x)$ 在 $[a,0]$ 上单调递增，在 $[0,b]$ 上单调递减，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 $2b$，在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取最小值 $2a$。故 $2b=\frac{13}{2}$，$b=\frac{13}{4}$。

由于　$a<0$，又　$f(b)=-\frac{1}{2}(\frac{13}{4})^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}>0$

故　$f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值 $2a$。

即　$$2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2},$$

解得　$$a=-2-\sqrt{17},$$

于是得　$$[a,b]=[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}]。$$

(3) 当 $a<b\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，故 $f(a)=2a$，$f(b)=2b$，即

$$2a=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2},2b=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}。$$

由于方程 $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{13}{2}=0$ 的两根异号，故满足 $a<b<0$ 的区间不存在。

4　开放题

例　某人从 A 地到 B 地乘坐出租车有两种方案：一种出租车收费标准是起步价 10 元，每千米价为 1.2 元；另一种是起步价 8 元，每千米价为 1.4 元。问选择哪一种出租车比较合适？

思路引导　这是一个开放型应用问题，因为问题中的信息不充分：(1) 这两种出租车起步价内的行驶里程是否一致；(2) 从 A 地到 B 地的距离是多少？这就需要对一些相关的社会信息有所了解。根据目前各地出租车管理条例，车型不同，起步价可以不同，但起步价内的行驶里程是一致的(如 4 km 或 3 km)，本题以 4 km 为例。

容易看出，如果乘坐距离在起步价行驶里程内，显然坐起步价为 8 元的合算。

假设起步价行驶里程是 4 km，而且乘坐距离在起步价里程之外，不妨设从 A 到 B 的距离为 $(4+S)$ km，乘坐起步价 10 元的费用为 $P(S)$，乘坐起步价 8 元的费用为 $Q(S)$，则

$P(S)=10+1.2S$，$Q(S)=8+1.4S$。

令 $P(S)=Q(S)$，则 $10+1.2S=8+1.4S$，解得 $S=10$ km。

由于 $P(S)-Q(S)=2-0.2S=\frac{1}{5}(10-S)$，所以当 $S>10$ 时，$P(S)<Q(S)$；当 $S<10$ 时，$P(S)>Q(S)$。这表明当 A 与 B 的距离大于 14 km 时，坐起步价为 10 元的合算；当 A 与 B 的距离小于 14 km 时，坐起步价为 8 元的合算；如果恰好为 14 km，则可任选。

三、数　列

好学篇

——把学习放到游戏中，真爽！

1　相关知识

有位养殖专业户想知道兔子繁殖的规律，于是他围了一个栅栏把一对刚出生的兔子关在里面。已知一对兔子出生后两个月就开始生兔子，以后每月再生一对，假如不发生伤亡现象，满一年时栅栏内有几对兔子呢？它就是著名的兔子数列，最初是由意大利人斐波那契发现的，所以称它为斐波那契数列。

2　身边的学问

父母到银行存款(或贷款)时，如果银行里有多种存款(或贷款)方式时，如何选择最佳的存款(或贷款)方式就涉及到数列问题。通常根据月或年构选等比数列。通过计算即可确定最佳存(贷)方式。

3　趣味问题

某人上 11 级楼梯，如果一步可上一级，也可上两级，则他共有多少种不同的上楼梯的方法？

会学篇

——知识靠点滴积累，不可急于求成

数列是高中数学的重要内容之一，它的重要作用可以从三个方面来看。

(1) 数列有着广泛的实际应用。如堆放物品总数的计算要用到数列前 n 项和公式，又如产品规格设计的某些问题要用到等比数列的原理，再如储蓄、分期付款的有关计算也要用到数列有一些知识。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com