创新思维

数学同步辅导

必修1

创新思维教研组 组编

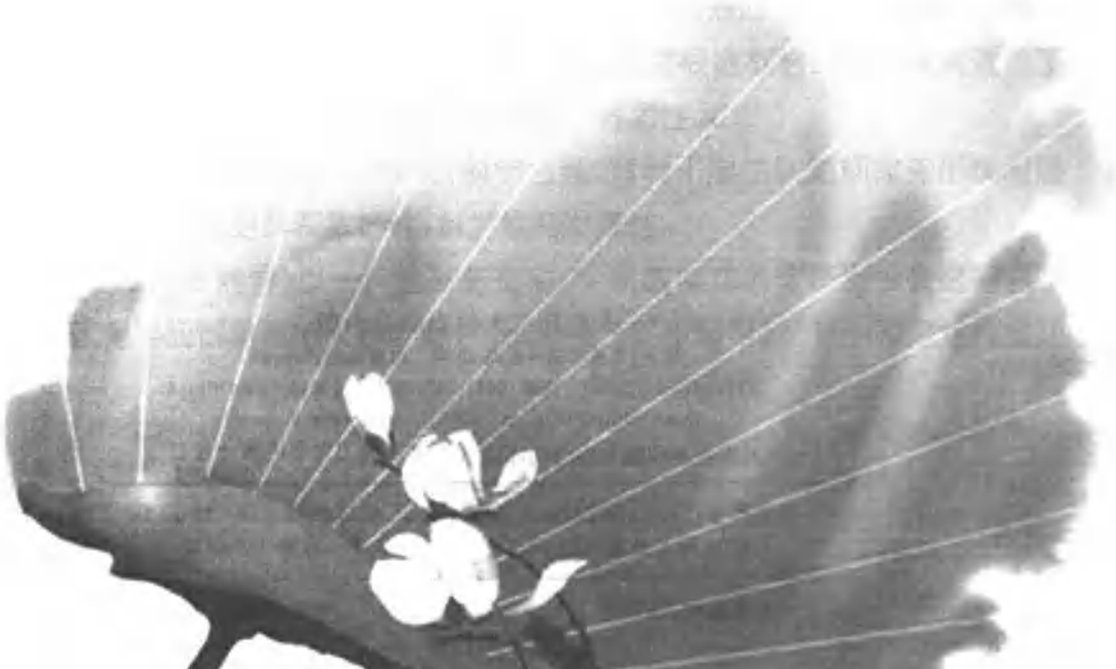
大连理工大学出版社

创新思维

数学同步辅导

必修1

创新思维教研组 组编



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

创新思维·数学同步辅导 1:必修 / 创新思维教研组组编. -大连:大连理工大学出版社, 2006.8
ISBN 7-5611-3297-2

Ⅰ.创… Ⅱ.创… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第089106号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路80号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:205mm×283mm 印张:8 字数:237千字 插页:32
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷

责任编辑:郭继涛 责任校对:娄红岩
封面设计:季 强

定 价:9.90元

前言

今年辽宁省的高中一年级学生进入新一轮课程改革。面对新的教材、新的教学模式、新的教学理念，许多同学心中都有些茫然。针对这种情况我们组织全国几十位高级教师精心打造了《创新思维·同步辅导》系列丛书，目的就是帮助同学们更好地理解教材，顺利地通过概念与实际联系的瓶颈，把知识学懂、学活，同时为下一步的学习打下坚实的基础。

本丛书具有以下特点：

●透彻　作者在对新课程标准和现行考试大纲深入研究的基础上，着力对重点、难点、疑点进行突破，对各种题型和解题方法、技巧、规律、误区等进行透彻的讲解，把培养同学能力升级的步骤和途径作为突出的重点来讲解。

●新颖　紧扣课标理念，从新课标倡导的自主、合作、探究的理念入手，不断创设问题情境。书中有大量新颖的与生活实际相结合的探究性问题，以培养同学们在探究过程中理解知识，并运用知识解决问题的能力。

●实用　为使同学们能更好地理解教材中的重点、难点、疑点，本丛书精编例题，力争对每一个知识点、易错点、易忽略点、考点尽量地进行剖析。点点对应例题，题题揭示规律。

●灵活　全书在与教材对应设置了统一栏目的同时，编者根据教材的内容需要进行了适当调整，建立起教师教学和学生自学的链接，更突出了灵活性。

●科学　本丛书在体例设计上特色鲜明、科学合理，有利于学生认知规律的形成和思维能力的提高，使学生的思维更具有敏捷性、科学性和发散性。

综上，《创新思维·同步辅导》以一种全新的理念、全新的模式去诠释当今教材与教学的关系，诠释素质教育与应试教育的关系。愿《创新思维·同步辅导》丛书引领您走向成功的新境界！

编　者

2006.8

目录

第一章 集合

1.1 集合与集合的表示方法

教材重点剖析

1 集合的含义

一般地，我们把每个研究对象称为一个元素，把一些元素组成的总体叫做集合(简称集).

◉**理解整合**

(1)集合的概念是数学中最原始的、不加定义的概念，它只是通过一些实例，描述性地说明其含义.

(2)集合是一个"整体"，这个整体包含了我们要研究的"所有"对象.

(3)不同的集合，它所包含的元素可能是不一样的，依据集合中元素的个数，我们可以把集合分为有限集和无限集两类. 当集合中元素的个数是有限个时，称该集合为有限集；当集合中元素的个数是无限个时，称该集合为无限集. 当集合中不含任何元素时，我们称该集合为空集. 另外，根据集合中元素的特征，还可以将集合分为点集、数集等.

2 集合中元素的特征

对于给定的集合而言，它的元素必须是确定的，互异的，并且集合与其中元素的排列次序无关，即集合中元素的三个性质：确定性、互异性、无序性. 只要构成集合的元素是一样的，这两个集合就是相等的.

◉**理解整合**

(1)元素的确定性是指：给定一个集合，一个对象要么是这个集合中的元素，要么不是这个集合中的元素. 例如："个子高的人"这一组对象就不能构成集合，因为我们没有一个明确的标准去说明某个人是否是"个子高的人"；再如"直线 $y=x+1$ 上的一些点"这一组对象也不能构成集合，因为对于某个点是否在"一些点"中无法确定.

(2)元素的互异性是指：对于一个给定的集合，集合中的元素一定是不同的，相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素.

(3)元素的无序性是指：集合中的元素无先后次序. 如 $\{1,2,3\}$、$\{1,3,2\}$、$\{2,3,1\}$ 都表示同一个集合.

3 元素与集合的关系

我们通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作：$a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作：$a\notin A$.

◉**类比辨析**

(1)$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素；

(2)"$\in$"与"$\notin$"是元素与集合之间的从属关系，若是集合与集合之间的关系则不能用这两个符号.

4 空集

我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$. 例如：方程 $x^2+1=0$ 没有实数根，所以方程 $x^2+1=0$ 实数根组成的集合没有元素，故 $\{x|x^2+1=0\}=\varnothing$；不等式 $x^2+x+1<0$ 无解，所以不等式 $x^2+x+1<0$ 解集为空集. 空集是一个不含任何元素的特殊的集合，它有一些特殊的性质，我们在解题时一定要特别注意它的特殊性.

(1)空集是任何集合的子集($\varnothing\subseteq A$)，特别地 $\varnothing\subseteq\varnothing$，注意：空集只有一个子集；

(2)空集是任何非空集合的真子集，即：若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subsetneqq A$；

(3)在子集的定义中，不能理解为子集 A 是 B 中的"部分元素"所组成的集合，因为若 $A=\varnothing$，A 中不含任何元素，若 $A=B$ 时，则 A 含有 B 中的所有元素，但此时都说集合 A 是集合 B 的子集.

◉**类比辨析**

深刻理解空集的概念，要分清如下几组记法：

(1)a 与 $\varnothing$：a 表示一个元素，$\varnothing$ 表示一个不含任何元素的集合，它们的关系是 $a\notin\varnothing$，特别地 $0\notin\varnothing$；

(2)$\{0\}$ 与 $\varnothing$：$\{0\}$ 表示一个集合，此集合中只有一个元素 0，$\varnothing$ 表示一个不含任何元素的集合，它们的关系是 $\varnothing\subsetneqq\{0\}$；

(3)$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$：$\varnothing$ 表示一个不含任何元素的集合，$\{\varnothing\}$ 表示一个只含有一个元素 $\varnothing$ 的集合，它们的关系是 $\varnothing\in\{\varnothing\}$(将 $\varnothing$ 看做是 $\{\varnothing\}$ 中的一个元素)或 $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$(将 $\varnothing$ 看做是一个集合).

5 集合的分类

根据集合中元素的个数将集合分为有限集和无限集.

有限集:含有有限个元素的集合叫做有限集;

无限集:含有无限个元素的集合叫做无限集;

根据集合中元素的特征可将集合分为点集、数集等.

6 数学中的一些常用数集及其记法

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 N;

全体正整数组成的集合称为正整数集,记作 N^* 或 N_+;

全体整数组成的集合称为整数集,记作 Z;

全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 Q;

全体实数组成的集合称为实数集,记作 R.

注意:自然数集 N 包含元素 0,这是容易忽视的,尤其在以后的做题过程中要注意.

7 集合的表示——列举法

列举法表示集合就是把集合中的元素一一列举出来,并用花括号"{ }"括起来.

用列举法表示集合时,要注意以下几点:

(1)元素间必须用","隔开.

(2)元素不重复(互异性).

(3)元素无顺序(无序性).

(4)对于含较多或无限多个元素的集合,如果构成该集合的元素有明显的规律,可用列举法表示.但是必须把元素间的规律显示清楚,后面用省略号即可.如:所有大于 0 的偶数组成的集合可表示为$\{2,4,6,8,\cdots\}$,又如所有大于 0 小于等于 100 的整数的集合可表示为$\{1,2,3,\cdots,100\}$.

◉类比辨析

a 与$\{a\}$是不同的,a 表示一个元素,$\{a\}$表示由一个元素 a 构成的集合,一般称$\{a\}$为单元素集合.

8 集合的表示——描述法

有些集合的元素无法用列举法一一列举出来,我们可以用描述法表示,即在花括号"{ }"内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

◉理解整合

(1)用描述法表示集合的一般形式是$\{x\in I\mid P(x)\}$,其中 x 是集合中元素的代表形式,I 是 x 的范围,$P(x)$是元素 x 的共同特征,注意竖线不可省略.使用描述法,要注意以下几点:

①写清楚该集合中元素的代表符号;

②说明该集合中 x 的性质;

③不能出现未被说明的字母;

④多层描述时,应注意"或"与"且"的区别

⑤所有描述的内容都要写在花括号"{ }"内

(2)描述法的语言形式有三种:文字语言,符号语言,图形语言.

例如:表示出直线 $y=x$ 上所有的点组成的集合,可用以下三种方法:

①文字语言:{点 P|点 P 是直线 $y=x$ 上的点};

②符号语言:$\{(x,y)\mid y=x\}$;

③图形语言:在平面直角坐标系内画出直线 $y=x$(略).

这三种语言可以根据具体问题选择使用.

……解题思路剖析……

▶基础题型

1. 集合中元素的确定性

例 1 下列每组对象能否构成集合?

(1)美丽的小鸟;

(2)方程 $x^2-4=0$ 在实数范围内的解;

(3)第一章中的所有难题;

(4)充分接近于 0 的实数全体;

(5)所有的平行四边形;

(6)高一(2)班所有高于 1.70 米的同学.

解析:(1)没有一个明确的标准去判断某只小鸟是否美丽,不符合集合中元素的确定性,所以"美丽的小鸟"不能构成一个集合;同理(3)中没有一个标准去判断某道题是否是难题,(4)没有一个标准去判断某个实数是否接近于 0,故(3)、(4)也不能构成一个集合.

(2)中方程 $x^2-4=0$ 在实数范围内的解就是 2 和 -2,是确定的,故能构成一个集合;(5)、(6)中的对象也是确定的,故也能构成一个集合.

◉误点警示

集合是一组确定的对象的全体.一般地,判断一组对象能否构成集合,关键是看给定对象是否具有一个确定的特征,如果有,就能构成集合,如果没有,就不能构成集合.如本例中的(4),是否接近于 0,没有标准去判断,故这一组对象就不能构成集合.

2. 集合中元素的互异性与无序性

例 2 (1)求实数集$\{1,x,x^2-x\}$中 x 的取值范围;

(2)已知 $x^2\in A=\{1,0,x\}$,求实数 x 的值.

分析:本题主要考查集合中元素的互异性.

解析:(1)由集合中元素的互异性知

$$\begin{cases}x\neq 1\\x^2-x\neq 1\\x^2-x\neq x\end{cases}，解得\begin{cases}x\neq 1\\x\neq\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\\x\neq 0且x\neq 2\end{cases}，$$

故 x 的取值范围是 $x\neq 1$ 且 $x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$.

(2)∵$x^2\in A=\{1,0,x\}$，∴$x^2=0$ 或 $x^2=1$ 或 $x^2=x$，解得 $x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-1$，

当 $x=0$ 时，$A=\{1,0,0\}$，不符合集合中元素的互异性，

当 $x=1$ 时，$A=\{1,0,1\}$，不符合集合中元素的互异性，

当 $x=-1$ 时，$A=\{1,0,-1\}$，符合题意，

∴$x=-1$.

◉方法总结

本例在求解过程中用到了分类讨论的思想，如：在(2)中 $x^2\in A$，x^2 可能是 $1,0,x$ 中的任何一个，故需分 $x^2=0$，$x^2=1$，$x^2=x$ 三种情况进行讨论，求出 x 的值后，必须分 $x=0$，$x=1$，$x=-1$ 三种情况进行讨论看其中元素是否互异.分类讨论的思想是一种重要的数学思想，我们一定要在以后的学习中熟练掌握.

3. 判断某个元素是否在集合内

例3 用符号"∈"与"∉"填空

(1)0 ____ $\mathbf{N}$，$\sqrt{2}$ ____ $\mathbf{Q}$，$(-1)^0$ ____ $\mathbf{N}^*$；

(2)$2\sqrt{2}$ ____ $\{x|x<\sqrt{11}\}$，

$3+\sqrt{17}$ ____ $\{x|6+\sqrt{3}<x\leqslant 10\}$

(3)设 $M=\{x|x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y|y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M$，$y_0\in N$，则 x_0y_0 与集合 M、N 的关系是什么？

解析：(1)依次填∈，∉，∈；

(2)∵$2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{11}$，∴$2\sqrt{2}\in\{x|x<\sqrt{11}\}$，

∵$(\sqrt{17})^2-(3+\sqrt{3})^2=17-(12+6\sqrt{3})=5-6\sqrt{3}<0$，

∴$\sqrt{17}<3+\sqrt{3}$，∴$3+\sqrt{17}<6+\sqrt{3}$，

∴$3+\sqrt{17}\notin\{x|6+\sqrt{3}<x\leqslant 10\}$；

(3)∵$x_0\in M$，$y_0\in N$，

∴$x_0=3m+1$，$m\in\mathbf{Z}$，$y_0=3n+2$，$n\in\mathbf{Z}$，

$x_0y_0=(3m+1)(3n+2)=3(3mn+2m+n)+2\in N$，$x_0y_0\notin M$.

◉方法总结

确定元素是否在集合内，要根据元素是否满足给定集合中元素具有的特征，如果具有，则元素在集合内，如果不具有，则元素不在集合内.如(2)中 $3+\sqrt{17}<6+\sqrt{3}$，所以 $3+\sqrt{17}\notin\{x|6+\sqrt{3}<x\leqslant 10\}$，(3)中 M 中 x_0 具有的特征是 3 的整数倍加 1，N 中 y_0 具有的特征是 3 的整数倍加 2，而 x_0y_0 具有的特征是 3 的整数倍加 2，故 $x_0y_0\in N$，$x_0y_0\notin M$.

4. 求集合中的元素

例4 数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in A(a\neq 1)$.若 $\frac{1}{3}\in A$，求集合中的其他元素.

解析：∵$\frac{1}{3}\in A$，∴$\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\in A$，

∴$\frac{1+2}{1-2}=-3\in A$，

∴$\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}\in A$，∴$\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\in A$，

故 $A=\{\frac{1}{3},2,-3,-\frac{1}{2}\}$

5. 列举法

例5 用列举法表示下列集合：

(1)$A=\{x|x\leqslant 2,x\in\mathbf{N}\}$；

(2)$B=\{x|x^2-2x+1=0\}$；

(3)$M=\{(x,y)|x+y=4,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$；

(4)所有非负偶数组成的集合.

解析：(1)小于等于 2 的自然数有 $0,1,2$，故 $A=\{0,1,2\}$；

(2)方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相同的实根 1，故 $B=\{1\}$；

(3)使得满足 $x+y=4$，$x\in\mathbf{N}^*$，$y\in\mathbf{N}^*$ 的点有(1,3)、(2,2)、(3,1)，故 $M=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

(4)所有非负偶数组成的集合，用列举法可表示为 $\{0,2,4,6,\cdots\}$.

◉方法总结

(1)列举法表示集合时，集合中的元素不能重复(如(2)中方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相同的实根 1，不能写为 $B=\{1,1\}$)，不记次序，不能遗漏，元素与元素之间用","隔开，同时还要注意集合中元素是什么.

(2)当集合中的元素个数较多(或有无限个)且元素有明显的规律时，也可以用列举法表示，但必须把元素间的规律显示清楚，后面用省略号，如(4).

6. 描述法

例6 已知 $A=\{x|x$ 是小于 6 的正整数$\}$，$B=\{x|x$ 是小于 10 的质数$\}$，$C=\{x|x$ 是 24 与 36 的公约数$\}$，用列举法表示下列集合：①$M=\{x|x\in A$ 且 $x\in C\}$，②$N=\{x|x\in B$ 且 $x\notin C\}$.)

解析：A、B、C 都是用描述法表示的，用列举法写出来分别为 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,5,7\}$，$C=\{1,2,3,4,6,12\}$，M 中的代表元素 x 满足的特征性质为 $x\in A$，且 $x\in C$，即 x 既是 A 中的元素，又是 C 中的元素，即 A 与 C 的公共元素，故 $M=$

{1,2,3,4}.

同理 $N=\{5,7\}$.

综合题型

1. 学科综合题

例7 已知 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4\}$，定义集合 A、B 间的运算 $A*B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，则集合 $A*B=$（　　）

A. {1,2,3}　　　B. {2,4}

C. {1,3}　　　D. {2}

分析：本题定义集合为 $A*B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，即 $A*B$ 为所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素组成的集合，所以本题只要找到集合 A 中的元素，然后从中除去属于集合 B 的元素即可.

解析：因为属于集合 A 的元素是1，2，3，但2属于集合 B，所以 $A*B=\{1,3\}$，故选C.

◉方法总结

本题是一个新定义题，运算 $A*B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为所有属于集合 A 且不属于集合 B 的元素组成的集合，即第三节中集合 A 交 B 的补集. 此处主要考查元素与集合的关系、集合的描述法以及分析问题、解决问题的能力.

2. 易错辨解题

例8 直线 $x+y=3$ 与 $x-y=-1$ 的交点组成的集合用描述法怎样表示？

错解：直线 $x+y=3$ 与 $x-y=-1$ 的交点组成的集合用描述法表示为 $\left\{\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}\right\}$ 或 {1,2}.

分析：$\left\{\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}\right\}$ 表示含有一个元素 $\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}$ 的单元素集合，{1,2}表示一个数集.

解析：直线 $x+y=3$ 与 $x-y=-1$ 的交点组成的集合，代表元素一定为直角坐标系内的点，故可表示为 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}\right\}$ 或 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}$；

◉课点警示

用描述法表示集合时，理解集合中元素的代表符号非常重要. 如：本例中用列举法可以写为{(1,2)}，但不能写成 $\left\{x\middle|\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}\right\}$（无意义）、$\left\{\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}\right\}$（表示含有一个元素 $\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}$ 的单元素集合）、$\{x+y=3, x-y=-1\}$（表示含有两个元素 $x+y=3$、$x-y=-1$ 的集合）等错误形式.

创新题型

1. 开放探究题

例9 集合 M 由正整数的平方组成，即 $M=\{1,4,9,16,25,\cdots\}$，若对某集合中的任意两个元素进行某种运算，运算结果仍在此集合中，则称此集合对该运算是封闭的. M 对下列运算封闭的是（　　）

A. 加法　　　B. 减法

C. 乘法　　　D. 除法

解析：本题定义了集合的封闭运算，要探求集合对哪种运算封闭，一种思路是直接根据定义去探求这种运算，对于选择题，再一种思路就是排除不符合定义的运算，从而得到符合定义的运算.

设 a、b 表示任意两个正整数，则 a^2、b^2 的和不一定是属于 M，如 $1^2+2^2=5\notin M$；a^2、b^2 的差也不一定是属于 M，如 $1^2-2^2=-3\notin M$；a^2、b^2 的商也不一定是属于 M，如 $\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}\notin M$；因为 a、b 表示任意两个正整数，$a^2\cdot b^2=(ab)^2$，ab 为正整数，所以 $(ab)^2$ 属于 M，即 a^2、b^2 的积属于 M. 故选C.

◉技巧点拨

本题是一个新定义型的开放探究题，主要考查了元素与集合的关系、分析问题、解决问题的能力. 本题给定集合 $M=\{1,4,9,16,25,\cdots\}$，探求对此集合封闭的运算，对于不是封闭的运算，可通过举反例的方法排除之. 如A、B、D；对于封闭的运算，则利用已知条件证明之即可.

2. 课标创新题

例10 已知集合 $M=\{0,2,4\}$，定义集合 $P=\{x|x=ab,a\in M,b\in M\}$，求集合 P.

解析：求集合 P，根据集合 P 的定义，集合 P 中的代表元素 x 满足 $x=ab$，$a\in M$，$b\in M$，所以分别取 $a\in M$，$b\in M$，求出 ab 的所有可能值，用列举法一一列举出来，即得集合 P.

$\because a\in M, b\in M$，$\therefore a=0,2,4$，　$b=0,2,4$，

a 或 b 至少有一个为0时，$x=ab=0$，

$a=2$ 且 $b=2$ 时，$x=ab=4$，$a=2$ 且 $b=4$ 时，$x=ab=8$，

$a=4$ 且 $b=2$ 时，$x=ab=8$，$a=4$ 且 $b=4$ 时，$x=ab=16$，

根据集合中元素的互异性知 $P=\{0,4,8,16\}$.

◉技巧点拨

本题是一个新定义型的信息迁移题，主要考查了元素与集合的关系、集合的两种表示方法以及分析问题、解决问题的能力. 做好本题的关键是深刻理解定义的内涵及其外延，搞清楚定义描述的关系，集合 P 中的元素 x 是集合 M 中任意两个元素（包括两个相同的元素）的积确定的，表示 P 时注意集合中元素的互异性.

高考题

例11 （2005·湖北）设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是（　　）

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

解析：∵$a\in P,b\in Q$，∴$a=0,2,5,b=1,2,6$，

当$a=0$时，$a+b=1,2,6$；

当$a=2$时，$a+b=3,4,8$；

当$a=5$时，$a+b=6,7,11$；

综上可知：$P+Q=\{1,2,6,3,4,8,7,11\}$共有8个元素，故选B.

◉**技巧点拨**

本题是一个定义创新题，集合$P+Q$是用描述法表示的，代表元素为$a+b$，解题时可先确定a的值然后再确定b的值，故需分类讨论求得$P+Q$中的元素，最后要注意集合中元素的互异性.

例12　(2004·湖南)若集合$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$，若点$P(2,3)\in A$且$P(2,3)\notin B$，则(　　)

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

解析：∵$(2,3)\in A$，∴$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$是不等式$2x-y+m>0$的一组解，即$4-3+m>0$，即$m>-1$，

∵$(2,3)\notin B$，∴$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$是不等式$x+y-n>0$的一组解，即$2+3-n>0$，解得：$n<5$，故选A.

◉**技巧点拨**

本题考查元素与集合的关系，若某个元素属于某个集合，则满足该集合的元素特征，若某个元素不属于某个集合，则不满足该集合的元素特征，代入即可求得参数的范围.

【拓展训练】

1. 在"①高一数学课本中的难题；②所有的正三角形；③方程$x^2+2=0$的实数解"中，能够表示成集合的是(　　)

A. ②　　B. ③

C. ②③　　D. ①②③

2. 含有三个实数的集合可以表示为$\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$，也可以表示为$\{|x|,x+y,0\}$，则$x^5-y^3$的值为(　　)

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. ±1

3. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{N}|-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$，则必有(　　)

A. $-1\in A$　　B. $0\in A$

C. $\sqrt{3}\in A$　　D. $2\in A$

4. 已知$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，定义集合A、B间的运算$A+B=\{x|x=x_1+x_2,x_1\in A,x_2\in B\}$，则集合$A+B$中最大的元素是________.

5. 已知$A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，对任意$a\in A$，有$|a|\in B$，则$B=$______.

6. 将下列用描述法表示的集合用列举法表示出来：

(1)$M=\{x\in\mathbf{N}|\frac{6}{1+x}\in\mathbf{N}^*\}$；

(2)$C=\{\frac{6}{1+x}\in\mathbf{N}^*|x\in\mathbf{N}\}$

7. 设$P=\{3,4,5\}$，$Q=\{4,5,6,7\}$，定义$P*Q=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$，则$P*Q$中元素的个数为________.

8. 区分下列集合有何不同：$\{x|y=x^2+1\}$，$\{y|y=x^2+1\}$，$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

9. 设"*"是集合A中元素的一种运算，如果对于任意的$x,y\in A$，都有$x*y\in A$，则称运算"*"对集合A是封闭的.若$M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，$\mathbf{Z}$为整数集，则对集合$M$不封闭的运算是(　　)

A. 减法　　B. 乘法

C. 除法　　D. 乘方

10. 定义集合$A*B=\{x|x=a-b,a\in A,b\in B\}$，若$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，则$A*B=$______.

11. (2004·全国)若集合$M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x=2a,a\in M\}$，则M与N中的公共元素组成的集合为(　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,2\}$

12. (2003·上海)设集合$A=\{x||x|<4\}$，$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$，则集合$\{x|x\in A$且$x\notin A\cap B\}=$________.

……解题方法放送……

分类讨论的思想在集合中的应用(一)

在解答某些数学问题时，有时会遇到多种情况，需要对各种情况加以分类，并逐类求解，然后综合得解，这就是分类讨论法．

进行分类讨论时，我们要遵循的原则：分类的对象是确定的，标准是统一的，不遗漏、不重复，科学地划分，分清主次，不越级讨论．其中最重要的一条是"不漏不重"．

解答分类讨论问题时，我们的基本方法和步骤是：(1)要确定讨论对象以及所讨论对象的全体的范围；(2)确定分类标准，正确进行合理分类；(3)对分类逐步进行讨论，分级进行，获取阶段性结果；(4)进行归纳小结，综合得出结论．

下面举例说明：

例1 设 a、b、c 为非零实数，则 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为(　　)

A. $\{4\}$　　B. $\{-4\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{0,-4,4\}$

解析：∵ a、b、c 为非零实数，则 $\frac{a}{|a|}$、$\frac{|b|}{b}$、$\frac{c}{|c|}$、$\frac{|abc|}{abc}$ 的取值可以分别取 1 或 -1，

∴当 a、b、c 都为负数时，$\frac{a}{|a|}$、$\frac{|b|}{b}$、$\frac{c}{|c|}$、$\frac{|abc|}{abc}$ 中 4 个值都为 -1，故 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}=-4$；

∴当 a、b、c 只有一个为正数时，$\frac{a}{|a|}$、$\frac{|b|}{b}$、$\frac{c}{|c|}$、$\frac{|abc|}{abc}$ 中必有两个值为 1，两个值为 -1，故 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}=0$；

∴当 a、b、c 有两个为正数时，$\frac{a}{|a|}$、$\frac{|b|}{b}$、$\frac{c}{|c|}$、$\frac{|abc|}{abc}$ 中必有两个值为 1，两个值为 -1，故 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}=0$；

∴当 a、b、c 都为正数时，$\frac{a}{|a|}$、$\frac{|b|}{b}$、$\frac{c}{|c|}$、$\frac{|abc|}{abc}$ 中 4 个值都为 1，故 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}=4$；

故 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为 $\{0,-4,4\}$

◉**技巧点拨**

本题在求解过程中用到了分类讨论的思想，对 a、b、c 的值进行讨论．

例2 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$．

(1)若 A 为空集，求 a 的取值范围；

(2)若 A 中只有一个元素，求 a 的值并把这个元素写出来；

(3)若 A 中至多有一个元素，求 a 的范围．

分析：集合 A 中的元素是方程 $ax^2-3x+2=0(a\in\mathbf{R})$ 的根，故题目中 A 中元素的个数可转化为找方程的根的个数，注意此方程不一定为二次方程，故要分情况讨论．

解析：(1)若 $A=\varnothing$，即方程 $ax^2-3x+2=0$ 无解，

∴ $\Delta=9-8a<0$，即 $a>\frac{9}{8}$．

(2)若 A 中只有一个元素，有两种情况．

当 $a=0$ 时，方程为 $-3x+2=0$，即 $x=\frac{2}{3}$．

当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2-3x+2=0$ 有两相等实根．

∴ $\Delta=9-8a=0$，即 $a=\frac{9}{8}$，可解得 $x=\frac{4}{3}$．

∴当 $a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$ 时，A 中只有一个元素为 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$．

(3) A 中至多有一个元素，包括 A 为空集和 A 中只有一个元素两种情况，由(1)(2)可知 $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$．

◉**技巧点拨**

"$a=0$"这种情况容易被忽视，对于方程 $ax^2-3x+2=0$ 有两种情况：一是 $a=0$，它是一元一次方程；二是 $a\neq0$，它是一元二次方程只有在 $a\neq0$ 情况下，才可以用判别式 Δ 来解题．

……能级精题演练……

一、实践应用

1. 集合 $P=\{1,a\}$，a^2 是集合 P 中的元素，则 a 的取值有(　　)

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

2. 已知集合 $S=\{a,b,c\}$ 中的三个元素可构成 $\triangle ABC$ 的三条边长，那么 $\triangle ABC$ 一定不是(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

3. 下列各题中的 M、P 表示同一集合的是(　　)

A. $M=\{x|x^2+0.01=0\}$，$P=\{x|x^2=0\}$

B. $M=\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{(x,y)|x=y^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

C. $M=\{y|y=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$，$P=\{t|t=(y-1)^2+1,y\in\mathbf{R}\}$

D. $M=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x|x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$

4.设 a、b、c 为非零实数，则 $x=\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ca|}{ca}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合为(　　)

A. $\{4,-2\}$　　B. $\{-2,0\}$

C. $\{-2,0,2\}$　　D. $\{0,-2,4,2\}$

5.集合 $A=\{0,1,2,3,5\}$，当 $x\in A$ 时，若 $x-1\notin A$，$x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，则 A 中孤立元素的个数为________.

6.若一数集中的任一元素的倒数仍在该集合中，则称该集合为"可倒数集"，试写出一个含三个元素的可倒数集________.

二、拓展提高

7.已知 $A=\{(x,y)\mid y=2x-1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+3\}$，$a\in A$，$a\in B$，求 a.

三、探究创新

8.设集合 S 为 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的子集，且 S 中任意两个不同的数作和，所得的数两两不同，问：S 中最多有多少个元素？

1.2 集合之间的关系与运算

1.2.1 集合之间的关系

……教材重点剖析……

❶子集的概念

一般地，对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A").

◉理解整合

学习子集的概念注意以下几点：

(1)子集的定义用符号语言可表示为：若对任意的 $x\in A$，则 $x\in B$，那么 $A\subseteq B$.

用图形语言可表示为图 1-2-1.

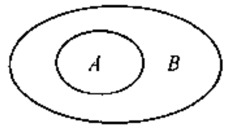


图 1-2-1

在后面的学习中，我们也要有意识地将一些自然语言转化成符号语言或图形语言，这对于我们的学习非常重要.

(2)当集合 A 不是集合 B 的子集时，我们可记作 $A\nsubseteq B$(或 $B\nsupseteq A$)，读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").例如：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e,f\}$，因为对于集合 A 中的元素 a，$a\notin B$，故 $A\nsubseteq B$.

(3)任何一个集合都是他本身的子集($A\subseteq A$).因为对于集合 A，它的任何一个元素 a 都属于集合 A 本身.

❷集合的相等和真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集($A\subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集($B\subseteq A$)，此时集合 A 与集合 B 中的元素是一样的，因此集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.如果集合 $A\subseteq B$，但存在 $x\in B$，且 $x\notin A$，我们称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

◉理解整合

(1)类比是根据两个不同的对象，在某些方面(如特征、属性、关系等)的类同之处，猜测这两个对象在其他方面也可能有类同之处，并做出某种判断的推理方法.类比是科学研究最普遍的方法之一.在数学中，类比是发现概念、方法、定理和公式的重要手段，也是开拓新领域和创造新分支的

重要手段.

学习集合的关系，可以与实数中的结论类比.

①实数中：$a\leqslant b$ 包含两层含义：$a=b$，$a<b$；

集合中：$A\subseteq B$ 包含两层含义：$A=B$，$A\subsetneqq B$；

②实数中：若 $a\geqslant b$ 且 $a\leqslant b$，则 $a=b$；

集合中：若 $A\supseteq B$ 且 $A\subseteq B$，则 $A=B$，利用这一结论可以证明两个集合相等；

③实数中：若 $a\geqslant b$，$b\geqslant c$，则 $a\geqslant c$；

集合中：若 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq C$，则 $A\supseteq C$（传递性）；

(2)两个集合 A 与 B 之间的关系常用 $=$、$\subseteq$、$\nsubseteq$、$\subsetneqq$ 等符号表示，如果 A 是 B 的子集，也是真子集，用符号 $\subseteq$ 或 $\subsetneqq$ 均可，但是记作 $A\subsetneqq B$ 更准确，解题时应选这种最优表示方法.

……………解题思路剖析……………

▶基础题型

1. 求子集个数问题

例1 已知 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，写出所有满足条件的 A.

解析：$\because\{a,b\}\subseteq A$，$\therefore a\in A$，且 $b\in A$，

又 $\because A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，

$\therefore$ 集合 A 为 $\{a,b\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,b,e\}$，$\{a,b,c,d\}$，$\{a,b,c,e\}$，$\{a,b,d,e\}$.

◉方法总结

(1)对于一般的求某个集合的子集的个数问题可直接根据当集合 A 中有 n 个元素时，有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集这一结论求即可. 本题若求满足条件的集合的个数，可以求 $\{c,d,e\}$ 的真子集的个数即可.

(2)对于与本题类似的题目，一般用列举法一一列举出来即可，列举时一般按照集合元素个数由少到多不重不漏地一一列举.

2. 用 Venn 图解题

例2 设集合 $A=\{x|x$ 是菱形$\}$，$B=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，$C=\{x|x$ 是正方形$\}$，指出 A、B、C 之间的关系.

解析：$\because$ 正方形一定是菱形，菱形一定是平行四边形，

用 Venn 图可表示为（如图 1-2-2）

$\therefore C\subsetneqq A\subsetneqq B$

图 1-2-2

◉方法总结

用 Venn 图表示集合之间的关系更直观形象，在后面的学习中，还要经常用 Venn 图表示集合之间的关系，我们要充分重视.

3. 用数轴解题

例3 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x<4\}$，$B=\{x|x<a\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 a 的取值集合.

解析：将数集 A 表示在数轴上（如图 1-2-3），要满足 $A\subsetneqq B$，表示数 a 的点必须在表示 4 的点处或在表示 4 的点的右边，所以所求 a 的集合为 $\{a|a\geqslant 4\}$.

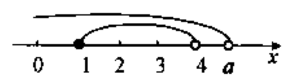


图 1-2-3

◉技巧点拨

本题用数轴处理一些实数集之间的关系，以形助数，直观形象，体现了数形结合的思想，这在以后的学习中经常用到. 但一定要验证端点值是否能取到. 如本例中 $a=4$ 时，$B=\{x|x<4\}$，此时也满足 $A\subsetneqq B$，此题若 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$，$a=4$ 时，就不能满足 $A\subsetneqq B$.

4. 集合间的包含关系

例4 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, a\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解析：$\because A=\{0,-4\}$，$B\subseteq A$，

(1)当 $B=\varnothing$ 时，方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无解，

$\therefore\Delta=4[(a+1)^2-(a^2-1)]<0$，$\therefore a<-1$

(2)当 $B\subsetneqq A(B\neq\varnothing)$ 时，则 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$，

即方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 只有一解，

$\therefore\Delta=8a+8=0$，$a=-1$，此时 $B=\{0\}$ 满足条件；

(3)当 $B=A$ 时，方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有两个不等实根 $0,-4$，

$$\therefore\begin{cases}\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)>0\\ a^2-8a+7=0\\ a^2-1=0,\end{cases}\quad\therefore a=1$$

综上可知 $a\leqslant -1$ 或 $a=1$.

◉方法总结

(1)集合 $B\subseteq A$ 包含两种情况，一种是真包含，再一种是相等，本题必须讨论这两种情况；(2)空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集，在由已知集合的关系求参数范围时，一定不要漏掉讨论 $B=\varnothing$ 的情况.

5. 集合的相等

例5 下列各组中的两个集合相等的有（　　）

①$P=\{x|x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=2(n-1), n\in\mathbf{Z}\}$；

②$P=\{x|x=2n-1, n\in\mathbf{N}^*\}$，$Q=\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{N}^*\}$；

③$P=\{x|x^2-x=0\}$,$Q=\{x|x=\frac{1+(-1)^n}{2}$,$n\in\mathbf{N}^*\}$;

④$P=\{x|x=2m+1,m\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=4m\pm1,m\in\mathbf{Z}\}$

A. ①②③　　B. ①③④

C. ②③④　　D. ①③

解析:①$\because n\in\mathbf{Z},n-1\in\mathbf{Z}$,

$\therefore P$与Q都表示由所有偶数组成的集合,故$P=Q$;

②$\because P$是由1,3,5,7,…所有正奇数组成的集合,Q是由3,5,7,…所有正奇数组成的集合,但$1\notin Q$,$\therefore Q\subsetneqq P$;

③$\because P=\{0,1\}$,而Q中:

当n为奇数时,$x=\frac{1+(-1)^n}{2}=0$,当n为偶数时,$x=\frac{1+(-1)^n}{2}=1$,

$\therefore Q=\{0,1\}$,故$P=Q$;

④**法一**:利用特殊值:令$m=-2,-1,0,1,2$,可得$P=\{\cdots,-3,-1,1,3,5\}$,$Q=\{\cdots,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,\cdots\}$,都表示所有奇数组成的集合,故$P=Q$;

法二:对$x\in P$,$x=2m+1$,当m为偶数时,令$m=2k$,$k\in\mathbf{Z}$,$x=4k+1\in Q$,当m为奇数时,令$m=2k-1$,$k\in\mathbf{Z}$,$x=4k-1\in Q$,$\therefore P\subseteq Q$;

反之,对$x\in Q$,$x=2\cdot 2k\pm1\in P$,$\therefore Q\subseteq P$,故$P=Q$.

◉技巧点拨

本例①是从函数的角度说明的,②③用一一列举的方法判断的,④中法二用定义证明的.③④注意分类讨论.

▶综合题型

1. 学科综合题

例6 已知集合$A=\{x|x^2-2x-8=0\}$,$B=\{x|x^2+ax-a^2-12=0\}$,当$B\subseteq A$时,求实数a的取值范围.

解析:由已知得$A=\{-2,4\}$,B是关于x的方程$x^2+ax+a^2-12=0$的解集,

因为$B\subseteq A$,所以$B=\{-2\},\{4\},\{-2,4\},\varnothing$.

(1)若$B=\{-2\}$,则$(-2)^2+a(-2)+a^2-12=0$,解得$a=4$或$a=-2$,

当$a=4$时,恰有$\Delta=0$;

(2)若$B=\{4\}$,则$4^2+4a+a^2-12=0$,解得$a=-2$,此时$\Delta>0$,舍去;

(3)若$B=\{-2,4\}$,则由(1)(2)知,$a=-2$,此时$\Delta>0$,符合题意;

(4)若$B=\varnothing$,由$\Delta<0$,解得$a>4$或$a<-4$.

综上所述,所求的取值范围是$a\geqslant4$或$a=-2$或$a<-4$.

◉方法总结

本题集合中的元素即方程的解,集合中的元素的个数即方程的解的个数.因为$B\subseteq A$,所以需对集合B中的元素进行讨论.

2. 易错辨解题

例7 已知$M=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$,$P=\{x|x=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}^*\}$,则$M$与$P$的关系是______.

错解:集合P中$x=b^2-4b+5=(b-2)^2+1$,与集合M中形式一样,故$M=P$.

分析:误将$a,b\in\mathbf{N}^*$,看成$a,b\in\mathbf{Z}$.

正解:设任意$x\in M$,则$x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*$,

由于$x=a^2+1=(a+2)^2-4(a+2)+5$,

所以$x\in P$,所以$M\subseteq P$.

又当$b=2$时,$b^2-4b+5=1\in P$,但当$a\in\mathbf{N}^*$时,$a^2+1>1$,$1\notin M$,

所以$M\subsetneqq P$.

◉误点警示

解答集合关系的有关问题时,一定要搞清集合中的元素的特征,判断集合之间的关系时,一般要先化简,在考虑是否是真子集时,通常用特值法.

▶创新题型

1. 开放探究题

例8 已知非空集合P满足:①$P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,②若$a\in P$,则$(6-a)\in P$,符合上述条件的非空集合P有多少个?写出这些集合来.

分析:题目给我们两个信息,一个是$P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,再一个就是a与$(6-a)$同属于集合P,所以a与$(6-a)$是成对出现的.

解析:若$1\in P$,则$(6-1)=5\in P$,故1,5这两个元素必须同时属于P或同时不属于P,若$2\in P$,则$(6-2)=4\in P$,故2,4这两个元素必须同属于P或同时不属于P,若$3\in P$,则$(6-3)=3\in P$,故3这个元素属于P或不属于P,故符合已知条件的非空集合P可为:$\{1,5\}$,$\{2,4\}$,$\{3\}$,$\{1,3,5\}$,$\{2,3,4\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$共7个.

◉方法总结

本题探究符合题设条件的非空集合P是不惟一的,是一个结论开放型的探究题.这一类问题立意于对发散思维能力的培养和考查,具有开放性,解法活、形式新,无法套用统一的解题模式,不仅有利于考查和区分考生的数学素质和创新能力,而且还可以有效地检测和区分考生的学习潜能.

2. 课标创新题

例9 已知集合$M=\{0,1\}$,集合$P=\{x|x\subseteq M\}$,则集合M与P的关系是(　　).

A. $M\subseteq P$　　B. $M\subsetneqq P$

C. $P\subsetneqq M$　　D. $M\in P$

分析:本题集合P中的元素$x\subseteq M$,说明x是M的子集,即集合P是由M的所有子集组成的集合.

解析：$\because x\subseteq M$，$\therefore x$ 为：$\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}$

$\therefore P=\{x|x\subseteq M\}=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

$\therefore\{0,1\}$ 是 P 的一个元素，即 $M\in P$，故选 D.

◉技巧点拨

一般地，元素与集合之间的关系是从属关系，用“$\in$ 或 $\notin$”表示；集合与集合之间的关系是包含关系，用“$\subseteq$ 或 $\nsubseteq$”表示. 但元素与集合之间、集合与集合之间的关系是相对的，本例中 $P=\{x,x\subseteq M\}$，$x\subseteq M$，说明 x 是一个集合，而 x 又是 P 中的元素，故集合 P 是由一些集合组成的集合.

▶高考题

例 10 （2005·北京）设集合 $M=\{x|x>1\}$，$P=\{x|x^2>1\}$，则下列关系中正确的是（　　）

A. $M=P$　　B. $P\subseteq M$

C. $M\subseteq P$　　D. $M\cap P=R$

解析：$\because P=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$，$\therefore M\subseteq P$，故选 C

◉方法总结

本题考查解不等式与集合之间的关系，比较简单，这也是高考考集合题时经常考查的一个知识点.

例 11 已知三元素集合 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x 与 y 的值.

解析：由 $A=B$ 得：$x=0$ 或 $xy=0$ 或 $x-y=0$，

①若 $x=0$，则 $A=\{0,0,-y\}$，$B=\{0,0,y\}$，不满足集合中元素的互异性，故 $x\neq0$；

②若 $xy=0$，由①知 $y=0$，$A=\{x,0,x\}$，$B=\{0,|x|,0\}$，不满足集合中元素的互异性，故 $xy\neq0$；

由①②知 $\begin{cases}x\neq0 \text{ 且 } y\neq0\\ x-y=0\\ x=|x|\\ xy=y\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\neq0 \text{ 且 } y\neq0\\ x-y=0\\ x=y\\ xy=|x|\end{cases}$，解得：$x=y=1$ 或 $x=y=-1$，

当 $x=y=1$ 时，$A=\{1,1,0\}$，$B=\{0,1,1\}$，不满足集合中元素的互异性；

当 $x=y=-1$ 时，$A=\{-1,1,0\}$，$B=\{0,1,-1\}$ 合题意，综上可知：$x=y=-1$.

◉方法总结

判断两个集合相等有两个思路：(1)看两个集合中的元素是否完全相同，有两个方法：①将两个集合中的元素一一列举出来，比较之；②看集合中的代表元素是否一致且代表元素满足的条件 $P(x)$ 是否一致，若均一致，则两集合相等.

(2)利用本节集合相等的定义证明：$A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

【拓展训练】

1. 同时满足 $\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是（　　）

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

2. 已知集合 $M\subseteq\{0,1,2,3,4\}$ 且 $M\subseteq\{0,2,4,8\}$，则集合 M 的元素个数最多是（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. 用 Venn 图表示集合 $A=\{1,2,3\}$ 与集合 $B=\{1,2,3,4,5\}$ 之间的关系（将元素标在集合内）.

4. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x<-10$ 或 $x>5\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x<a+4\}$，若 $A\not\supseteq B$，则实数 a 的取值范围是______.

5. 若 $\{x|2x-a=0\}\subsetneqq\{x|-1<x<3\}$，则 a 的取值范围是______.

6. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的值为______.

7. 设 $M=\{x|x=\frac{2n+1}{4},n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{4m\pm1}{4},m\in\mathbf{Z}\}$，则 M 与 N 的关系是（　　）

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. $M\nsubseteq N$

8. 已知集合 $M=\{x|x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$，则 M、N、P 满足的关系是（　　）

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

9. 已知集合 $S=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$P=\{x||x|<q\}$，求满足 $P\subsetneqq S$ 的实数 q 的取值范围.

10. 已知 $A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，则 A 与 B 的关系是__________.

11. 已知集合 $A\subsetneqq\{1,2,3\}$，且 A 中至多只有一个奇数，写出所有满足条件的集合 A.

12. 下列关系正确的是(　　)

A. $0\in\varnothing$　　B. $0=\varnothing$

C. $0=\{0\}$　　D. $\varnothing\in\{\varnothing\}$

13. (2004・湖北) 设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\subsetneqq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$

②$A\nsubseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

③$A\nsubseteq B\Leftrightarrow A\nsupseteq B$

④$A\nsubseteq B\Leftrightarrow$存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$

其中真命题的序号是______.(把符合要求的命题序号都填上)

14. (2003・上海)已知集合 $A=\{x\,\|\,x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围____________.

解题方法放送

分类讨论的思想在集合中的应用(二)

例 1　已知集合 $A=\{x|1<ax<2\}$，$B=\{x||x|<1\}$，满足 $A\subseteq B$，求实数 a 的范围.

分析：对参数进行讨论，写出集合 A、B，让其满足 $A\subseteq B$，求 a 值.

解析：$\because B=\{x|-1<x<1\}$，

(1)当 $a=0$ 时，$A=\varnothing$，满足 $A\subseteq B$.

(2)当 $a>0$ 时，$A=\{x|\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}\}$，

$\because A\subseteq B$，$\therefore\begin{cases}\frac{1}{a}\geqslant -1,\\ \frac{2}{a}\leqslant 1.\end{cases}$

$\therefore a\geqslant 2$.

(3)当 $a<0$ 时，$A=\{x|\frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}\}$，

$\because A\subseteq B$，$\therefore\begin{cases}\frac{2}{a}\geqslant -1,\\ \frac{1}{a}\leqslant 1.\end{cases}$

$\therefore a\leqslant -2$.

综上，$a=0$，或 $a\geqslant 2$，或 $a\leqslant -2$.

◉**技巧点拨**

本题求解集合 A 时，要分类讨论 a 取值的三种情形，注意不要漏了 $a=0$ 的情形.

例 2　已知 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x|mx=1\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 m 所构成的集合 M，并写出 M 的所有子集.

分析：由 $B\subsetneqq A$ 知 B 是 A 的真子集，由列举法求出 A，再求出 B，进而求 m 值.

解析：由 $x^2-5x+6=0$ 得 $x=2$ 或 $x=3$，

$\therefore A=\{2,3\}$.

由知 $B\subsetneqq A$，$B=\{2\}$或$\{3\}$或$\varnothing$.

若 $B=\varnothing$，则 $m=0$；

若 $B=\{2\}$，则 $m=\frac{1}{2}$；

若 $B=\{3\}$，则 $m=\frac{1}{3}$.

故 $M=\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$，从而 M 的所有子集为：

$\varnothing,\{0\},\{\frac{1}{2}\},\{\frac{1}{3}\},\{0,\frac{1}{2}\},\{0,\frac{1}{3}\},\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\},\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$.

◉**技巧点拨**

本题求集合时，由 $B\subsetneqq A$ 可知，B 可按$\varnothing$，$\{2\}$，$\{3\}$三种情况分类求解讨论，要注意空集的情况不要漏掉.

能级精题演练

一、实践应用

1. 六个关系式：(1)$\{a,b\}=\{b,a\}$，(2)$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$，(3)$\varnothing=\{\varnothing\}$，(4)$\varnothing=\{0\}$，(5)$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，(6)$0\in\{0\}$，其中正确的个数是(　　)

A. 6 个　　B. 5 个

C. 4 个　　D. 3 个

2. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，集合 $B=\{x^2,1\}$，且 $B\subseteq A$，则满足条件的实数 x 的个数有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. 已知集合 $M=\{(x,y)|x+y>0,xy>0\}$，$N=\{(x,y)|x>0$ 且 $y>0\}$，那么集合 M、N 之间的关系是(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. 以上都不对

4. 满足条件$\{0,1\}\cup A=\{0,1\}$的所有集合的个数是（　　）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

5. 下列关系正确的有________.

(1)$\{a\}\subseteq\{a,b\}$，

(2)$\{a\}\in\{a,b\}$，

(3)$\{a\}\in\{x|x\subseteq\{a,b\}\}$，

(4)$\{a\}\subseteq\{x|x\subseteq\{a,b\}\}$，

(5)$\varnothing\in\{x|x\subseteq\{a,b\}\}$，

(6)$\varnothing\subseteq\{x|x\subseteq\{a,b\}\}$.

6. 已知$A\subsetneqq B$，且$A\subsetneqq C$，$B=\{0,1,2,3\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则满足上述条件的A为________.

二、拓展提高

7. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}|mx^2-2x+3=0,m\in\mathbf{R}\}$，若$A$中元素至多只有一个，求$m$的取值范围.

8. 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z|z=x^2,x\in A\}$，若$C\subseteq B$，求实数$a$的取值范围.

三、探究创新

9. 求满足$\{x|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}\subsetneqq M\subseteq\{x|x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$的集合$M$的个数.

1.2.2　集合的运算

……教材重点剖析……

❶交集

一般地，由属于集合A且属于集合B的所有元素组成的集合，称为A与B的交集，记作：$A\cap B$，读作“A交B”，定义式为：$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$，用Venn图表示为图1-2-4：

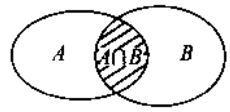


图1-2-4

◉理解整合

(1)关于集合的交集的定义要注意以下几点：

①“$x\in A$且$x\in B$”的意思是x是集合A与集合B共有的公共元素；

②$A\cap B$中的元素是“所有”属于集合A且属于集合B的元素，而不是部分；

③当集合A与集合B没有公共元素时，$A\cap B=\varnothing$.

(2)两个集合A和B有如图1-2-5所示位置关系，其中的阴影部分分别表示它们的交集.

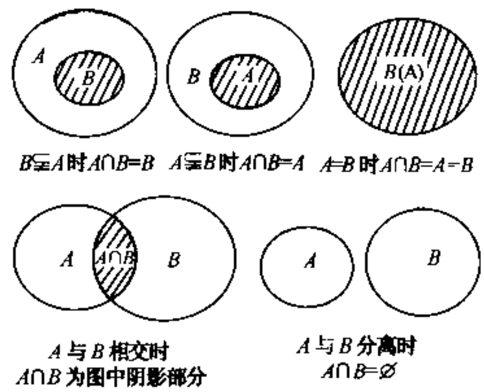


图1-2-5

(3)由交集的定义可推出交集有如下性质：(结合Venn图熟记)

①$(A\cap B)\subseteq A$，$(A\cap B)\subseteq B$，

②$A\cap A=A$，

③$A\cap\varnothing=\varnothing$，

④$A\cap B=B\cap A$

❷并集

一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素所组