SHUANGJI YAODIAN JINGXI CONGSHU

双基要点精析丛书

高二册

GAOZHONG SHUXUE

SHUANGJI YAODIAN JINGXI

高中数学双基要点精析

鲁鹤鸣 编著

Maths

上海科学技术文献出版社

SHUANGJI YAODIAN JINGXI CONGSHU 双基要点精析丛书

高二册

GAOZHONG SHUXUE
SHUANGJI YAODIAN JINGXI

高中数学双基要点精析

鲁鹤鸣 编著

Maths

上海科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学双基要点精析.高二/鲁鹤鸣编著.一上海：上海科学技术文献出版社，2006.8
(双基要点精析丛书)
ISBN 7-5439-2962-7

Ⅰ.高... Ⅱ.鲁... Ⅲ.数学课一高中一教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第066684号

责任编辑：忻静芬
特邀编辑：周 韬
封面设计：王 慧

高中数学双基要点精析
高 二 册
鲁鹤鸣 编著
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号 邮政编码200031)
全 国 新 华 书 店 经 销
江苏常熟人民印刷厂印刷
*
开本787×960 1/16 印张11 字数221 000
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1—6 000
ISBN 7—5439—2962—7/G·786
定价：17.00元
http://www.sstlp.com

丛书前言

教育总是要走在时代发展的前头。我国的高中教育随着改革、开放二十多年的发展，不论教育的内容以及它的广度、深度，还是前沿的触角可以说已接近国际的先进水平。并且我国的高中教育还保持着中国基础教育的固有特色——重视基础知识、基本技能的教学。

但各地教学水平的不平衡，升学竞争的激烈仍使整体的课堂教学水平呈滞后状态。我们组织有丰富经验的、在第一线从事教学实践的教师编写这套《精析》丛书，就是想对目前在广泛使用的各类高中数学、物理、化学教材，根据教育部颁布的大纲与考纲给同学们进行精辟地分析；精确地解答；精细地梳理，也给出一些精炼的例题与习题。让它作为你最好的课外辅导教师，既能省时、省力，又能较快地提高学习成绩。

精析丛书的特点：分高一、高二、高三册，高三册中，还含有整个高中阶段的重要专题及模块的精析。每章节有基础知识、基本技能两大块内容。每节有要点提示，不仅有知识的要点更具有特色的是有怎样去学习、掌握的要点提示。

丛书的编写采用的是细目化的编写。读者可以随着学校教学进度系统学习也可以根据自己的情况挑选条目学习。青年教师可以把它作为备课的案头指导读物。高中三册合在一起是很好的一套高考复习用书。

丛书的编写中也有目的地挑选了近几年全国及各地高考的一些试题，给读者有充分多地信息，为你的升学复习指明方向。

任何事物的发展，总是要建立在已有的基础上。学习也不例外。聪明的人善于及时地吸取别人成功的经验。我们就是想把这些好的学习方法及时地送到你的手上，让你在愉快地学习中快速成长。

前 言

数学作为一门独特的学科，以前讲它是其他自然科学的基础.现在看来它还是社会科学的基础.进入数字技术时代的今天它的身影已在社会的所有领域出现.其实数学是一种思想，它是人认识世界的方法之一.

我国的高中数学的触角已从单纯的函数领域伸向了基础数学的各个方面.今后还会更广.但学习数学的方法——紧紧抓住双基，即基础知识、基本技能是不会错的.数学的最基本的思想与方法在双基中尽有淋漓尽致的体现与发挥.用“蚂蚁沿多边形的边爬一周”的道理可以证明多边形的内角和为$(n-2)\times 180°$.……同学们一定要重视双基的学习.这样提升数学学习成绩是很快的.

高中数学双基要点精析编写是围绕着“四个精字”展开的：即对每章的内容有精细的梳理，不是那种面面俱到的整理，而是把最精要的内容呈现出来，起到纲举目张的效果，对每一例题进行精辟分析，就是分析题目要素、提出着手的途径与方法.尽可能地体现出精要的数学思想与方法；还给出精确的解答，使你能举一反三；真正起到例题的作用.在一节或几节后面给出了精选的习题，包括近几年全国及各地的一些高考题.

高一、高二册是适合各类教材的课外辅导书.高三册除紧跟教材的辅导内容外，还有整个高中阶段的各专题、各模块的精析.针对考纲的每一个考点提出了恰如其分的分析问题、解决问题的方法.如果将高中三册合起来，是一套既能夯实双基又能提高能力的高考复习用书.

精细梳理、精辟分析、精确解答、精炼地选题.实际情况恐怕有一点距离.但我是想给学生不很繁重的负担又能很好地提高数学学习——这样一套辅导教材.

接到这个任务，感到既兴奋又惶恐.三十多年来的教学实践确实给了我很丰富的教学经验，特别是近几年对新教材的研究与实践有很多话想说，想告诉同学们怎么去学，给同学们在学习数学中带去欢乐.但也感到压力，不知能否做好这件事.书出来了，望它能给同学、老师带去有益的帮助.

2006.早春.于杭州求是村

目　　录

第六章　不 等 式

一、基 础 知 识

6.1　不等式的性质

要点

不等式的性质源于：

两数大小的定义：$a>b \Leftrightarrow a-b>0$；$a=b \Leftrightarrow a-b=0$；$a<b \Leftrightarrow a-b<0$ 以及正、负数及零的定义，相反数定义.

实数的运算法则：如若干个正数之和为正；若干个负数之和为负以及同号相乘为正、异号相乘为负等等.

只有弄清楚这些最基础、最基本的概念与法则，以后就会对不等式的性质有深刻理解. 例如，不等式性质中的定理 1：若 $a>b$，则 $b<a$；若 $b<a$，则 $a>b$. 我们就是根据以上所说的原理来证明的.

证：$\because$　$a>b$，$\therefore$　$a-b>0$（根据两数大小的定义）.

又 $-(a-b)<0$（根据相反数的定义）. 整理，得 $b-a<0$，再得 $b<a$（根据两数大小的定义）.

当然，以后每一步后面注明的理由可以不写了. 但初学时必须对每一条性质能严谨地证明，做到"言而有据".

教科书上的五条定理、三条推论组成的不等式性质定理体系，是我们以后在解不等式、证明不等式的又一基础.

大小定义、实数运算法则以及在它基础上推出的不等式性质的五条定理、三条推论作为不等式这一章（或者说是整个不等式知识）的基础与出发点.

注意点：

(1) 不等式的变形必须做到"言而有据"，其中的"据"就是上述的论述；

(2) 不等式的变形中是否带有等号，每个等号须注意它成立的条件；

(3) 适度的放大或缩小实质上也是在应用性质中的传递性；

(4) 与不等式有关问题的主要数学表现就是：解不等式、证明不等式、比较大小及其他应用.

例 1　已知三个不等式：$ab>0$，$bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$（其中 a、b、c 和 d 均为实数），用其中两个不等式作为条件，余下的一个不等式作为结论组成一个命题，可组成的正确命题的个数是(　　).

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

(2004 年北京市春)

分析　已知的三个不等式应为 $ab>0$；$bc-ad>0$；$\frac{bc-ad}{ab}>0$，那么再根据不等式的性质很快可以得到结论.

解　∵
$$\left.\begin{array}{l} ab>0\Rightarrow \dfrac{1}{ab}>0, \\ bc-ad>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{bc-ad}{ab}>0. \quad ①$$

$$\left.\begin{array}{l} ab>0, \\ \dfrac{bc-ad}{ab}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow bc-ad>0. \quad ②$$

$$\because\ bc-ad>0\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{bc-ad}>0, \\ \dfrac{bc-ad}{ab}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{ab}>0\Rightarrow ab>0. \quad ③$$

故选 D.

说明　不等式性质中出现的字母 a、b、c 同学们在学习中不能死板地看作是一个字母，其实它可以代表有意义的任何实数和代数式. 这其实也是学习代数最最重要的基本数学思想. 我们有时说"代数"这个词中国人翻译成中文的聪明之处：它把代数的思想都体现出来了.

例 2　设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的取值范围.

分析　∵　$f(-1)=a-b$，$f(1)=a+b$，故已知的是 $1\leqslant a-b\leqslant 2$，$2\leqslant a+b\leqslant 4$. 求的是 $f(-2)$ 的范围，即求 $4a-2b$ 的范围. 与上例 1 一样：$(a-b)$，$(a+b)$，$(4a-2b)$ 分别均是一个整体. 我们没有可能从 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2, \\ 2\leqslant a+b\leqslant 4\end{cases}$ 中求出 a、b 两个值分别取到的范围的. 如从 $1\leqslant a-b\leqslant 2$ 中我们任赋予 a 一个值，b 肯定能找到一个值使 $1\leqslant a-b\leqslant 2$ 这个不等式满足.

解　∵　$1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，∴　$1\leqslant a-b\leqslant 2$.

∵　$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，∴　$2\leqslant a+b\leqslant 4$.

而 $f(-2)=4a-2b$,故设 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a+(n-m)b$.

令 $\begin{cases}m+n=4,\\n-m=-2.\end{cases}$ 解方程组,得 $\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

$\therefore\ 4a-2b=3(a-b)+(a+b)$,

$\therefore\ \left.\begin{array}{l}3\leqslant 3(a-b)\leqslant 6,\\2\leqslant(a+b)\leqslant 4\end{array}\right\}\Rightarrow 5\leqslant 3(a-b)+(a+b)\leqslant 10.$

故 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

说明 为什么我们在这一小节的开始就拿出比较难的例题呢?其实同学们在学习不等式性质这一节时最容易犯的毛病就是没有掌握好"代数"这一个可以代表所有有意义的实数与代数式这一代数的精髓.把五个定理、三个推论仅仅看作单一字母值之间的关系,把它局限在很小的范围内使用,压缩了它们应用的空间.从某种意义上说是没有真正理解数学的意义.

例 3 已知 $-\frac{1}{2}<a<0$, $A=1+a^2$, $B=1-a^2$, $C=\frac{1}{1+a}$, $D=\frac{1}{1-a}$,试将A、B、C、D 按照从大到小的次序排列,并证明你的结论.

分析 比较 A、B、C 和 D 四个代数式值的大小,当然用两数大小的定义.那么从解题的策略上讲,可以先猜想一下 A、B、C 和 D 四个式的值当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时的大小.然后有目的地求差比较.

解 $\because\ -\frac{1}{2}<a<0$,不妨先取 $a=-\frac{1}{4}$.可猜想得到:$C>A>B>D$.

故只需证明 $C-A>0$, $A-B>0$, $B-D>0$ 即可.

$\because\ C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)=\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}$.

又 $\because\ 1+a>0$, $-a>0$, $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, $\therefore\ C-A>0$,即 $C>A$.

同理,$A-B=(1+a^2)-(1-a^2)=2a^2>0$, $\therefore\ A>B$.

$$B-D=(1-a^2)-\frac{1}{1-a}=\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}.$$

又 $\because\ -\frac{1}{2}<a<0$, $\therefore\ 1-a>0$.

又 $-1<a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}<\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<1\Rightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0$,

$\therefore\ B>D$.

综上所述：$C>A>B>D$.

说明 一般情况下，从集合的思想来思考：在$-\frac{1}{2}<a<0$内任取一个值先试探一下A、B、C和D的大小来判断任意的A、B、C和D的大小有可能的. 但从逻辑上说有问题的：一个元素满足不等同于所有元素均能满足. 所以有时可以分段多采集一些数据来猜想(有时可能需要对a的范围进行分段讨论). 特别是当证明时出现障碍的情况下更需重新猜想了. 这仅仅是解这类问题的一个解题策略而已.

例4 设$f(x)=ax^2+bx+c$，当$|x|\leqslant 1$时，总有$|f(x)|\leqslant 1$，求$|f(2)|$的取值范围.

分析 可以从$f(2)=4a+2b+c$出发考虑问题. $f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$，$f(-1)=a-b+c$. 考虑$f(2)$由$f(0)$、$f(1)$、$f(-1)$如何组成，然后再由绝对值不等式$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$求得$|f(2)|$的范围.

解 因为当$|x|\leqslant 1$时，总有$|f(x)|\leqslant 1$，得

$$|f(0)|=|c|\leqslant 1,$$

$$|f(1)|=|a+b+c|\leqslant 1,$$

$$|f(-1)|=|a-b+c|\leqslant 1.$$

则
$$\begin{aligned}|f(2)|&=|4a+2b+c|\\&=|3(a+b+c)+(a-b+c)-3c|\\&=|3f(1)+f(-1)-3f(0)|\\&\leqslant 3|f(1)|+|f(-1)|+3|f(0)|\leqslant 3+1+3=7.\end{aligned}$$

故 $|f(2)|\leqslant 7$.

说明 解这个问题时，我们把$|f(0)|\leqslant 1$，$|f(1)|\leqslant 1$，$|f(-1)|\leqslant 1$作为已知的"元素"取值范围，这是合理的. 有的解法——求出$|a|$、$|b|$和$|c|$的取值范围，显然是不合理的. 同学们可以联系例2理解这个问题. 当然如例2中只有两个字母a、b可以对应x、y，利用线性规划知识内容很容易理解，那么三个或三个以上字母组成的不等式范围时，道理是一样的. 不能随便拆开来先求各字母的范围.

这里还介绍了绝对值不等式：$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$、$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$的应用.

习题 1

一、选择题

1. 若 a、b 是任意实数，且 $a>b$，则（　　）.

(A) $a^2>b^2$　　(B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$　　(D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

2. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是（　　）.

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　(C) $|a|>|b|$　　(D) $a^4>b^4$

3. 若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{1}{a^3}>\frac{1}{b^3}$ 成立的一个充分不必要条件是（　　）.

(A) $ab>0$　　(B) $b>a$　　(C) $a<b<0$　　(D) $ab(a-b)<0$

4. 若 a、b、c 和 d 四数满足：① $d>c$；② $a+b=c+d$；③ $a+d<b+c$，则（　　）.

(A) $b>c>d>a$　　(B) $a>d>c>b$

(C) $d>b>a>c$　　(D) $b>d>c>a$

5. 已知 a、b 是两个实数，给出下列条件：① $a+b>1$；② $a+b=2$；③ $a+b>2$；④ $a^2+b^2>2$；⑤ $ab>1$.

其中能推出“a、b 中至少有一个数大于 1”的条件是（　　）.

(A) ②、③　　(B) ①、②、③　　(C) ③、④、⑤　　(D) ③

二、填空题

6. 设 $6<a<10$，$\frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a$，$c=a+b$，则 c 的取值范围是________.

7. 若 a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$，则下面三个不等式

① $\frac{b}{a}>\frac{b-1}{a-1}$；② $(a+1)^2>(b+1)^2$；③ $(a-1)^2>(b-1)^2$ 中，不成立的是________.

8. 已知不等式 $x^2+2x+a\geqslant -y^2-2y$ 对任意实数 x，y 都成立，则 a 的范围是________.

9. 比较 $\log_a(1+a)$ 与 $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$ 的大小：________.

10. 若 $a<b<0$，则下列不等式关系：① $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；② $\frac{1}{a+b}>\frac{1}{a}$；③ $|a|>|b|$；④ $a^2>b^2$ 中能成立的是________（填序号）.

三、解答题

11. 设不相等的两正数 a、b 满足 $a^2-b^2\neq a^3-b^3$，求证：$a+b>1$.

12. 我们知道,在$\triangle ABC$中,若$c^2=a^2+b^2$,则$\triangle ABC$是直角三角形,现在请你研究:若$c^n=a^n+b^n(n>2)$,问$\triangle ABC$为何种三角形?为什么?

参 考 答 案

一、选择题

1. D. 利用$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的单调性

2. B. $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}<0$

3. C. $\because \quad a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a^3}>\frac{1}{b^3}$

4. D. 由$a+d<b+c$ ①,$a+b=c+d$ ②,①-②,得$d-b<b-d\Rightarrow b>d$. 又$d>c$,故$b>d>c$. 由$d<b\Rightarrow -b<-d$ ③,再②+③,得$c>a$. 故$b>d>c>a$

5. D. 用排除法,当$a=b=1$时②成立,故排除②;当$a=-2$, $b=-3$,④成立,⑤成立,故排除④、⑤;当$a=b=\frac{2}{3}$,①成立,故排除①. 所以选D

二、填空题

6. $9<c<30$. $\left.\begin{matrix}6<a<10,\\ \frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3<b<20,\\ 6<a<10\end{matrix}\right\}\Rightarrow 9<a+b<30$,即$9<c<30$

说明 $\because \quad a>0$, $\therefore \quad \frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a$,得 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 2$. 由$\begin{cases}6<a<10,\\ \frac{1}{2}\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow 3<b<20$

7. ①、②、③. 可以用特殊数据验证

8. $a\geqslant 2$. $x^2+2x+a\geqslant -y^2-2y\Rightarrow(x+1)^2+(y+1)^2+a-2\geqslant 0$,故使之成立,得$a\geqslant 2$

9. $\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$. 可分$0<a<1$, $a>1$讨论得出结论

10. ①、②、③、④

三、解答题

11. $a^2-b^2=a^3-b^3$分解因式,其中$a-b\neq 0$,故$a+b=a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$, $\therefore \quad ab=(a+b)[(a+b)-1]$.

若$a+b=1$,则$ab=0$;

若$a+b<1$,则$ab<0$,这两种情形均与a、b均为正数相矛盾. 故$a+b>1$

12. 令$n=3$, $a=1$, $b=1$,则$c=\sqrt[3]{2}\approx 1.26$,为锐角三角形. 上述用特值验证的结论是否具有一般意义呢?

$\because \quad c^n=a^n+b^n \ (n>2)$,

$\therefore \quad c>a$, $c>b$. 由c边是$\triangle ABC$的最大边,故要证$\triangle ABC$是锐角三角形,只须证角C为锐角,即$\cos C>0$即可.

$\because\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

故要证 $\cos C>0$,只要证 $a^2+b^2>c^2$,即证$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$.

$\because\ c>a,\ c>b,\ n>2$,

$\therefore\ c^{n-2}>a^{n-2},\ c^{n-2}>b^{n-2}$,得 $c^{n-2}-a^{n-2}>0,\ c^{n-2}-b^{n-2}>0$,

从而　$(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$.
即$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$ 成立,即 $a^2+b^2>c^2$ 成立,

故 $\cos C>0$,$\triangle ABC$ 是锐角三角形

6.2　不等式的证明

要点

(1) 两组基本不等式及其推论:

① 当 a、$b\in\mathbf{R}$ 时,$a^2+b^2\geqslant 2ab$.

可推出:$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$,

当 a、$b\in\mathbf{R}^+$ 时,$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

② 当 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$ 时,$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$,

可推出:$abc\leqslant\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$,

$$abc\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{3},$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

利用上述基本不等式可证明不等式或求函数最值.

(2) 不等式证明有比较法、综合法及分析法.其中比较法——是证明不等式的最基本的通法.

① 作差比较法　程序:作差⟶变形⟶判断差式的正负;

② 作商比较法　条件是:分子、分母同号.程序:作商⟶变形⟶判断商式与 1 的大小;

③ 综合法——由因导果;

④ 分析法——执果索因.

其中有等号出现的证明题必须指出取等号成立的条件.

例 1　(1) 求函数 $y=1-2x-\dfrac{3}{x}$ 的最值;

(2) 函数 $y=x-x^2(x\in\mathbf{R})$ 的最大值是________.

(2004 年北京市春)

分析 利用基本不等式求函数的最值(或值域)问题时,必须注意应用这些不等式的条件,有的要分情况进行讨论.

解 (1) 当 $x>0$ 时,$y=1-\left(2x+\dfrac{3}{x}\right)\leqslant 1-2\sqrt{6}$. 故 $y_{\max}=1-2\sqrt{6}$. 其中取等号的条件为 $2x=\dfrac{3}{x}$,即 $x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

当 $x<0$ 时,$y=1+(-2x)+\left(-\dfrac{3}{x}\right)\geqslant 1+2\sqrt{(-2x)\cdot\left(-\dfrac{3}{x}\right)}=1+2\sqrt{6}$,故 $y_{\min}=1+2\sqrt{6}$. 其中取等号的条件为 $x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

(2) $y=x-x^2=x(1-x)\leqslant\left[\dfrac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\dfrac{1}{4}$.

当 $x=1-x$,即 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,$y_{\max}=\dfrac{1}{4}$.

例 2 (1) 已知 $x<\dfrac{5}{4}$,求函数 $y=4x-2+\dfrac{1}{4x-5}$ 的最大值;

(2) 已知 a、b 为实常数,求函数 $y=(x-a)^2+(x-b)^2$ 的最小值;

(3) 求函数 $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值;

(4) 求函数 $y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值.

分析 首先要求和的最值,必须积为定值. 反之,要求积的最值,必须和为定值;其次这几个例题中须注意取“=”的条件.

解 (1) $\because\ x<\dfrac{5}{4}$, $\therefore\ 5-4x>0$.

$\therefore\ y=4x-2+\dfrac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\dfrac{1}{5-4x}\right)+3\leqslant -2+3=1$,

当且仅当 $5-4x=\dfrac{1}{5-4x}$,即 $x=1$ 时,取“=”号. 即当 $x=1$ 时,$y_{\max}=1$;

(2) 可利用基本不等式的变形:$\dfrac{m^2+n^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2$.

$$\because\ y=(x-a)^2+(x-b)^2=2\left[\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2}\right]=2\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

$$\geqslant 2\left[\frac{(x-a)+(b-x)}{2}\right]^2=\frac{(a-b)^2}{2},$$

当且仅当 $x-a=b-x$，即 $x=\frac{a+b}{2}$ 时，$y_{\min}=\frac{(a-b)^2}{2}$；

(3) ∵　$y=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$，当且仅当 $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，$x^2+1=1$，即 $x=0$ 时，$y_{\min}=2$；

(4) 若仍用上述方法：$\frac{x^2+2+1}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\geqslant 2.$　(※)　当 $\sqrt{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，即 $x^2+2=1$，x 在实数范围内无解. 故不等式(※)中的等号是取不到的. 那么此问题如何解呢？

设 $t=\sqrt{x^2+2}$，则 $t\geqslant\sqrt{2}$，那么原函数变为 $y=t+\frac{1}{t}\ (t\geqslant\sqrt{2})$，此时函数为单调递增函数. 故当 $t=\sqrt{2}$ 时，即 $x=0$ 时，$y_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

例 3　已知 $x>y>0$，且 $xy=1$，求 $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 的最小值及相应的 x,y 的值.

分析　当所求式的分子次数高于分母的次数时，往往可以把分子配成有关分母的多项式，再拆项，然后用基本不等式来处理.

解　∵　$x>y>0$，∴　$x-y>0$. 又　$xy=1$，

故
$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=(x-y)+\frac{2}{(x-y)}$$
$$\geqslant 2\sqrt{(x-y)\cdot\frac{2}{x-y}}=2\sqrt{2}.$$

当且仅当 $\begin{cases}x-y=\frac{2}{x-y},\\ xy=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\\ y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 时取“$=$”号，即当 $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 且 $y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 时，$\left(\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)_{\min}=2\sqrt{2}$.

说明　函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 与基本不等式：a、$b\in\mathbf{R}^+$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 结合起来思考问题是解决此类问题很好的方法. 如对此例中：$\frac{x^2+y^2}{x-y}$，可看作：$f(x-y)=\frac{x^2+y^2}{x-y}$，求 $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 的最小值，即求函数 $f(x-y)$ 的最小值.

例 4　某公司决定用 3 200 元建一仓库(长方形),高度一定,它的后墙是利用旧墙,前面用铁栅栏,长的造价 40 元/m;两侧墙用砖砌,长的造价 45 元/m;顶部造价 20 元/m^2,试计算:

(1) 仓库面积最大允许值是多少?

(2) 为了建造的仓库面积 S 最大,而实际的投资又不超过预算,那么前面的铁栅栏应设计为多长?

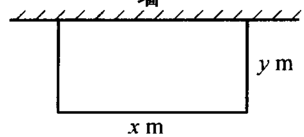

图 6-1

分析　如图 6-1 所示,用字母设铁栅栏长与两侧的墙长,然后根据题意列出数量关系式.

解　设铁栅栏长为 x m,其中一侧的墙长为 y m,则 $S=xy$ m^2. 根据题意,得

$$40x+2\times45y+20xy=3\,200.$$

即

$$40x+90y+20xy=3\,200.$$

$\therefore$　$3\,200=40x+90y+20xy\geqslant2\sqrt{40x\cdot90y}+20xy$,

即　$3\,200\geqslant2\sqrt{3\,600xy}+20xy$. 设 $xy=S$,得

$$S+6\sqrt{S}\leqslant160,\ (\sqrt{S}+16)(\sqrt{S}-10)\leqslant0.$$

其中,$\sqrt{S}+16>0$,故　$\sqrt{S}-10\leqslant0$,即　$S\leqslant100$.

当且仅当$\begin{cases}40x=90y,\\xy=100,\end{cases}$得 $x=15$ 时 S 取最大值为 100.

答:仓库面积最大允许值为 100 m^2,此时符合题意的前面铁栅栏长为 15 m.

拓展　1. 当 $x>0,\ y>0$ 且 $x+y+xy=4$ 时,

(1) 求 xy 的最值;(2) 求 $x+y$ 的最值.

分析　我们举这样一个例题想告诉同学们什么呢? 若出现有关$(x+y)$,xy 的关系式时,可求(xy)的最值,此时关系式中的$(x+y)$要利用基本不等式用(xy)来替代;若求$(x+y)$的最值,那么关系式中的(xy)也可用基本不等式使(xy)用$(x+y)$来替代.

解　(1) $\because$　$x>0,\ y>0$,$\therefore$　$4=x+y+xy\geqslant2\sqrt{xy}+xy$,即　$4\geqslant2\sqrt{xy}+xy$. 设$\sqrt{xy}=u$,得 $u^2+2u-4\leqslant0$. $(u+1)^2\leqslant5$,$-\sqrt{5}\leqslant u+1\leqslant\sqrt{5}$,$\because$　$u>0$,故 $u\leqslant\sqrt{5}-1$,即　$\sqrt{xy}\leqslant\sqrt{5}-1$. $(xy)_{\max}=(\sqrt{5}-1)^2$,取最值的条件是:$\begin{cases}x=y,\\xy=(\sqrt{5}-1)^2.\end{cases}$后略.

(2) $\because$　$x>0,\ y>0$,$\therefore$　$4=x+y+xy\leqslant x+y+\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$,即　$4\leqslant(x+y)+\dfrac{(x+y)^2}{4}$. 设 $x+y=u$,得 $u^2+4u-16\geqslant0$. 后略.