

大学数学同步辅导丛书

同济五版

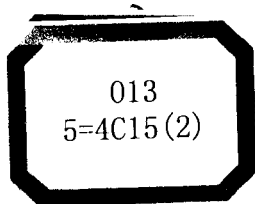
# 高等数学辅导

主 编：陈文灯

- 归纳典型题型及解题技巧
- 精选历年考研真题巩固练习
- 精编四套学期期末测试题
- 附同济五版总习题及解析



W 世界图书出版公司



013

5=4C15(2)

大学数学同步辅导丛书

同济五版

# 高等数学辅导

主 编：陈文灯

编 委：于伟红

屈 英

付小芹



世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/陈文灯主编. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2005. 4

(大学数学同步精版辅导系列丛书; 1)

ISBN 7-5062-6496-X

I. 高… II. 陈… III. 高等数学辅导—高等学校—教学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 033625 号

## 高等数学辅导

---

主 编: 陈文灯

责任编辑: 李根宾

装帧设计: 郑子珏

---

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 010-88861708)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 尚艺印装有限公司

---

开 本: 850 × 1168 毫米 1/32

印 张: 18.125

字 数: 510 千字

版 次: 2005 年 8 月第 2 版 2005 年 10 月第 6 次印刷

---

ISBN 7-5062-6496-X/G · 166

定价: 29.80 元

---

服务热线: 010-88861708

# 前 言

高等数学是我国高等院校理工科专业中的一门重要的理论基础课程,它不仅是学习后续课程及在科学领域中进行理论研究和实践工作的必要基础,而且对学生其他能力的培养也起着重要的作用。如何帮助学生更好地理解 and 掌握内容,提高其综合运用所学知识解决实际问题的能力,以及有效地备考,成为各高校普遍关注的问题。

本书根据高等学校数学教学大纲以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)进行编写。采用目前最为独特新颖的体例设计和版式设计,并吸收了“以题型为纲”的教参编写思想,归纳了这门课程中几乎所有题型,精心选编和分析了大量的经典例题,并独立设计了许多新颖例题。配合相关考试来写是本书最突显的功能。

本书包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。

本书主要特色如下:

**一、重要概念、定理及公式** 针对每一章节中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释,并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论,特别对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳,从而帮助读者站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题,达到认识和理解的新境界,对于参加课程结业考试和考研入学考试并取得好成绩来讲,是必不可少的基本功。

**二、典型题型的解题方法及技巧** 对于一门课程来说,题目是无穷的,但题型是有限的。本书尽可能全面归纳了这门课程所涉及的题型,并逐一进行分析并给出了解题方法和规律。另外,借助于许多重要的

经典例题的评注,帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和可能的各种延伸,从而达到举一反三、触类旁通的功效。

**三、考研真题精选** 对于掌握一门课程并通过相关考试来说,做一定数量的习题是必不可少的,而考研真题由于命制的严谨性及科学性,具有更高的学习价值。为此,笔者按照填空题、选择题以及计算证明题的顺序对应各种题型精选了历年考研真题,供读者学习和练习之用,希望读者尽可能先做一下真题,然后再看解题过程,了解自己在哪些方面还有不足,起到查缺补漏的作用。

**四、本书根据教材结构分为上下篇** 每篇精编两套期末测试试卷,并附有参考答案,供读者在看完本篇后自测练习用。帮助读者加深学习效果的同时,达到期末模拟测试的目的。

**五、附《高等数学》(同济五版)总习题及详细答案** 从本书的整体结构及编排出发,本书给出了“同济五版高等数学”的总习题及答案详解。另外,考虑到部分学生的需求,我们把“同济五版高等数学”各节习题的详细答案汇编成册为《高等数学习题全解》随书赠送。

本书由陈文灯主编,于伟红、屈英、付小芹参与编写了部分章节。

在成书过程中,我们参考了众多著作和教材,在此谨向有关作者表示衷心感谢!

由于时间仓促和水平有限,书中难免存在不足之处,欢迎广大读者、专家和同行批评指正。

编 者

2005.8

# 目 录

## 上 篇

### 第一章 函数与极限

|                                                   |      |
|---------------------------------------------------|------|
| § 1.1 学习要求 .....                                  | (1)  |
| § 1.2 重要概念、定理及公式 .....                            | (1)  |
| § 1.3 典型题型的解题方法及技巧 .....                          | (18) |
| 题型 1 求函数定义域 .....                                 | (18) |
| 题型 2 判别函数的等价性 .....                               | (19) |
| 题型 3 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的<br>表达式 ..... | (20) |
| 题型 4 函数奇偶性的判别 .....                               | (20) |
| 题型 5 求解给定函数的周期或周期性证明 .....                        | (22) |
| 题型 6 函数 $f(x)$ 在某区间上单调性的判别 .....                  | (22) |
| 题型 7 函数有界性的判别 .....                               | (22) |
| 题型 8 求反函数 .....                                   | (23) |
| 题型 9 求复合函数 .....                                  | (24) |
| 题型 10 求抽象复合函数的定义域 .....                           | (27) |
| 题型 11 求数列极限 .....                                 | (27) |
| 题型 12 求分式函数的极限 .....                              | (29) |
| 题型 13 利用变量代换求极限 .....                             | (30) |
| 题型 14 利用等价无穷小代换求极限 .....                          | (31) |
| 题型 15 关于需讨论双侧极限的情形 .....                          | (34) |
| 题型 16 关于第二个重要极限的应用 .....                          | (36) |
| 题型 17 求分段函数的极限 .....                              | (38) |
| 题型 18 极限式中常数的确定 .....                             | (39) |
| 题型 19 关于无穷小量的比较 .....                             | (42) |
| 题型 20 关于连续性的讨论 .....                              | (43) |
| 题型 21 求函数的间断点 .....                               | (48) |

|                                                                                                                                                    |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| § 1.4 考研真题精选 .....                                                                                                                                 | (50)  |
| 附总习题一 .....                                                                                                                                        | (58)  |
| 总习题一答案解析 .....                                                                                                                                     | (60)  |
| <b>第二章 导数与微分</b>                                                                                                                                   |       |
| § 2.1 学习要求 .....                                                                                                                                   | (66)  |
| § 2.2 重要概念、定理及公式 .....                                                                                                                             | (66)  |
| § 2.3 典型题型的解题方法及技巧 .....                                                                                                                           | (70)  |
| 题型1 利用导数定义求极限 .....                                                                                                                                | (70)  |
| 题型2 利用导数定义求函数在某点处的导数 .....                                                                                                                         | (72)  |
| 题型3 利用导数定义解函数方程 .....                                                                                                                              | (75)  |
| 题型4 求复合函数的导数 .....                                                                                                                                 | (76)  |
| 题型5 求隐函数的导数 .....                                                                                                                                  | (78)  |
| 题型6 求幂指函数的导数 .....                                                                                                                                 | (79)  |
| 题型7 求分段函数的导数 .....                                                                                                                                 | (79)  |
| 题型8 求高阶导数 .....                                                                                                                                    | (82)  |
| 题型9 函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的微分法 .....                                                                                                              | (86)  |
| § 2.4 考研真题精选 .....                                                                                                                                 | (87)  |
| 附总习题二 .....                                                                                                                                        | (92)  |
| 总习题二答案解析 .....                                                                                                                                     | (94)  |
| <b>第三章 微分中值定理与导数的应用</b>                                                                                                                            |       |
| § 3.1 学习要求 .....                                                                                                                                   | (99)  |
| § 3.2 重要概念、定理及公式 .....                                                                                                                             | (99)  |
| § 3.3 典型题型的解题方法及技巧 .....                                                                                                                           | (106) |
| 题型1 验证中值定理的正确性 .....                                                                                                                               | (106) |
| 题型2 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ .....                                                                                     | (108) |
| 题型3 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式 ..... | (111) |
| 题型4 欲证结论:在 $(a, b)$ 内至少存在 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某种关系式 .....                                                                                | (114) |
| 题型5 利用导数判别函数单调性的方法证明不等式 .....                                                                                                                      | (116) |
| 题型6 利用微分中值定理证明不等式 .....                                                                                                                            | (117) |
| 题型7 利用洛必达法则给几类未定式定值 .....                                                                                                                          | (119) |
| 题型8 求函数的极值与最值 .....                                                                                                                                | (122) |
| 题型9 讨论方程的根 .....                                                                                                                                   | (124) |

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 题型 10 判别函数图形在区间 I 上的凹凸性 ..... | (127) |
| 题型 11 求曲线的渐近线,并判别类型 .....     | (127) |
| 题型 12 函数作图 .....              | (128) |
| 题型 13 函数的性质与函数导数的图形 .....     | (130) |
| 题型 14 应用问题 .....              | (130) |
| § 3.4 考研真题精选 .....            | (132) |
| 附总习题三 .....                   | (142) |
| 总习题三答案解析 .....                | (144) |
| <b>第四章 不定积分</b>               |       |
| § 4.1 学习要求 .....              | (152) |
| § 4.2 重要概念、定理及公式 .....        | (152) |
| § 4.3 典型题型的解题方法及技巧 .....      | (156) |
| 题型 1 和原函数有关的不定积分 .....        | (156) |
| 题型 2 利用凑微分法求不定积分 .....        | (158) |
| 题型 3 利用变量代换法求不定积分 .....       | (164) |
| 题型 4 利用分部积分法求不定积分 .....       | (169) |
| 题型 5 利用恒等变形求不定积分 .....        | (173) |
| 题型 6 有理函数的不定积分 .....          | (174) |
| 题型 7 含根式的不定积分的解法 .....        | (179) |
| 题型 8 三角有理式的不定积分 .....         | (184) |
| 题型 9 含有反三角函数的不定积分 .....       | (188) |
| 题型 10 抽象函数的不定积分 .....         | (189) |
| § 4.4 考研真题精选 .....            | (190) |
| 附总习题四 .....                   | (196) |
| 总习题四答案解析 .....                | (197) |
| <b>第五章 定积分</b>                |       |
| § 5.1 学习要求 .....              | (205) |
| § 5.2 重要概念、定理及公式 .....        | (205) |
| § 5.3 典型题型的解题方法及技巧 .....      | (214) |
| 题型 1 关于定积分的估值问题 .....         | (214) |
| 题型 2 定积分的不等式证明问题 .....        | (216) |
| 题型 3 求变限积分的导数 .....           | (216) |
| 题型 4 含有变限积分的函数的极限 .....       | (218) |



|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| 题型 5 计算定积分 .....                | (219) |
| 题型 6 奇偶函数的定积分的简化计算 .....        | (220) |
| 题型 7 分段函数的定积分的计算 .....          | (221) |
| 题型 8 函数的表达式中含定积分,求函数 .....      | (222) |
| 题型 9 利用换元法证明定积分等式 .....         | (222) |
| 题型 10 求无穷限的广义积分 .....           | (223) |
| 题型 11 求无界函数的广义积分 .....          | (224) |
| 题型 12 广义积分的判敛 .....             | (225) |
| 题型 13 求广义积分中的待定常数值 .....        | (226) |
| § 5.4 考研真题精选 .....              | (227) |
| 附总习题五 .....                     | (231) |
| 总习题五答案解析 .....                  | (233) |
| <b>第六章 定积分的应用</b>               |       |
| § 6.1 学习要求 .....                | (241) |
| § 6.2 重要概念、定理及公式 .....          | (241) |
| § 6.3 典型题型的解题方法及技巧 .....        | (244) |
| 题型 1 求平面图形的面积 .....             | (244) |
| 题型 2 求旋转体的体积及侧面积 .....          | (245) |
| 题型 3 求立体体积 .....                | (245) |
| 题型 4 求平面曲线的弧长 .....             | (246) |
| 题型 5 求变力沿直线所作的功、引力、液体的静压力 ..... | (246) |
| § 6.4 考研真题精选 .....              | (249) |
| 附总习题六 .....                     | (261) |
| 总习题六答案解析 .....                  | (261) |
| <b>第七章 空间解析几何与向量代数</b>          |       |
| § 7.1 学习要求 .....                | (266) |
| § 7.2 重要概念、定理及公式 .....          | (266) |
| § 7.3 典型题型的解题方法及技巧 .....        | (274) |
| 题型 1 向量的代数运算 .....              | (274) |
| 题型 2 求曲面方程 .....                | (275) |
| 题型 3 求空间曲线在坐标面上的投影方程 .....      | (276) |
| 题型 4 求平面方程 .....                | (277) |
| 题型 5 求空间直线方程 .....              | (278) |

|                      |       |
|----------------------|-------|
| 题型6 综合题 .....        | (280) |
| §7.4 考研真题精选 .....    | (281) |
| 附总习题七 .....          | (283) |
| 总习题七答案解析 .....       | (285) |
| 第一学期 期末测试试卷(一) ..... | (292) |
| 第一学期 期末测试试卷(二) ..... | (294) |
| 测试试卷答案 .....         | (296) |

## 下 篇

### 第八章 多元函数微元法及其应用

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| §8.1 学习要求 .....                     | (301) |
| §8.2 重要概念、定理及公式 .....               | (301) |
| §8.3 典型题型的解题方法及技巧 .....             | (313) |
| 题型1 有关二元函数定义域、极限、连续的计算题 .....       | (313) |
| 题型2 考查二元函数极限、连续、偏导、可微之间的关系的题型 ..... | (314) |
| 题型3 简单显函数偏导数的计算 .....               | (315) |
| 题型4 多元复合函数偏导数的计算 .....              | (316) |
| 题型5 抽象的复合函数偏导数的计算 .....             | (317) |
| 题型6 二元复合函数高阶偏导数的计算 .....            | (319) |
| 题型7 隐函数偏导数的计算 .....                 | (321) |
| 题型8 多元函数全微分的计算 .....                | (323) |
| 题型9 多元函数的极值与最值 .....                | (324) |
| 题型10 求曲线的切线及法平面方程 .....             | (326) |
| 题型11 求曲面的切平面及法线方程 .....             | (327) |
| 题型12 求函数在某点沿某方向的方向导数 .....          | (327) |
| 题型13 求函数在一点的梯度 .....                | (328) |
| 题型14 有关多元微分学的证明题 .....              | (328) |
| §8.4 考研真题精选 .....                   | (329) |
| 附总习题八 .....                         | (338) |
| 总习题八答案解析 .....                      | (340) |

### 第九章 重积分

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| §9.1 学习要求 .....       | (347) |
| §9.2 重要概念、定理及公式 ..... | (347) |

|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| § 9.3 典型题型的解题方法及技巧 .....             | (355) |
| 题型 1 有关二重积分概念及性质的命题 .....            | (355) |
| 题型 2 二重积分的计算 .....                   | (356) |
| 题型 3 更换二重积分的积分次序 .....               | (362) |
| 题型 4 三重积分的计算 .....                   | (363) |
| 题型 5 更换三重积分的积分次序 .....               | (367) |
| 题型 6 有关二重积分(或二次积分)的证明题 .....         | (367) |
| 题型 7 重积分的应用(求曲面面积、质心、转动惯量、引力等) ..... | (369) |
| § 9.4 考研真题精选 .....                   | (372) |
| 附总习题九 .....                          | (377) |
| 总习题九答案解析 .....                       | (378) |
| <b>第十章 曲线积分与曲面积分</b>                 |       |
| § 10.1 学习要求 .....                    | (386) |
| § 10.2 重要概念、定理及公式 .....              | (386) |
| § 10.3 典型题型的解题方法及技巧 .....            | (393) |
| 题型 1 求对弧长的曲线积分 .....                 | (393) |
| 题型 2 求对坐标的曲线积分 .....                 | (395) |
| 题型 3 求对面积的曲面积分 .....                 | (403) |
| 题型 4 求对坐标的曲面积分 .....                 | (405) |
| 题型 5 求向量场的散度及旋度 .....                | (411) |
| § 10.4 考研真题精选 .....                  | (416) |
| 附总习题十 .....                          | (436) |
| 总习题十答案解析 .....                       | (438) |
| <b>第十一章 无穷级数</b>                     |       |
| § 11.1 学习要求 .....                    | (447) |
| § 11.2 重要概念、定理及公式 .....              | (447) |
| § 11.3 典型题型的解题方法及技巧 .....            | (462) |
| 题型 1 有关级数概念及性质的命题 .....              | (462) |
| 题型 2 正项级数敛散性的判别 .....                | (463) |
| 题型 3 任意项级数敛散性的判别 .....               | (466) |
| 题型 4 有关数项级数敛散性的证明 .....              | (470) |
| 题型 5 求函数项级数的收敛域,求幂级数的收敛域和收敛半径 .....  | (472) |
| 题型 6 求函数的幂级数展开式 .....                | (476) |

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 题型 7 级数求和 .....               | (479) |
| 题型 8 函数的傅里叶级数在某点的收敛性的判别 ..... | (483) |
| 题型 9 将函数展开为傅里叶级数 .....        | (483) |
| § 11.4 考研真题精选 .....           | (487) |
| 附总习题十一 .....                  | (499) |
| 总习题十一答案解析 .....               | (501) |
| <b>第十二章 微分方程</b>              |       |
| § 12.1 学习要求 .....             | (512) |
| § 12.2 重要概念、定理及公式 .....       | (512) |
| § 12.3 典型题型的解题方法及技巧 .....     | (516) |
| 题型 1 可分离变量的微分方程求解 .....       | (516) |
| 题型 2 一阶齐次微分方程求解 .....         | (517) |
| 题型 3 一阶可化为齐次的微分方程求解 .....     | (518) |
| 题型 4 贝努里方程求解 .....            | (521) |
| 题型 5 全微分方程求解 .....            | (522) |
| 题型 6 可降阶的高阶方程求解 .....         | (523) |
| 题型 7 求二阶非齐次常系数线性微分方程的通解 ..... | (524) |
| 题型 8 欧拉方程求解 .....             | (528) |
| 题型 9 微分方程的应用 .....            | (530) |
| § 12.4 考研真题精选 .....           | (533) |
| 附总习题十二 .....                  | (542) |
| 总习题十二答案解析 .....               | (544) |
| 第二学期 期末测试试卷(一) .....          | (560) |
| 第二学期 期末测试试卷(二) .....          | (562) |
| 测试试卷答案 .....                  | (564) |

# 上篇

## 第一章 函数与极限

### § 1.1 学习要求

- 一、理解映射与函数的概念,了解函数的基本性质.
- 二、掌握函数的定义域和值域的计算,熟悉函数的表示法.
- 三、理解函数极限的定义和性质,掌握极限存在的准则和两个重要极限.
- 四、理解无穷小与无穷大的概念,掌握无穷小量的比较.
- 五、理解初等函数、复合函数、分段函数的相关概念与性质.

### § 1.2 重要概念、定理及公式

#### 一、函数的定义

设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是实数集  $R$  的非空子集. 若  $\forall x \in D$ , 变量  $y$  按照对应法则  $f$  总有惟一确定的实数值  $f(x)$  和它对应, 则称对应法则  $f$  为定义在  $D$  上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中  $x$  为自变量,  $y$  为因变量,  $D$  称为函数的定义域.  
全体函数值的集合

$$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

#### 函数概念的两个要素:

- (1) 定义域: 自变量  $x$  的取值范围 (若函数是用解析式表示的, 则定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合).
- (2) 对应法则: 给定  $x$  值, 求  $y$  值的方法.

**注意:** 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时, 两个函数才表示同一个函数, 否则表示两个不同的函数.

【例 1.1】在下列各组函数中,找出两个函数等价的一组.

$$(1) y = x^0 \text{ 与 } y = 1;$$

$$(2) y = (\sqrt{x})^2 \text{ 与 } y = \sqrt{x^2};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x} \text{ 与 } y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}; \quad (4) y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}} \text{ 与 } y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}.$$

【解】(1)  $y = x^0$  的定义域为  $\{x \neq 0\}$ ;  $y = 1$  的定义域为  $R$ , 故该组的两个函数不等价.

(2)  $y = (\sqrt{x})^2$  的定义域为  $\{x \geq 0\}$ ;  $y = \sqrt{x^2}$  的定义域为  $R$ , 故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为  $\{x \neq 0\}$ ; 且对应法则也相同, 故该组的两个函数等价.

(4) 要使  $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$  有意义, 则要求  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ , 即定义域为  $\{x \geq 3\}$ ; 要

使  $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$  有意义, 则要求  $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ , 即定义域为  $\{x \geq 3 \text{ 或 } x < 2\}$ , 故两个函数不等价.

由函数概念的两要素, 我们还容易看出, 函数的表示法只与定义域和对应法则有关, 而与用什么字母表示变量无关, 这被称为函数表示法的“无关特性”. 据此, 可得出由  $f[g(x)]$  的表达式求解  $f(x)$  表达式的有效方法.

【例 1.2】设  $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2x$ , 其中  $x \neq 0$  且  $x \neq 1$ , 求  $f(x)$ .

【解】利用函数表示法的无关特性, 令  $t = \frac{x-1}{x}$ , 即  $x = \frac{1}{1-t}$ , 代入原方程得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f(t) = \frac{2}{1-t}, \text{ 即 } f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f(x) = \frac{2}{1-x} \quad (1)$$

再令  $\frac{1}{1-x} = \frac{u-1}{u}$ , 即  $x = \frac{1}{1-u}$ , 代入上式, 得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right) + f\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{2(u-1)}{u}$$

$$\text{即 } f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(x-1)}{x} \quad (2)$$

将原方程与方程(1)、(2)联立, 解此方程组, 得

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1.$$

## 二、函数的几何特性

### 1. 奇偶性

设函数  $f(x)$  的定义域数集  $D$  关于原点对称, 若  $\forall x \in D$ , 有

$$f(-x) = f(x) \text{ (或 } f(-x) = -f(x) \text{)}$$

则称  $f(x)$  为偶函数 (或奇函数).

偶函数  $f(x)$  的图像关于  $y$  轴对称, 奇函数  $f(x)$  的图像关于原点对称.

#### 奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.
- (2) 偶数个奇 (或任意多个偶) 函数之积为偶函数; 奇数个奇函数之积为奇函数.
- (3) 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

常见的偶函数:  $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{x^2}, \dots$ ;

常见的奇函数:  $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$ .

### 2. 周期性

设函数  $f(x)$  的定义域为数集  $D$ , 若存在一个与  $x$  无关的正数  $T$ , 使得对  $\forall x \in D$ , 恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数, 满足上式的最小正数  $T$  称为函数  $f(x)$  的周期.

#### 周期函数的运算性质:

- (1) 若  $T$  为  $f(x)$  的周期, 则  $f(ax+b)$  的周期为  $\frac{T}{|a|}$ .
- (2) 若  $f(x), g(x)$  均是以  $T$  为周期的函数, 则  $f(x) \pm g(x)$  也是以  $T$  为周期的函数.
- (3) 若  $f(x), g(x)$  分别是以  $T_1, T_2 (T_1 \neq T_2)$  为周期的函数, 则  $f(x) \pm g(x)$  是以  $T_1, T_2$  的最小公倍数为周期的函数.

常见的周期函数:  $\sin x, \cos x$ , 其周期  $T = 2\pi$ ;  $\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$ , 其周期  $T = \pi$ .

【例 1.3】设对一切实数  $x$ , 有  $f(\frac{1}{2} + x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$ , 则  $f(x)$  是周期为 \_\_\_\_\_ 的周期函数.

【解】  $f[\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + x)] = \frac{1}{2} + \sqrt{f(\frac{1}{2} + x) - f^2(\frac{1}{2} + x)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\
 &= \frac{1}{2} + [f(x) - \frac{1}{2}] \quad (\text{由题设 } f(x) \geq \frac{1}{2}) = f(x)
 \end{aligned}$$

即  $f(1+x) = f(x)$ , 故可知  $f(x)$  的周期为 1.

### 3. 有界性

设函数  $f(x)$  在数集  $X$  上有定义, 若存在  $M > 0$ , 使得  $\forall x \in X$ , 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

则称  $f(x)$  在  $X$  上有界, 数  $M$  为  $f(x)$  的一个界; 若不存在这样的正数  $M$ , 则称  $f(x)$  在区间  $X$  上无界.

**注意:** 函数  $f(x)$  是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$|\arcsin x| \leq \pi/2; |\arccos x| \leq \pi, x \in [-1, 1]$$

$$|\arctan x| < \pi/2; |\operatorname{arccot} x| \leq \pi, x \in (-\infty, +\infty)$$

**【解题提示】** 将函数取绝对值, 然后用不等式放缩法, 或借助于导数利用求最大(小)值法判断函数是否有界.(导数将在第二章介绍)

**【例 1.4】** 函数  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  在定义域内为 ( )

(A) 有上界无下界

(B) 有下界无上界

(C) 有界, 且  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

(D) 有界, 且  $-2 \leq f(x) \leq 2$

**【解】**  $|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$  (因为  $1+x^2 \geq 2|x|$ ),

故  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ , 应该选(C).

### 4. 单调性

设函数  $f(x)$  在集合  $X$  上有定义, 若对  $\forall x_1, x_2 \in X$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数  $f(x)$  在区间  $X$  上是单调增加(或单调减少)的.

**【例 1.5】** 设  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上有定义,  $x_1 > 0, x_2 > 0$ . 求证:

(1) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调减少, 则  $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ ;

(2) 若  $\frac{f(x)}{x}$  单调增加, 则  $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$ .



【证】 (1) 设  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 且  $x_1 < x_2$ . 于是

$$\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_1 f(x_2) < x_2 f(x_1)$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) < x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

(2) 证略.

### 三、分段函数

用解析法表示的函数,若在其定义域  $D$  的各个不相交的子集上,分别用不同的式子表示,则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

$$(1) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 狄利克莱(Dirichlet) 函数 } y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

注意:一般地,分段函数不是初等函数.

【例 1.6】将  $f(x) = |2x - 3| - 1$  表示成分段函数.

【解】 根据绝对值的定义

$$\text{当 } 2x - 3 \geq 0 \text{ 时, } |2x - 3| = 2x - 3;$$

$$\text{当 } 2x - 3 < 0 \text{ 时, } |2x - 3| = 3 - 2x$$

$$\text{所以, } y = f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq \frac{3}{2}, \\ 2 - 2x, & x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

### 四、反函数

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 其值域为  $Z$ , 若对  $\forall y \in Z$ , 有惟一确定的  $x \in D$  满足  $y = f(x)$ , 则称  $x$  是定义在  $Z$  上以  $y$  为自变量的函数, 记为

$$x = f^{-1}(y) \text{ [或 } x = \varphi(y)]$$

并称  $x = f^{-1}(y)$  是  $y = f(x)$  的反函数, 而  $y = f(x)$  是  $x = f^{-1}(y)$  的直接函数. 习惯上  $y = f(x)$  的反函数记作  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x \in Z$ .

注意: ①  $y = f(x)$  的图像与其反函数  $x = f^{-1}(y)$  的图像重合; 而  $y = f(x)$  的图像与其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称.

