数学精品库

SHUXUE JINGPIN KU

难题精解思维训练

NANTI JINGJIE SIWEI XUNLIAN

作者 王志雄

民主与建设出版社

数学精品库

难题精解思维训练

王志雄　汪启泰
余文竑　詹方玮　著

民主与建设出版社

图书在版编目(CIP)数据

难题精解思维训练/王志雄,汪启泰,余文竑,詹方玮著.
—北京:民主与建设出版社,1996.11
(数学精品库)

ISBN 7-80112-066-3

Ⅰ.难…

Ⅱ.王…

Ⅲ.数学课-中学-课外读物

Ⅳ.012-44

责任编辑:闵　杰

民主与建设出版社出版发行

(社址:北京朝外大街吉祥里208号　邮编:100020)

北京佳顺印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　印张:5.125

2001年1月第3次印刷

字数:114千字　印数:13001-23000　定价:8.60元

《初等数学精品库》编委会

主编 王志雄

编委（按姓氏笔画为序）

吴碧英　余文竑　汪启泰　林　常

郑应文　高鸿桢　詹方玮

前　　言

有些数学题，反映了简单数字的美妙规律，屡试不爽。如何给予令人信服的论证？

有些数学题，具有现实生活的浓厚气息，然而，结果出人意想之外。如何做出严谨的合理解释？

有些数学题，用抽象的符号表述，显得难以理解。如何揭开其“盖头”、“面纱”，去欣赏其诱人的真实容貌？

有些数学题有一定难度，似乎摆出一付对人类智力进行挑战的架式。我们若不甘俯首称臣，又如何才能将它们制伏？

这样的问题，经常吸引着年轻学子的兴趣。

解决一个数学问题，往往可以用多种不同的方法；利用同一种方法，又往往可以解决许多似乎相距甚远，甚而看来有天壤之别的问题。

利用巧妙的、奇特的、能够揭示问题实质的、具有典型意义的方法解数学题，是我们追求的目标。这样的方法不仅有重要的应用价值，也有很大的美学价值。它能启迪人们的智慧，熏陶人们的灵魂，激励人们为科学献身的精神。

本书原拟书名《趣题妙解》搜集了不少有趣的数学问题，阐述它们的各种巧妙解法。同时也列出与之有关的一些尚待解决的问题，也算作一种思维训练。

我们欢迎读者对书中疵漏之处不吝赐正。

目　　录

一 替身演员来作证

影视中常用替身演员，去做演员本人无法独自完成的动作。"替身演员"又如何帮助我们解题呢？试看下面一例。

某人某日上午 7 时整从某处 A 到另一处 B 去旅游，第二天上午 7 时整，又从 B 处沿原路返回到 A 处。此人宣称，这两天中他在某一相同时刻（× 时 × 分 × 秒）恰好都行经同一地点。

他的话是不是信口雌黄？

除了知道在两天中，他是同一时刻（上午 7 时）出发，沿同一条路线往返之外，此例中的不明因素是很多的：一路上他可能走走停停，他行走时的速度也可能变化很多。他的话似乎有点儿神秘莫测，令人难以置信。

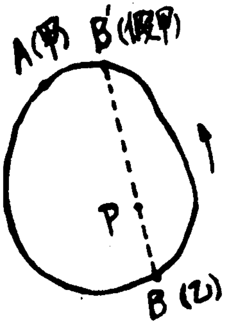
他是这样分析的：假设他有一个替身，（这个替身我们称为"伪他"）当他第二天上午 7 时从 B 处沿原路返回时，"伪他"也同时从 A 处出发往 B 处。"伪他"一路上行走的情况，与他在前一天行走的情况完全一样，是他前一天行为的丝毫不走样的"翻版"。这样，他与"伪他"同时分别从 B、A 两处相向而行，无论他们是怎样走的，或迟或早，他们总要相遇，即他与"伪他"必是在同一时刻到达同一地点，这是无可非议的事实。

根据他对"伪他"行为方式的限定，这不正好证明，他在第二天有某一时刻（与"伪他"相遇的哪一时刻）与他在前一

天的这一时刻行经同一地点(与"伪他"相遇之处)吗?

替身演员精彩的表演为我们的结论提供了可靠的证据。条件欠明,用替身作证,再看一例。

如图1,闭曲线表示一条跑道,平面上任一直线与这曲线至多有两个公共点。点 P 为主席台位置。甲、乙两个运动员分别在 A、B 两点处(点 A、B 把整条跑道分成等长的两段),以同一方向(比如说,都是逆时针方向),依相同的速度(不一定匀速,但在每一时刻,两人的速度都相等)沿跑道跑。主席台上的人发现:在某一时刻,两个运动员与主席台正好处于一条直线上。这是偶然的,或是必然的?也就是说,是不是不管两人速度怎样,只要是相同的,一定存在某一时刻,两个人与主席台处于一条直线上?



(图1)

要回答这样的问题,可有不少麻烦。两个人跑的速度可以是千变万化的,只知道他们每时每刻的速度是一样的;跑道的形状不清楚,只知道是一条封闭曲线;主席台的位置也不明确,只知道它在闭曲线的内部。

而要判断的结论却是丝毫不含糊的三点共线。

我们将请"替身演员"来帮助解题。

假设直线 BP 与闭曲线的另一交点是 B',在点 B' 处有另一运动员,他是运动员甲的替身,我们称他为"假甲"。

在跑的过程中,我们假设"假甲"始终与乙、主席台 P 保

持在一条直线上(以物理学术语描述,乙与“假甲”关于主席台运动的角速度,每时每刻都是一样的)。

如果一开始,点 B' 与点 A 重合,那么“假甲”与甲处在同一个位置上,因此,甲、乙及主席台三点共线。

如果一开始,点 B' 与点 A 不重合,那么甲的替身“假甲”可能跑在甲的前面(即依逆时针方向,A 与 B' 的长度小于曲线长的一半),也可能跑在甲的后面(依逆时针方向,B' 到 A 的长度小于曲线长的一半)。

如果一开始,“假甲”跑在甲的后面(如图 1),那么点 B' 经过点 A 到 B 的曲线长大于整条跑道长的一半。当乙跑到点 B' 时,依假设,“假甲”跑到了点 B 处。另一方面,注意到甲、乙两人的速度一样,他们在任何时刻的位置都把跑道分成等长的两段,因而甲还未能到达点 B,也就是说,这时甲落在他的替身“假甲”之后了。一个显然的事实是,甲从领先于“假甲”,到落后于“假甲”之前的某一时刻,他被他的替身追到。假设甲被“假甲”追到的位置是点 C,这时乙所处的位置 D 与 C 及主席台 P 共线。

如果一开始,“假甲”跑在甲的前面,情况类似。

因此,我们可以断言:必有某一个时刻,甲、乙两人与主席台处于同一直线上。

上述事实用数学语言叙述是:对任何闭凸曲线 l 及闭凸曲线 l 所围区域内任一点 P,闭凸曲线 l 上存在两点 A、B,使得 AB 把 l 分成等长的两段,且 A、P、B 三点共线。

二 意想之外算理中

有一个人说：他与他的朋友参加马拉松赛(最长的赛跑项目)。比赛过程中的每1000米，他所花的时间都比他的朋友多，但比赛结果，他比他的朋友先到达终点。

这可能吗？除非“他”违反了竞赛规则。估计绝大多数人都会认为这是不可能的。

然而，我们只要通过下面一组数据说明，谁都会信服了，他“说”的，并非天方夜谭。

马拉松赛全程是42千米又195米。

假设他的朋友全程以每秒2.5米的速度匀速地跑下来，那么，这位朋友，每千米都花了400秒的时间，而全程所用的时间是16878秒，即4小时41分18秒。

又假设他把全程分成195米、805米、195米、805米、…、195米共85段，段长是195米、805米相间，其中长195米的有43段，长805米的有42段。他在长为195米的段中以每秒2.654米的速度匀速地跑，在长为805米的段中以每秒2.465米的速度匀速地跑。那么，在这两段中，所花的时间分别是73.4740015秒与326.5720081秒。故每千米他所花的时间73.4740015 + 326.5720081 = 400.0460096秒，多于他朋友每千米所花的时间。跑完全程他所用的时间是400.0460096 × 42 + 73.4740015 = 16875.4064秒，比他的朋友早

2.5935953 秒到达终点。

这些数据有什么奥妙呢？

考虑得更一般些：设他的朋友全程速度都是每秒 a 米，而他在 195 米段的速度是每秒 b 米，在 805 米段的速度是每秒 c 米，那么，他与他的朋友每千米所花的时间分别是

$$\frac{195}{b}+\frac{805}{c} \text{ 与 } \frac{1000}{a}$$

跑完全程的时间分别是

$$\frac{195\times 43}{b}+\frac{805\times 42}{c} \text{ 与 } \frac{42195}{a}$$

为了使"他"所说的"奇迹"发生，只要

$$\begin{cases}\dfrac{195}{b}+\dfrac{805}{c}>\dfrac{1000}{a} & (1)\\[2ex] \dfrac{195\times 43}{b}+\dfrac{805\times 42}{c}<\dfrac{42195}{a} & (2)\end{cases}$$

由式(1)、(2)得

$$\frac{1000}{805a}-\frac{195}{805b}<\frac{1}{c}<\frac{42195}{805\times 42a}-\frac{195\times 43}{805\times 42b} \qquad (3)$$

当

$$\frac{1000}{805a}-\frac{195}{805b}<\frac{42195}{805\times 42a}-\frac{195\times 43}{805\times 42b}$$

即

$$b>a \qquad (4)$$

我们都可找到 c，使得式(3)成立，从而式(1)、(2)成立，即实现"他"所说的"奇迹"。

上面取 $a=2.5$，$b=2.654$，$c=2.465$ 满足式(3)与(4)，因此，可作为"奇迹"实现的一个例证。

这个"奇迹"实现，即不等式(3)与(4)的产生，一个重要的条件是：马拉松赛的赛程除42千米之外，还有一个"零头"195米。如果没有这个零头，不难证明，这个人的话将成为纯粹的吹嘘。

与此有关的一个问题是：是否存在数列，它的任意连续三项的和是负数，但所有的项之和是正数。如果存在的话，它的项数可能是多少？

显然，如果这个数列的项数是3的倍数，我们可以把数列的项分成若干组，每一组都是连续的三项。因为每一组的和都是负数，所以全部项的和也是负数，从而符合上述要求的数列，项数必不是3的倍数。

项数为 $3k+1$(k 为正整数)的数列是可能符合要求的。比如数列

$$2k+1,\ -(k+1),\ -(k+1),\ \cdots,$$
$$2k+1,\ -(k+1),\ -(k+1),\ 2k+1$$

的任意连续的三项之和为 -1，但所有项之和为 $k+1$。

项数为 $3k+2$(k 为正整数)的数列也是可能的。如何举出例子，留给读者来作练习吧。

三 后发制人战速决

我们来作如下一个游戏：规定在 1001 个星号

$$* \quad * \quad \cdots \quad *$$

中，甲、乙两人轮流(甲先乙后)任选一个数(限 0、1、2、…、9 之一)代替任一星号(已被取代的星号，不可再用新的数字取代)。最后得到的数，如果是完全平方数(某自然数的平方)，则甲胜；否则，乙胜。

甲为先手，又是最后一个选数替代星号的人，取得主动地位，似乎有利些。其实不然。

因为任何自然数的平方，个位数只能是 0、1、4、5、6、9 这六种。因此，如果甲一开始，没有用这几个数之一取代个位上的星号，乙只要用 2、3、7、8 之一取代之，得到的数必非完全平方数。

若甲一开始以 0、1、4、5、6、9 之一取代个位上的星号，因为任何自然数的平方，或是 4 的倍数，或被 4 除余数为 1：

$$(2n)^2 = 4n^2$$

$$(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$$

而且一个自然数被 4 除的余数与其最后两位被 4 除的余数相同，因此，乙如果在十位上的星号用适当的数取代，使得最后两位数除 4 的余数为 2 或 3(具体地说：若甲在个位上取 0 或 4，乙在十位上取 1、3、5、7、9 之一，甲在个位上取 6，乙在十位

上取 2、4、6、8 之一，则所得两位数被 4 除，余数恒为 2；若甲在个位上取 1、5 或 9，乙在十位上取 1、3、5、7、9 之一，则所得两位数被 4 除，余数恒为 3)，那么，以后无论双方用什么数取代其余位上的星号，所得的数除 4 的余数也是 2 或 3。从而，最后得数不是完全平方数。

上述说明，最多经过一个回合，乙后发制人，便稳操胜券了。

练习

若把例中的完全平方数改为完全立方数，情况又将如何呢？

四 踯躅街头会友处

设a为任意的实数，数a的绝对值（用记号$|a|$表示）定义如下：

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

根据绝对值的定义，我们知道：从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点与原点的距离。

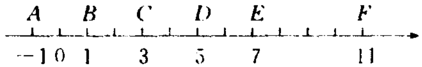
一些有关绝对值的问题，利用实数绝对值的几何解释来解决，将显得更直观、简明。

求函数

$$f(x)=|x+1|+|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|+|x-11|$$

的最小值。

在解这个问题之前，我们先做个设想：数轴是一条街道，在-1、1、3、5、7和11六处分别有一户人家，每户人家各有一个小孩。这六个小孩在假日要选择一个聚会地点x，使得他们所走的总路程即$f(x)$达到最小。



（图2）

为方便起见，设与 -1、1、3、5、7、11 对应的点分别记为 A、B、C、D、E、F（图 2），聚会地点记为 P。

若点 P 在 A 的左侧，则 $f(x)$ 不能达到最小值。因为 P 向右移动 δ，但未超越点 A，每位小孩都将少走路程 δ，故 $f(x)$ 减少 6δ。

同样的道理，点 P 在 F 的右侧，$f(x)$ 也不能达到最小值。

若点 P 在 A、B 之间，$f(x)$ 仍不能达到最小值。因为，P 向右移动 δ，但未超越点 B，则有一位小孩多走路程 δ，但有五位小孩少走路程 δ，故 $f(x)$ 减少 4δ。

同样的，点 P 在 B 与 C，D 与 E，E 与 F 之间，$f(x)$ 都不能达到最小。

当点 P 在 C、D 之间，点 P 无论向左或向右移动 δ，但未超越点 C、D，都将有三个小孩少走路程 δ，也有三个小孩多走路程 δ，故 $f(x)$ 的值不变。从而，使 $f(x)$ 达到最小值的点必在 C、D 之间，即 $3 \leqslant x \leqslant 5$。这时，最小值

$$f(x) = x + 1 + x - 1 + x - 3 + 5 - x + 7 - x + 11 - x = 20 \tag{1}$$

这样，问题已完全解决了。也许，有人觉得这种解法太缺少“数学味道”了，然而，借助上述分析，特别是式(1)，足以启发我们得到具有数学“原汁原味”的解法。

解：利用不等式

$$|a| + |b| \geqslant |a + b|$$

得

$$|x + 1| + |x - 11| = |x + 1| + |11 - x| \geqslant |x + 1 + 11 - x| = 12$$

$$|x - 1| + |x - 7| = |x - 1| + |7 - x|$$