高等学校教学用书

线性代数

王晓光　周　慧　编

東北大學出版社
Northeastern University Press

线性代数

王晓光　周　慧　编

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 王晓光，周慧编. —沈阳：东北大学出版社，2006.2
ISBN 7-81102-235-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.①王…②周　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 009640 号

出 版 者：东北大学出版社出版
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83680267（社务室）　83687331（市场部）
传真：024—83680265（办公室）　83687332（出版部）
网址：http：//www.neupress.com
E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm×203mm
印　　张：6.375
字　　数：171 千字
出版时间：2006 年 2 月第 1 版
印刷时间：2006 年 2 月第 1 次印刷
责任编辑：牛连功　　责任校对：张淑萍
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定　　价：14.90 元

序　言

随着我国高等教育从精英教育向大众化教育的转变和高校人才培养的多元化，对教材的要求也呈现出多元化的需求特点. 在多年的教学实践中，我们也深切地感受到，现行的许多教材在与教学对象的相容性等方面存在着或多或少的欠缺. 因此，编写既适合本校的办学层次又兼顾本校各专业学生的需求、易读好懂、实用性强、利教利学的教材势在必行.

在学院领导的热情关怀和指导下，结合多年的教学实践，我们组织编写了这套体现基础课教学“以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，适应新的教育形式和新的教学需求的数学系列教材. 这套系列教材包括：高等数学（上册、下册）、线性代数、概率论与数理统计、复变函数与积分变换. 这套教材注重数学基本内容的选取和基本概念的阐述，不过分追求理论的严密性及过多的定理证明；注重基本运算技能的训练，不过分追求复杂的计算；对数学课程中的一些难点，采取强调直观描述、强化几何说明的方式处理；在表述上注重精练准确，力求通俗易懂. 总体上突出体现了少而精、强化应用的数学教育的新理念.

本书为这套系列教材中的《线性代数》部分. 内容包括：行列式、矩阵、初等变换、向量的相关性、向量空间、线性方程组、特征值和特征向量、相似矩阵及二次型.

本书对线性代数的基础知识作了详细的介绍，对一些理论性较强的定理和性质采用验证和举例相结合的方法进行了简化处理. 在每个新概念出现之后都配以针对性较强的例题；每节配备了一定数量的基本题型和一部分提高题型练习题，以便学生消化和巩固相应

的知识；书末附有习题答案. 本书可作为高等学校工科类、经济管理类线性代数课程的教材，也可作为其他非数学类专业同名课程的教学参考书.

本系列教材由王晓光副教授主持编写. 王群副教授和唐芳英副教授对本书的初稿提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢.

由于编者水平所限，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请读者不吝指教.

编 者

2006年1月1日

目　　录

第1章 行 列 式

在许多实际问题中，人们常常会碰到解线性方程组的问题. 行列式就是由解线性方程组产生的. 如今它已是线性代数的重要工具之一，在许多科学分支中具有广泛的应用.

本章主要研究行列式的性质和行列式的计算，介绍用行列式解线性方程组的方法.

1.1 二、三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 x_1，x_2 是未知量；a_{ij} $(i=1, 2; j=1, 2)$是未知量 $x_j(j=1, 2)$的系数，它有两个附标，第 1 个附标 i 表示它在第 i 个方程，第 2 个附标 j 表示它是第 j 个未知量的系数，如 a_{12}就是第 1 个方程中 x_2 的系数；b_1，b_2 是常数项. 下面用消元法解线性方程组(1-1).

为了消去未知量 x_2，用 a_{22}和 a_{12}分别乘两个方程的两端，然后将得到的两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

同样地，从式(1-1)中消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1-1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

为便于叙述和记忆这个表达式，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

称为二阶行列式，简记为 $D=\det(a_{ij})$（det 为行列式英文 determinant 的缩写.）它含有两行、两列：横排称为行，竖排称为列. 行列式中的数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$称为行列式的元素或元. 如 a_{12}就是第 1 行、第 2 列上的元素.

从式(1-3)知二阶行列式是这样两个项的代数和：一个是在从左上角到右下角的对角线(称为行列式的主对角线)上的两元乘积，取正号；另一个是在从右上角到左下角的对角线(称为行列式的副对角线)上的两元乘积，取负号.（这个计算方法也称为对角线法则.）如：

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-(-3)\times 1=13.$$

根据二阶行列式的定义，二元线性方程组(1-1)的解(1-2)中的分子可以分别写成

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是方程组(1-1)的解(1-2)就可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}. \tag{1-4}$$

式(1-4)中的分母 D 又称为方程组(1-1)的系数行列式；x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}所得的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数

a_{12}，a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-\ \ x_2=5,\\3x_1+2x_2=11.\end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}=2\times2-(-1)\times3=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5 & -1\\11 & 2\end{vmatrix}=5\times2-(-1)\times11=21,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 11\end{vmatrix}=2\times11-5\times3=7,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{21}{7}=3,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{7}=1.$$

1.1.2　三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1-5}$$

为解此方程组，可由前两个方程消去 x_3，得到一个只含有 x_1 和 x_2 的二元方程；再由后两个方程消去 x_3，得到另一个只含有 x_1 和 x_2 的二元方程；然后从这两个新线性方程消去 x_2，就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{21}-b_3a_{22}a_{31}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

当 x_1 的系数

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq0$$

时，得出

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{21}-b_3a_{22}a_{31}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}). \tag{1-6}$$

同样，可以求得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}), \tag{1-7}$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}). \tag{1-8}$$

同前面一样，为便于记忆，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为三阶行列式. 它含有三行、三列，其值规定为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1-9}$$

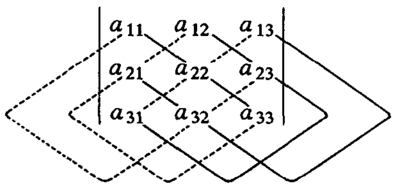
由式(1-9)可以看出，三阶行列式是它的第一行三个元分别与一个二阶行列式相乘之积的代数和：与元素 a_{11} 相乘的二阶行列式恰好是把原行列式中 a_{11} 所在的那一行和那一列划掉后余下的一个小行列式，这个小行列式称为元素 a_{11} 的余子式，记作 M_{11}. 与元素 a_{12} 相乘的二阶行列式也恰好是把原行列式中 a_{12} 所在的那一行和那一列划掉后余下的一个小行列式，即元素 a_{12} 的余子式 M_{12}. 与元素 a_{13} 相乘的小行列式是元素 a_{13} 的余子式 M_{13}. 于是式(1-9)又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \tag{1-10}$$

计算式(1-9)中的各个二阶行列式可得**三阶行列式的展开式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1-11}$$

式(1-11)中是6项的代数和，每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积，并按一定的规律带有正号或负号. 可按下面的**对角线法则**记忆. 其中，实线上三个元的乘积构成的三项都取正号，虚线上三个元的乘积构成的项都取负号.



例如：三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\times1\times5+3\times0\times1+1\times(-2)\times(-4) - 2\times(-2)\times0-3\times(-4)\times5-1\times1\times1 = 77.$$

于是，在 x_1，x_2，x_3 的表达式(1-6)、式(1-7)和式(1-8)中，分母都是行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而分子是把行列式 D 中第 1，2，3 列分别换成常数项 b_1，b_2，b_3 得到的行列式 D_1，D_2，D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

因此式(1-6)、式(1-7)和式(1-8)可以写成简单的表达式：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

它的结构与前面两个未知量的方程组类似.

例 1.2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+\ \ x_2+x_3=8, \\ \ \ x_1+\ \ x_2+x_3=6, \\ \ \ x_1+2x_2+x_3=8. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$，$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$，

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=-4,\ D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-6.$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-2}{-2}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-4}{-2}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-6}{-2}=3.$$

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $D_2=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$；

(3) $D_3=\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab \end{vmatrix}$；　　(4) $D_4=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

2. 分别用式(1-10)的方法和对角线法则计算下列三阶行列式.

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

(3) $D_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;　　(4) $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

3. 用行列式解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+2x_2=1, \\ x_1-x_3=4. \end{cases}$

4. 指出函数

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 2 & x \\ x^2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

是几次多项式，其 x^2 项的系数是多少？

1.2 n 阶行列式

由上面的介绍可知，二元线性方程组与三元线性方程组解的表达式的结构是一样的，那么是否可以用同样的方法求出一般 n 元线性方程组的解呢？

先定义 n 阶行列式的概念. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-12}$$

它由 n 行、n 列，共 n^2 个元素组成，称之为 **n 阶行列式**. 记

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它是由 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列 $(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排列顺序构成的一个 $n-1$ 阶行列式，称其为行列式(1-12)的元素 a_{ij} 的余子式. 于是，由式(1-10)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13},$$

类似地，可利用三阶行列式定义四阶行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14}.$$

一般地，n 阶行列式可作如下递归定义.

定义　当 $n=1$ 时，式(1-12)定义为 $D=a_{11}$.（即由一个元素 a_{11} 构成的一阶行列式就是 a_{11} 本身.）设 $n-1$ 阶行列式 D 的值已经定义，则 n 阶行列式 D 的值为

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}
$$

$$
=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}. \tag{1-13}
$$

显然，式(1-13)对任何自然数 n 给出了一个计算 n 阶行列式的方法：将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶行列式，再化为 $n-2$ 阶行列式……最后便可求出 D 的值．式(1-13)又称为行列式按第一行的展开式．

由二阶行列式的展开式中含有 2! 个乘积项及三阶行列式的展开式中含有 3! 个乘积项，且带有符号“+”及“-”的乘积项各占一半，可推知 n 阶行列式的展开式应含有 $n!$ 个乘积项，带有符号“+”及“-”的项各占一半，且每个乘积项都是由不同行不同列的元素构成．

为方便表达和叙述，再引入记号：

$$
A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},
$$

称为 a_{ij} 的代数余子式．于是 n 阶行列式的定义——式(1-13)——又可记为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \quad (1\text{-}14)$$

例 1.3 用行列式定义计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&3&1&0\\2&6&0&1\\4&2&0&0\\0&1&3&1\end{vmatrix}.$$

解 此行列式的第一行有两个 0，故按式(1-13)展开时只需计算第二项和第三项：

$$\begin{aligned}D&=3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0&1\\4&0&0\\0&3&1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&6&1\\4&2&0\\0&1&1\end{vmatrix}\\&=-3\times\left(2\times\begin{vmatrix}0&0\\3&1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&0\\0&3\end{vmatrix}\right)+\\&\quad\left(2\times\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}+6\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&0\\0&1\end{vmatrix}+\right.\\&\quad\left.1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&2\\0&1\end{vmatrix}\right)=-52.\end{aligned}$$

在 n 阶行列式(1-12)中，元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为行列式的主对角元素，它们所在的直线称为主对角线. 若主对角线上方的元素都为 0，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则称之为下三角行列式；若主对角线下方的元素都为 0，即