21世纪高等学校规划教材

高等数学

（下册）

主编　李育文　司清亮　王红卫

西安地图出版社

21 世纪高等学校规划教材

高 等 数 学

（下册）

主编 李育文 司清亮 王红卫

西安地图出版社

内容提要

本书分为上、下两册，上册包含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及应用、空间解析几何与向量代数等内容；下册包含多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数等内容。少数带“*”的节与段落可以根据所使用专业的需要决定取舍．习题大多以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；部分习题则有一定难度，综合性、论证性较强，希望能较好地适应学生进一步深造的需要．书末附有习题答案或提示，以便于教师和学生参考．

本书可作为高等院校相关专业的高等数学教材，亦可作为自学和数学爱好者的参考教材．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李育文，司清亮，王红卫主编．一西安：西安地图出版社．2004.8

ISBN 7－80670－684－4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①李…②司…③王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087577 号

高等数学

李育文　司清亮　王红卫　主编

西安地图出版社出版发行

（西安市友谊东路 334 号　邮政编码：710054）

新华书店经销　黄委会设计院印刷厂印刷

787×1092 毫米　1/16 开本　35.25 印张　730 千字

2004 年 8 月第 1 版　　2004 年 8 月第 1 次印刷

印数 1－2000 册

ISBN 7－80670－684－4/O·13

定价(上下册) 46 元　本册 22.00 元

前　　言

数学是基础性学科，是各门自然科学发展的基础．高等数学是相关学科专业的学生从事学习与研究必不可少的工具，掌握好运用数学分析的思想方法去解决各种应用问题，对他们以后的发展是大有裨益的．为使学生能更好地理解与掌握微积分的数学思想及其实际背景，根据我们多年来从事高等数学教学的经验和体会，并参照教育部近期颁发的"专升本"以及硕士生入学考试对高等数学的基本内容和方法的要求，确定本书各章节内容与习题的取舍，让学生在学时紧凑的情况下能了解和初步掌握高等数学中最基本的概念、理论和方法，从而使此书尽可能适应相关专业高等数学教学的实际情况与需求．在内容的安排上，尽可能做到与初等数学紧密衔接，通过各种实例自然地引入微积分中的许多新概念；在叙述和讲解风格上，尽可能做到文字通俗易懂，一般而言，具有高中数学的基础即可阅读此书．

本书分为上、下两册，上册包含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及应用、空间解析几何与向量代数等内容；下册包含多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数等内容。少数带"＊"的节与段落可以根据所使用专业的需要决定取舍．习题大多以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；部分习题则有一定难度，综合性、论证性较强，希望能较好地适应学生进一步深造的需要．书末附有习题答案或提示，以便于教师和学生参考．

本书由李育文、司清亮、王红卫任主编，由田德宇、叶留青、张曙光、安春香、韩忠民、徐建国任副主编，由刘瑞华、陈全红、皇甫红琴、原三领任编委．撰写分工如下：郑州轻工业学院李育文（习题答案与提示），王红卫（第一章），徐建国（第十一章）；焦作师范专科学校司清亮（第三章），叶留青（第八章），张曙光（第六章），安春香（第四章），刘瑞华（第九章）；漯河职业技术学院田德宇（第五章），陈全红（第二章）；商丘师范学院韩忠民（第七章）；江汉大学实验师范学院皇甫红琴（第十章的第一节至第六节）；上海交通大学博士后流动站原三领（第十章的第七节至第九节及附录）．

本书可作为高等院校相关专业的高等数学教材，亦可作为自学和数学爱好者的参考教材．

由于编者的水平有限，书中定有不少疏漏和不当之处，敬请广大读者指正．

编　者

2004 年 7 月

目 录

第七章 多元函数微分法及其应用

只有一个自变量的函数叫做一元函数,而具有两个或两个以上自变量的函数则叫做多元函数.本章在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.多元函数微分法的讨论主要以二元函数为主,二元以上的多元函数可以类推得到.

第一节 多元函数的基本概念

一、平面点集与 n 维空间

一元函数的一些概念、理论和方法,都是基于 R^1 中的点集、两点间的距离、区间和邻域等概念.将有关概念从 R^1 中的情形推广到 R^2 中,就得到了平面点集的一些基本概念.

1.平面点集

由平面解析几何知道,当在平面上引入一平面直角坐标系后,平面上的点 P 与有序二元实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应.这种建立了坐标系的平面称为坐标平面,二元有序实数的全体,即 $R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ 就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合,称为平面点集,记作

$$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{具有性质 }P\}.$$

现在我们引人 R^2 中邻域的概念

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,记作 $U(P_0,\delta)$ 即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\},$$

也可写作

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

在几何上,$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心.$\delta>0$ 为半径的圆内部点 $P(x,y)$ 的全体,也记作 $U(P)$.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

任意一点 $P\in R^2$ 与任意一个点集 $E\subset R^2$ 之间必有以下三种关系中的一种.

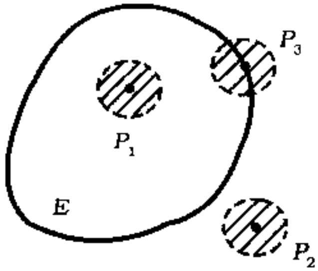

图 7.1

①**内点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的内点(图 7.1 P_1 点).

②**外点**：如果存在 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P) \cap E = \varnothing$，则称 P 为 E 的外点(图 7.1 P_2 点).

③**边界点**：如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点(图 7.1 P_3 点)

E 的边界的全体，称为 E 的边界，记作 ∂E. E 的内点必属于 E；E 的外点必不属于 E；而 E 的边界点可能属于，也可能不属于 E. 聚点：如果对于任意给定的 $\delta > 0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的聚点.

由聚点的定义可知，点集 E 的聚点 P 本身，可以属于 E，也可以不属于 E.

任意一点 P 与一个点集 E 之间的联系，可能是，内点，外点，边界点或聚点. 例如平面点集 $E = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

满足 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都属于 E；点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

下面是一些常用的平面点集：

开集：如果点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集.

闭集：如果点集 E 的余集 E^C 为开集，则称 E 为闭集.

连通集：如果点集 E 内任意两点，都可以用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

区域(开区域)：连通的开集称为区域或开区域.

闭区域：开区域连同它的边界一起构成的点集称为闭区域.

有界集：对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E \subset U(O,r)$$

其中 O 是坐标原点，则称 E 为有界集.

无界集：一个集合如果不是有界集，就称之为无界集.

2. n 维空间

设 n 为取定的一位自然数，我们用 R^n 表示 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体构成的集合，即

$$R^n = R \times R \times \cdots \times R$$
$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R, i = 1,2,\cdots,n\}$$

记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，当所有 $x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 等于零时，R^n 中的这一元素为零

元，记作 $\boldsymbol{O}$. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 R^n 中的一个点或一个 n 维向量，x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量. R^n 中的零元 $\boldsymbol{O}$ 称为 R^n 的坐标原点或 n 维零向量.

在 R^n 中定义如下线性运算：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 R^n 中任意两个元素，$\lambda\in R$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1+\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

这样定义的线性运算的集合 R^n 称为 n 维空间.

R^n 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离，记作 $\rho(x,y)$，规定

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n 中元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 $\boldsymbol{O}$ 之间的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{O})$ 记作 $\|\boldsymbol{x}\|$，即

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

采用这一记号，结合向量的运算，便得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\\&=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

再看 R^n 中变元的极限：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$

如果
$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0$$

则称变元 $\boldsymbol{x}$ 在 R^n 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$.

显然 $\quad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\Leftrightarrow x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n$.

二、多元函数的概念

我们先看几个例子

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r，高 h 之间满足关系式

$$V=\pi r^2h\quad(r>0,h>0)$$

这里，当 r,h 在集合 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取一对值 $\{r,h\}$ 时，V 的对应值就随之确定.

例 2 平行四边形的面积 A 由它的相邻两边之长 a,b 和它们的夹角 θ 决定，即

$$A=ab\sin\theta\quad(a>0,b>0,0<\theta<\pi),$$

这里，当 a,b,θ 在集合 $\{(a,b,\theta)\mid a>0,b>0,0<\theta<\pi\}$ 内取定一组值 (a,b,θ) 时，A 的对应值就随之确定.

例 3 电路中电流强度 I，电压 V 和电阻 R 之间满足关系式

$$I=\frac{V}{R}\quad(V>0,R>0),$$

这里，当 V,R 在集合 $\{(V,R) \mid V>0,R>0\}$ 内取定一对值 (V,R) 时，I 的值就随之确定.

上面三个例子的几何和物理意义虽各不相同，但它们却有共同的性质，抽出这些共性就可以得出以下二元函数的定义.

定义 1 设 D 是 R^2 的一个非空子集，称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记作

$$Z=f(x,y)\quad (x,y)\in D$$

或

$$Z=f(P),\quad P\in D$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，x,y 称为自然量，Z 称为因变量. 数集 $\{Z \mid Z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的值域.

Z 是 x,y 的函数也可记为 $Z=Z(x,y)$，$Z=\varphi(x,y)$ 等.

类似地可定义三元函数 $u=f(x,y,z)$，以及三元以上的函数. 一般地，可定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数，当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域，与一元函数相类似，我们作如下约定：在一般地用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 P 的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 因而，对这类函数，它的定义域不再特别标出.

例 4 求 $Z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解：要使该算式表示的二元函数有意义，x,y 必须满足

$$x+y\geqslant 0$$

于是该函数的定义域为

$$\{(x,y) \mid x+y>0\}.$$

如图 7.2 所示.

例 5 求 $Z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\arcsin\dfrac{y}{3}$ 的定义域

解：要使该函数有意义，须使

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1\\ \left|\dfrac{y}{3}\right|\leqslant 1\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ -3\leqslant y\leqslant 3.\end{cases}$$

故所求函数的定义域为

$$\{(x,y) \mid -2\leqslant x\leqslant 2,\ -3\leqslant y\leqslant 3\},$$

如图 7.3 所示.

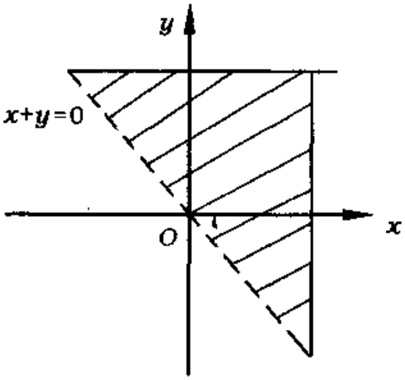

图 7.2

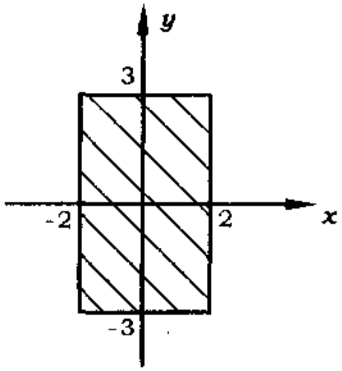

图 7.3

设函数 $Z = f(x,y)$ 的定义域为 D,对于任意取定的点 $P(x,y) \in D$,对应的函数值为 $Z = f(x,y)$,这样,以 x 为横坐标,y 为纵坐标,$Z = f(x,y)$ 为竖坐标的空间就确定了一点 $M(x,y,z)$,当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时,得到一个空间点集.

$$\{(x,y,z) \mid Z = f(x,y),(x,y) \in D\}.$$

这个点集为二元函数 $Z = f(x,y)$ 的图形(图 7.4),二元函数的图形是一张曲面.

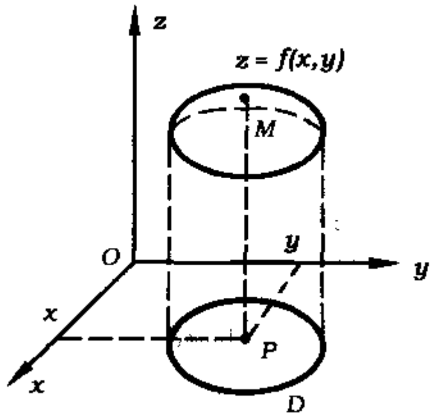

图 7.4

三、多元函数的极限

我们以二元函数 $Z = f(x,y)$ 为例来讨论当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 即 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

这里 $P \to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0,也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零.即

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$$

与一元函数的极限类似,如果在 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中,对应的函数值无限接近于一个确定的常数 B,我们就说,B 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时的极限.

定义 2 设二元函数 $f(P) = f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点.如果存在常数 B,对于任意指定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当点 $P(x,y) \in D \cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,

都有

$$|f(P)-B|=|f(x,y)-B|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 B 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=B \quad 或 \quad f(x,y)\to B((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=B \quad 或 \quad f(P)\to B(P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限，我们将二元函数的极限叫做二重极限.

例 6 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.$(x^2+y^2\neq 0)$，求证

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

证 因为 $\left|(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=|x^2+y^2|\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以 $\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立. 即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

值得指出，函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时以 B 为极限，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近于 B，因此，若 $P(x,y)$ 以某一特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 无限接近于某一定数，我们不能说函数 $f(x,y)$ 的极限存在. 若 $P(x,y)$ 以不同方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $Z=f(x,y)$ 趋于不同的数值，则函数的极限也不存在.

例 7 考察函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$，当 $P(x,y)\to P_0(0,0)$ 时的极限.

解：当 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=x$ 和曲线 $y=\sqrt{x}$ 趋近于点 $P(0,0)$ 时，

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x^2}=0,$$

而 $$\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x})^2}{x^2+(\sqrt{x})^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

这两个极限不相等，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

四、多元函数的连续性

在上述二元函数极限的基础上，我们给出二元函数连续性的概念.

定义 3 设二元函数 $f(D)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，那么称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

二元函数的连续性概念可以推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去. 下面举例说明.

例 8 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的连续性.

解：由例 6 知，因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$

所以 函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续.

前面我们已经指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用，根据多元函数的极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积仍为连续函数；连续函数的商在分母不为零处仍连续；多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似，多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 例如，$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$，$e^{x^2+y^2}$ 等都是多元初等函数.

根据上面所指的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，再利用初等函数的连续性，可有如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元初等函数的连续性，如果要求它在 P_0 点处的极限，而该点又在定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值.

即
$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

例 9 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$

解:函数 $\frac{x+y}{xy}$ 是初等函数,它的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$$

$P_0(1,2)$ 为 D 的内点,故存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)\subset D$,而任何邻域都是区域,所以 $U(P_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个定义区域,因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

一般地,求 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 时,如果 $f(P)$ 是初等函数,且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点,则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续,于是

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$$

与闭区间上一元连续函数的性质类似,在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 1 在有界闭区域 D 上的多元连续函数,必定在 D 上有界,且能取得它的最大值和最小值.

性质 2 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

习题 7.1

1.已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

2.求下列各函数的定义域

(1) $Z=\ln(y^2-2x+1)$　　(2) $Z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$

(3) $Z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$　　(4) $Z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

3.求下列各极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}$　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

第二节　二元函数的偏导数与全微分

一、偏导数

在研究一元函数时，我们从研究函数的变化率引入了导数的概念.对于多元函数同样需要讨论它的变化率，但多元函数的自变量不止一个，自变量与因变量之间的关系要更复杂，在本节中，以二元函数 $Z = f(x,y)$ 为例，考察如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 作为常量不变化，这函数对 x 的导数，就称为二元函数 $Z = f(x,y)$ 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义　设函数 $Z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \qquad ①$$

存在，则称此极限为函数 $Z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},Z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或 } f_x(x_0,y_0)$$

类似地，函数 $Z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记作

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},Z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\text{或 } f_y(x_0,y_0)$$

如果函数 $Z = f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数，它就称为函数 $Z = f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导数，记作

$$\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},Z_x\text{或 } f_x(x,y).$$

类似地，可定义函数 $Z = f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数，记作

$$\frac{\partial Z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},Z_y\text{或 } f_y(x,y).$$

由偏导数的概念可知，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 显然就是偏导数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值；$f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值.同一元函数一样，在不至于混淆的地方称偏导函数为偏导数.