于世杰 马 琦 主编

冲击金牌

初中奥数百分百

［八年级］

初中奥数解题方法与技巧

OK

希望出版社
HOPE PUBLISHING HOUSE

初中奥数百分百

初中奥数解题方法与技巧

[八年级]

主　　编　于世杰　马　琦
本册主编　徐建亮
编　　委　于世杰　马　琦　沈小玥　刘建武
高　洁　高秀华　张芝秀　徐建亮
史凤山　路玉新　杨志勇

希望出版社
HOPE PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

初中奥数百分百(八年级)./于世杰,马琦主编.
太原:希望出版社,2006.1
ISBN 7-5379-3669-2

Ⅰ..初… Ⅱ.①于…②马… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第160189号

初中奥数百分百(八年级)

于世杰 马琦 主编

*

希望出版社出版发行 (太原市建设南路15号)

新华书店经销 山西新华印刷有限公司印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:11.5 字数:283千字

2006年1月第1版 2006年1月太原第1次印刷

*

印数:1—6000册

ISBN 7-5379-3669-2/G·2992

全套三册:36.00元(本册定价:12.00元)

前　言

学习数学,离不开思维.那么什么叫思维呢?心理学中思维的定义是:思维是人脑对客观事物间接的和概括的认识过程.通过这种认识,可以把握事物的一般属性和本质属性.因此,学习收获的大小,学习成绩的优劣,最终都取决于思维活动的发展与思维能力的发挥.而思维方法是思维的钥匙,有了科学的思维方法,我们就能对感性材料进行合理的加工整理,形成严谨的理论系统;就能在迷离混沌的状态下,找到一条主导性的线索,从总体上把握事物的本质联系.从而有效地提高发现问题和解决问题的能力.

《初中奥数百分百》丛书力求贴近整个数学环节,立足于培养学生的思维能力,增强学生思维的灵活性、拓展性,以便提高学生解决实际问题的能力.为此,我们紧密联系学生学习实际,全面深入研究了近几年的全国奥数题、竞赛题和各省市的升学试题,并紧扣教学大纲和现行教材,从七年级到九年级(初中),同步到每个章节.力求通过同步辅导与竞赛培训的有机结合,使学生在明确重点、突破难点的基础上,加深对基础知识、基本技能的理解和运用,积累解题技巧,掌握思维方法,学会举一反三和融会贯通,能将知识内联、外延、迁移、重组,在新情景下解决新问题.

本套丛书用到如下几种思维方法:

整体思维,就是将几个独立的部分合并成一个整体来思考.

有序思维,就是按照一定的顺序,有条不紊地去观察、分析和

解答问题.

夹逼思维,就是把原来的题目"缩小"成一个很简单,但基本形式不变的小题目,由此发现解题规律.

变更思维,就是把一些较难的题目,转换一个角度思考,使问题迎刃而解.

逆向思维,就是从问题的"结果"入手,"倒着"去推算.

极端思维,就是对一些诸如最大、最小等问题求解时,可以考虑该问题的极端情况,使解法简捷明快.

灵感思维,就是克服思维定势,不按常规思维解决问题的一种思维方法.

发散思维,就是通过教材各章发散点之间的联系,使思维进入新的境界.

形象思维,就是将有些数学题运用图形求解,使人顿开茅塞.

总之,本套丛书内容翔实、知识点密集、实用性强,通过深入浅出、一点即通的讲解,既解决了学生解题中所遇到的难关,又把读者引到一个新的思维境界.同学们用它不仅可以辅助数学学习,可开思维之窍,入解题之门,养成遇到问题抓本质的习惯,而且还可沟通不同知识的内在联系,有助于提高解题的技能和技巧,使你们受益终身.

耕耘者总盼着丰收的金秋,这本书如能为身处题海中的同学们送去一叶小舟,一副双桨,使你们顺利到达理想的彼岸.能为开启同学们的智慧带来一点裨益,作者将感到极大的欣慰.由于时间仓促,水平有限,书中缺点错误在所难免,敬请广大读者批评指正.

目　　录

一　勾股定理的巧解

技巧点拨

直角三角形也是一种特殊的三角形，它的性质一是两锐角互余，二是直角三角形斜边上的中线定理及其两个推论. 两直角三角形全等的判定，除了前面所学的判定方法外，还有其特有的“斜边、直角边”(简称 HL)判定定理.

直角三角形的三边有特殊的关系：$a^2+b^2=c^2$. 即直角三角形两直角边 a、b 的平方和，等于斜边 c 的平方. 这就是勾股定理.

学习勾股定理要掌握以下几点：

1. 勾股定理揭示了一个直角三角形三条边之间的数量关系，它可以解决许多直角三角形中的计算问题，它是直角三角形特有的性质，在其他三角形中不存在这种关系，所以在利用勾股定理进行计算与证明时，无直角的情况下，可通过作垂线构造直角三角形，以便利用勾股定理.

勾股定理的作用有：

(1) 已知直角三角形的两边求第三边；

(2) 已知直角三角形的一边，求另两边的关系；

(3) 可用于证明线段平方关系的问题；

(4) 利用勾股定理，可作出长为$\sqrt{n}$的线段.

2. 勾股定理是直角三角形的性质定理，而勾股定理的逆定理是直角三角形的判定定理. 即：

在$\triangle ABC$中，若$a^2+b^2=c^2$，则$\triangle ABC$为Rt$\triangle$，c为斜边，$\angle C=90°$.

勾股定理的逆定理是利用三角形的三边之间的数量关系来判断一个三角形是否是直角三角形的定理，它把数与几何形状统一起来，体现了数学的重要思想——数形结合思想，打破了证一个角是90°，只能靠角与角之间的转化计算的方法，而建立了求边与边关系也能判断直角的新方法，并且在实际生活中有着广泛的应用.

3. 勾股定理的证明

(1) 将4个全等的直角三角形拼成如图1－1所示的正方形，则

$$S_{正方形ABCD}=(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab,$$

$\therefore\quad a^2+b^2=c^2$；

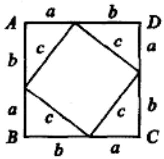

图 1－1

(2) 将4个全等的直角三角形拼成如图1－2所示的正方形，则

$$S_{正方形EFGH}=c^2=(a-b)^2+4\times\frac{1}{2}ab,$$

$\therefore\quad c^2=a^2+b^2$；

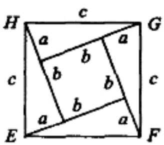

图 1－2

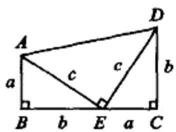

图 1－3

(3) 如图1－3，将两个直角三角形拼成直角梯形，则

$$S_{梯形ABCD}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2,$$

$\therefore\quad a^2+b^2=c^2.$

应注意的是：由于直角三角形中斜边最长，故运用勾股定理时，一定要抓住直角三角形最长边（即斜边）的平方等于两短边（两直角边）的平方和这一重要结论.

例题精讲

例一

如图1-4，正方形 $BFGC$、$ACDE$ 的面积分别为9和16，求直角$\triangle ABC$的斜边 c 的长.

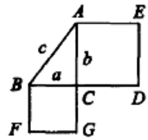

图 1-4

分析 根据勾股定理知道 $c^2=a^2+b^2$，而 a^2、b^2 分别为正方形 $BFGC$、$ACDE$ 的面积，即为9和16，从而可以得到 c^2 求出 c.

解 由题意知 $a^2=9$, $b^2=16$.

依勾股定理，得 $c^2=a^2+b^2=25$.

所以 $c=5$.

点评 解此例的关键是直接运用勾股定理求解.

例二

已知$\triangle ABC$中，$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，其中 m、n 都是正整数，且 $m>n$. 求证：$\angle C=90°$.

分析 此例可用勾股定理逆定理来解.

证明

$$\begin{aligned}&a^2+b^2\\=&(m^2-n^2)^2+(2mn)^2\\=&m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2\\=&m^4+2m^2n^2+n^4\end{aligned}$$

$=(m^2+n^2)^2$

$=c^2.$

$\therefore$ c 边所对的$\angle C=90°$.

点评 当 $m>n$ 且 m、n 是整数时，这组数：m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2 就是一组勾股数.

例三

在钝角$\triangle ABC$ 中(图 1－5)，$CB=9\text{cm}$，$AB=17\text{cm}$，$AC=10\text{cm}$，$AD\perp BC$ 的延长线于 D，求 AD 的长.

分析 从题目所给的条件看，不易直接利用勾股定理计算 AD，必须先求出 CD 的长才能解决问题. 要求出 CD 的长，可设 CD 为 x，建立关于 x 的方程，求出 CD 的长. 而题目中存在的两个直角三角形给了我们解决问题的途径.

解 设 $CD=x$，在 Rt$\triangle ADC$ 中，有

$AD^2=AC^2-CD^2=10^2-x^2.$

在 Rt$\triangle ABD$ 中，有

$AD^2=AB^2-BD^2=17^2-(9+x)^2.$

$\therefore$ $17^2-(9+x)^2=10^2-x^2.$

解得 $x=6.$

$\therefore$ $AD=\sqrt{10^2-6^2}=8$ (cm).

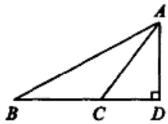

图 1－5

点评 运用勾股定理解题时，关键是从中抽象出直角三角形，再运用勾股定理求解.

例四

已知 a、b、c 为$\triangle ABC$ 的 3 边，且 $a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$. 求证：这个三角形是直角三角形.

分析 要证明$\triangle ABC$ 是直角三角形，应从它的 3 边 a、b、c 入手，如果有关系 $a^2+b^2=c^2$ 或 $b^2+c^2=a^2$ 或 $c^2+a^2=b^2$ 成立，那么这个三角形一定是直角三角形. 从已知条件，可以求出 a、b、c

的长.

◈■■ **证明** 由已知得

$$a^2+b^2+c^2-10a-24b-26c+338=0.$$

$\therefore$ $a^2-10a+25+b^2-24b+144+c^2-26c+169=0.$

$\therefore$ $(a-5)^2+(b-12)^2+(c-13)^2=0.$

$\because$ $(a-5)^2\geqslant0$, $(b-12)^2\geqslant0$, $(c-13)^2\geqslant0$,

$\therefore$ $a=5$, $b=12$, $c=13$.

$\because$ $5^2+12^2=13^2$,

即 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

☺■■■ **点评** 直角三角形适用于勾股定理,而利用逆定理是判断一个三角形是直角三角形的方法. 当由边之间的关系判断三角形的形状时,我们用勾股定理先行考证,暂时不具备条件的,应创造条件,从而求出边长或边长之间的关系,进而判断.

例五

如图 1－6,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle1=\angle2$,$CD=1.5$,$BD=2.5$,求 AC 的长.

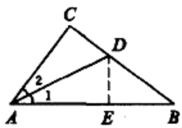

图 1－6

👁■ **分析** 此例欲用勾股定理计算 AC,无论是利用 $\triangle ABC$,还是利用 $\triangle ACD$,都只有一个条件,因此必须设法找出 AC 与 AB 或 AC 与 AD 的关系. 由 $\angle1=\angle2$,$\angle C=90°$,想到常用辅助线:作 $DE\perp AB$ 于 E,则 $DE=CD=1.5$,$AC=AE$,$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}$,这样就把 AB 用 AC 表示出来了.

◈■■ **解** 作 $DE\perp AB$ 于 E,由 $\angle C=90°$,$\angle1=\angle2$,得

$$DE=CD=1.5.$$

且 $\angle1+\angle ADE=90°$, $\angle2+\angle ADC=90°$.

所以 $\angle ADE=\angle ADC$.

于是　$AC = AE$.

而　$BE^2 = BD^2 - DE^2 = 2.5^2 - 1.5^2 = 4$.

所以　$BE = 2$.

又　$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (AC+2)^2 - 16$,

解得　$AC = 3$.

☺■■■**点评**　解此例的关键是**添作辅助线构造**直角三角形.

例六

如图 1－7，$AB = 4$，$BC = 12$，$CD = 13$，$DA = 3$，$AB \perp AD$.

求证：$BC \perp BD$.

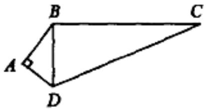

图 1－7

分析　欲证 $BC \perp BD$，需证 $\triangle BDC$ 是直角三角形. 因为题中给出 $\triangle BAD$ 是直角三角形，$AB = 4$，$DA = 3$，根据勾股定理可求出 $BD = 5$. 又因为 $CD = 13$，$BC = 12$，$13^2 = 12^2 + 5^2$，即 $CD^2 = BD^2 + BC^2$，根据勾股定理的逆定理可知 $\triangle BCD$ 为直角三角形，所以 $BD \perp BC$.

◈■■**证明**　在 Rt$\triangle ABD$ 中，因为 $AB = 4$，$DA = 3$.

$\therefore$　$BD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

又$\because$　$BC = 12$，　$CD = 13$，　$13^2 = 12^2 + 5^2$，

即　$CD^2 = BD^2 + BC^2$.

$\therefore$　$\triangle BCD$ 为直角三角形.

$\therefore$　$BC \perp BD$.

☺■■■**点评**　此例**用勾股定理逆定理**求证干净利索.

例七

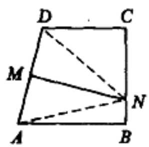

图 1－8

已知：如图 1－8，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle ABC = 90°$，$AB = 9cm$，$CD = 7cm$，$BC = 8cm$，

M 是 AD 的中点,从 M 作 AD 的垂线交 BC 于 N,求 BN 的长.

分析　连接 AN、DN,在 $Rt\triangle ABN$ 中,$BN^2+9^2=AN^2$. 在这个方程中,AN 也是未知数,且不能求出 AN 的值. 考虑用 BN 表示 AN,把上面的方程变成 BN 的一元方程. 由已知可得 $AN=DN$,而 $DN^2=7^2+(8-BN)^2$,于是两个方程可化为 BN 的一元方程.

解　连接 AN、DN,设 $BN=x$,则 $CN=8-x$. 在 $\triangle ABN$ 中,由勾股定理得 $9^2+x^2=AN^2$. 在 $\triangle CDN$ 中,由勾股定理得 $7^2+(8-x)^2=DN^2$.

∵　N 在 AD 的垂直平分线上,

∴　$AN=DN$.

∴　$9^2+x^2=7^2+(8-x)^2$.

解得　$x=2$.

∴　BN 的长等于 2cm.

点评　利用勾股定理列出待求线段的方程中,若还有另外的未知线段,且又无法求出其值,这时要设法将这个未知线段用待求线段表示出来,将所列的方程变为待求线段的一元方程,解这个方程即可.

例八

如图 1-9 所示,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,$AB=AC$,D 为斜边 BC 的中点,E、F 分别为 AB、AC 边上的点,且 $DE\perp DF$. 若 $BE=8$cm、$CF=6$cm,求 $\triangle DEF$ 的面积.

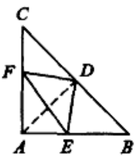

图 1-9

分析　要求 $\triangle DEF$ 的面积,当然应求其边长,这就要求充分利用条件"$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,且 D 点为 BC 中点"以及"线段 $BE=8$cm,$CF=6$cm"两个条件,结合等腰三角形"三线合一",可想到连接 AD.

解　连接 AD.

∵　$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,D 点为斜边 BC 的中点,

$\therefore \quad AD = BD = DC$，且 $AD \perp BC$.

又$\because \quad DE \perp DF$，

$\therefore \quad \angle ADE = \angle CDF$.

又$\because \quad \angle DAE = \angle C = 45°$，

$\therefore \quad \triangle ADE \cong \triangle CDF$（AAS）.

得 $ED = DF$，$AE = CF = 6\text{cm}$.

故 $AF = BE = 8\text{cm}$.

在 Rt$\triangle AEF$ 中，依勾股定理

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

$\therefore \quad EF = 10\text{cm}$.

而等腰直角$\triangle DEF$ 斜边上的高为$\frac{1}{2}EF$.

$$\therefore \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times EF^2 = 25\text{cm}^2.$$

☺■■■**点评** 解此例判断$\triangle DEF$ 是等腰直角三角形是前提，运用勾股定理计算 EF 长是关键.

例九

已知：如图 1 - 10，在$\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，AD 是角平分线，求证：$BD > DC$.

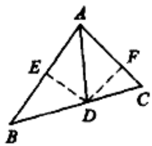

图 1 - 10

■分析 要比较 BD、DC 的大小，考虑求出 BD、DC 的长. 由于题中不具备直角条件，故需构造直角三角形，分别过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E、$DF \perp AC$ 于 F，则有 $BD = \sqrt{DE^2 + BE^2}$，$DC = \sqrt{CF^2 + DF^2}$. 因 $DE = DF$，要证 $BD > DC$，需证 $BE > CF$.

◈■■**证明** 作 $DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F（作法）.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle ADF$ 中，有

$$\begin{cases}\angle DAE=\angle DAF & \text{（角平分线定义）},\\ \angle AED=\angle AFD & \text{（垂直的定义）},\\ AD=AD & \text{（公共边）}.\end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle ADE \cong \triangle ADF.$

$\therefore\quad DE=DF,\quad AE=AF.$

$\because\quad AB>AC,$

$\therefore\quad BE>CF.$

由勾股定理,得

$$BD=\sqrt{BE^2+DE^2},\quad DC=\sqrt{CF^2+DF^2}.$$

$\therefore\quad BD>DC.$

☺■■■**点评** 要比较两线段的大小,可根据有关定理,分别计算出两条线段的长,从而确定两条线段的不等关系.

例一

如图 1－11,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$.

求证:$BC^2+AB^2=AC^2+BC\cdot AB$.

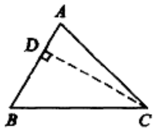

图 1－11

■分析 求证的结论中包含线段的平方,而我们学过的线段的平方关系只有在勾股定理中出现,因此可考虑构造直角三角形以利用勾股定理. 在 $\triangle ABC$ 中构造直角三角形最直接的方法就是作某一边的高线,但最好不要过点 B,以免破坏掉 $\angle B=60°$这一条件.

◈■■**证法一** 过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D,在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中,有 $BC^2=BD^2+CD^2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,有 $\quad AC^2=AD^2+CD^2$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad BC^2+AB^2&=BD^2+CD^2+(AD+BD)^2\\&=BD^2+CD^2+AD^2+BD^2+2AD\cdot BD\\&=2BD^2+CD^2+AD^2+2AD\cdot BD\end{aligned}$$