21世纪高等学校教材

贾 彪 刘萍

高等数学

GAODENGSHUXUE

（上册）

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学

（上 册）

主编 贾 彪 刘 萍
主审 魏 勇

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书依据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》编写而成的.

本书汲取了部分一线优秀教师实际教学中的教改成果和国内外同类教材的优点，更强调知识点引人的实际背景，突出知识的应用.全书分上、下两册出版，上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分(常微分方程简介)、定积分及其应用；下册包括向量与空间解析几何、多元微积分、无穷级数、数学建模等.书中每章都附有复习题和自测题，题型丰富，题量大，更便于学生自学。书中编写了部分数学史知识和数学应用性阅读材料.

本书可作为三年制高职高专、成人高等学历教育的数学教材，也可作为专升本或专转本学生自学的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上/贾彪，刘萍主编．—南京：东南大学出版社，2005.9

ISBN 7-5641-0156-3

Ⅰ．高... Ⅱ．①贾...②刘... Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 099681 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　姜堰晨光印刷有限公司印刷
开本：700mm×1000mm　1/16　印张：29.5　字数：578 千字
2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
印数：1～2500　定价：44.00 元(上、下册)

前 言

20世纪90年代以来，随着我国高等教育的不断调整、改革，高等职业技术教育得到了迅猛发展.一大批以普通高中毕业生和中等职业技术学校毕业生为生源，以培养经济建设和社会发展急需的中高级应用型、技能型人才为目标的高等职业技术学院应运而生.

高等数学作为高等职业技术教育的一门必修的公共基础课，是学生学习有关专业知识、专门技术及获取新知识和能力的重要基础，具有很强的工具功能.英国著名哲学家培根曾说过："数学是打开科学大门的钥匙."同时，高等数学也对提高学生的文化素质，培养其逻辑思维能力以及分析问题、解决问题的能力有着重要影响.

本教材是在认真研究、领会"教育部关于高职高专教育高等数学课程教学基本要求"的基础上，结合我院多年高等数学教学的经验，吸收其他同类教材的优点，综合考虑目前高职高专生源的具体状况编写而成的.

本教材具有以下特点：

1. 每章前都有本章学习基本要求，使学习者学习时目标更明确.

2. 尽量从知识的实际背景出发引入知识.注重概念与定理的直观描述.淡化了数学理论，逻辑推理做到适可而止.

3. 每节后配有相应的习题，供学习者练习.各章都配有复习题和自测题.复习题分成A、B两部分.A部分的题为基础题和难度适中的题，要求所有学生都会做.B部分的题是有一定难度和灵活性的题，为有能力并想进一步深造的学生留有接口.

4. 教材中选编了部分数学史和某些数学知识应用性的阅读材料，既能让学生了解数学发展的历程，又能提高学生数学知识的应用能力.

5. 随着高性能数学软件的不断涌现以及在工程技术领域中的大量应用，本教材在下册将Mathematica软件介绍放在附录中，给有条件的学院、学习者留有余地.

6. 在给学习者的建议部分，特别强调了非智力因素，如：学习态度，学习方法等在高等数学学习过程中的重要性.

本书上册由贾彪编写了一、二两章，曹可编写了第三章，刘萍编写了四、五两章.刘一飞、王翠菁编写了部分阅读材料和习题.由贾彪统稿.

在本书编写过程中，我们参阅了国内外高等数学的一些优秀教材，并为体现内

容的典型性与广泛性，书中部分例题与练习题引自这些教材，在此一并表示感谢. 慕金超老师为部分题目的整理付出了劳动，我们同样表示感谢. 由于编者水平所限，书中定有不尽人意的地方，敬请读者指正.

编者

2005年8月

目 录

0 引 文

0.1 感受微积分

微积分是人类文明发展史上理性智慧的精华.它的出现,显著地促进了整个科学技术的发展,是数学发展史上的里程碑.微积分到底能解决哪些问题呢?它研究问题的基本思想和方法是什么?我们不妨通过下面三个例子来感受一下微积分.

1. 作图问题

首先,大家都能熟练地作出 $y=2^u$ 和 $u=\dfrac{1}{x}$ 两个函数的图形(如图 0.1 和图 0.2 所示).

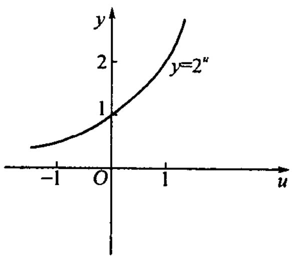

图 0.1

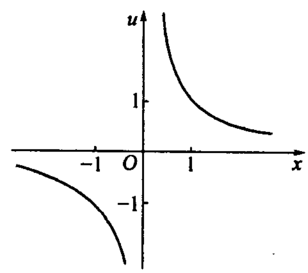

图 0.2

但是,如何比较精确地作出 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的图形呢?(到这里,读者不妨先合上书,想一想.)

$y=2^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.我们当然可以给出图形上的一些点,如 $(-2,2^{-\frac{1}{2}})$,$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$,$(1,2)$,$(2,\sqrt{2})$ 等等.仅仅有这些点并不能很好地把握图形的特征.至少还应弄清以下两点:

1) 当 $x\to\infty$ 时,y 有何变化趋势.即在无穷远处函数 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的图形有何特征.

2) 当 $x\to 0$ 时,y 有何变化趋势.即函数 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的图形在 $x=0$ 点附近有何特征.

当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}\to 0$,这时 $y=2^{\frac{1}{x}}\to 1$,即在无穷远处函数 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的图形与水平直线 $y=1$ 愈来愈接近.

当 x 从 $x=0$ 点两侧趋向于 0 时，$y=2^{\frac{1}{x}}$ 的变化完全不同. 当 $x\to0^-$ 时（从 $x=0$ 左侧趋近于 0），$\frac{1}{x}\to-\infty$，这时 $y=2^{\frac{1}{x}}\to0$；当 $x\to0^+$ 时（从 $x=0$ 右侧趋近于 0），$\frac{1}{x}\to+\infty$，这时 $y=2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，即当 $x\to0^-$ 时，函数 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的图形无限接近原点；当 $x\to0^+$ 时，函数 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的图形向上无限接近 y 轴.

综合以上讨论，可比较精确地画出 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 的大致图形. 见图 0.3.

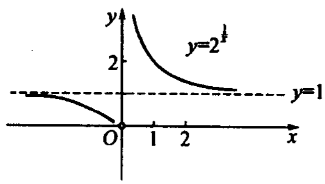

图 0.3

细心的读者从图形上可以看出，$y=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是递减的，但是它们单调减少的方式是不一样的. 这个问题到第三章是可以解决的.

2. *速度问题*

在中学物理中，已经对匀速直线运动和匀变速直线运动作了较为详细的研究. 如果物体作更一般的直线运动，已知其运动方程为 $s=f(t)$，如何确定运动物体在某一时刻的瞬时速度呢？如，已知物体作直线运动，运动方程为 $s=t^3$（s 的单位为 m，t 的单位为 s），$t=1\text{s}$ 时，物体的瞬时速度 $v(1)$ 是多少？如何确定？

首先，由运动方程 $s=t^3$，应该知道，物体所作的直线运动既不是匀速，也不是匀变速直线运动（想一想，为什么），当然不能使用公式 $v=\frac{s}{t}$ 求速度. 但是，我们可以先在 $t=1\text{ s}$ 近旁的一个小时间区间里求出该物体运动的平均速度 $\bar{v}$，显然，$\bar{v}$ 随着时间区间的不同而变化. 时间区间愈小，平均速度 $\bar{v}$ 就愈接近于 $t=1\text{ s}$ 时的瞬时速度 $v(1)$. 先看表 0.1.

表 0.1

时间区间	[1,1.1]	[1,1.01]	[1,1.001]	[1,1.000 1]	…
平均速度 $\bar{v}$ (m/s)	3.31	3.030 1	3.003 001	3.000 300	…

由上表可见，在 $t=1\text{ s}$ 近旁，时间区间愈小，$\bar{v}$ 愈接近于 3. 因此，物体在 $t=1\text{ s}$ 时的瞬时速度 $v(1)$ 应该是 3 m/s.

从另一个角度，我们可以先计算出在 $[1,t]$ 时间区间上的平均速度. 在该时间区间内，运动物体所用时间 $\Delta t=t-1(\text{s})$，经过的路程 $\Delta s=f(t)-f(1)=t^3-$

1^3(m),因此,平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{t^3-1}{t-1}=t^2+t+1\ (\mathrm{m/s}),$$

显然 t 愈趋近于 1 时,$\bar{v}$ 就愈趋近于 $v(1)$. 另一方面,$t\to 1$ 时,$\bar{v}=t^2+t+1\to 3$ (m/s),因而 3 m/s 不是别的,正是 $t=1$ s 时,运动物体瞬时速度的精确值,即

$$v(1)=3\ \mathrm{m/s}.$$

3. 面积问题

我国古代数学家刘徽在公元前 263 年借助圆内接正多边形的周长、面积,得出圆的周长、面积."割之弥细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣."见图 0.4.

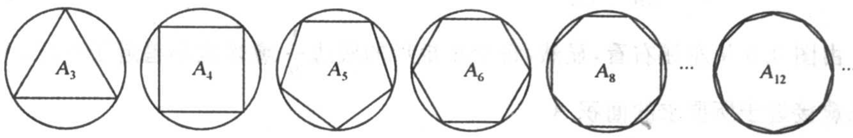

图 0.4

设 A_n 是圆内接正 n 边形的面积. 图 0.4 由左向右十分清晰地反映了随着圆内接正 n 边形边数 n 的增大,A_n 愈来愈接近圆的面积的过程. 即,若圆的面积为 A,我们有

$$A_n\to A\quad(n\to\infty).$$

我们通过下面的例子再来感受一下这种思想.

求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴围成的曲边三角形的面积. 见图 0.5.

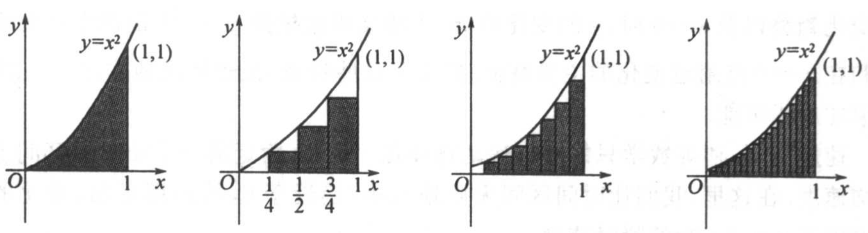

图 0.5

对应于区间[0,1],曲边上 y 的值变化较大. 设想用垂直于 x 轴的直线 $x=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 将曲边三角形的面积分割成 n 个底边长为 $\frac{1}{n}$ 的小的图形(每一个小的图形称为一个小曲边梯形). 当 n 很大时,每个小曲边梯形上面的曲边上的 y 值变化不大. 我们就用每个小曲边梯形左边的直线段的长 $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 作

为矩形的一边，底$\frac{1}{n}$作为矩形的另一边. 每一个小曲边梯形的面积都用相应的小矩形面积$\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$近似代替，把$n$个小矩形的面积加起来，有

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{n}\left(\frac{1-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

由图 0.5 从左往右看，显然，每个小矩形的底边$\frac{1}{n}$愈来愈小趋近于 0 时，A_n就愈来愈接近于所要求的面积A.

另一方面，$n\to\infty$时，

$$A_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\to\frac{1}{3}.$$

因此，$\frac{1}{3}$正是所求面积A的精确值！即$A=\frac{1}{3}$.

以上三个问题是微积分学中的一些基本问题. 我们再回顾一下这三个问题.

作图问题. 函数$y=2^{\frac{1}{x}}$，如果仅仅用初等数学的方法，讨论函数的基本性质，给出图形上的一些点，就无法比较精确地画出它的图形. 只有讨论了$x\to\infty$时，y的变化趋势以及$x\to 0$时，y的变化趋势，才能准确地把握$y=2^{\frac{1}{x}}$的图形在无穷远处和在$x=0$点附近变化的主要特征. 抓住了这些特征，比较精确地作出$y=2^{\frac{1}{x}}$的图形才成为可能.

速度问题. 初等数学只能求出运动物体在$t=1$ s 附近的一个小时间区间上的平均速度. 在这里，我们让时间区间无限地变小，趋近于 0，从而用运动、变化的观点求得了$t=1$ s 时的瞬时速度.

面积问题. 初等数学能做的工作，就是对某个具体的n(如$n=16$)求出A_n作为A的近似值. 而在这里，我们让每个小矩形的边长$\frac{1}{n}$无限趋近于0，从而由A_n无限趋近于$\frac{1}{3}$而得到了A的精确值.

由此可见，初等数学研究的对象是常量数学. 它研究问题的方法是建立在有限的观念上，用静止、孤立的观点研究问题，而微积分是研究变量的数学. 它是建立在无限的观念上，用运动、变化的观点研究问题. 恩格斯曾说过："只有微积分学才能

使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也表明过程、运动.”

学习者在学习微积分时,应注意到这些区别,并逐步地熟悉和适应用运动、变化的观点来研究变量数学.

0.2 给学习者的建议

目前高等数学的理论与方法,已广泛地应用于自然科学、工程技术乃至社会科学等领域.学习者在学习前一定要充分认识到学习高等数学的重要性.

1. 著名数学家霍格说过:“如果一个学生要成为完全合格的、多方面武装的科学家,他在其发展初期就必定来到一座大门并且通过这座门.这座门上用每一种人类语言刻着同样一句话:‘这里使用数学语言’.”尽管这是对未来的科学家说的,但是对工科的学习者来说,要想较为透彻地学习工科某专业的知识,没有高等数学作为工具是不可能的.古人也曾说过:“工欲善其事,必先利其器.”

2. 有些学习者由于在校时高等数学学得比较好,因而在毕业后的专业继续深造过程中得心应手,十分顺利.也有些学习者在毕业后返回母校的聚会上曾对数学教师说:进入社会后几乎没有机会应用作为知识的数学,然而,你教给我们的数学思想、数学思维方法等却深深影响着我们,随时随地地发挥作用,使我们终生受益.

不可否认,由于高等数学的抽象形式和符号语言与人们的日常生活距离很大,学习者在学习过程中会遇到一些障碍和困难.为此,作为一线教师对学习者给出以下几条建议:

1. 要端正学习态度.作为一线教师,通过多年来的观察和研究,发现大部分没有学好高等数学的学习者并不是由于智力因素造成的,而是由于没有端正的学习态度,学习不认真,没有良好的学习方法、学习习惯等非智力因素造成的.甚至有的学生很聪明,由于一开始没有引起足够的重视,基础没打好,等到后来幡然醒悟,再想学好高等数学时,困难重重,不得不花大量的时间和精力,却收效甚微,十分遗憾.因而,学习高等数学时,学习者们一定要从一开始就一步一个脚印地认真学好每一个知识点,有问题就要通过教师和同学把它弄清楚,不积累问题.

2. 决不能像读小说或其他作品一样地去读这本教材.尤其对于其中的概念,你应逐字逐句不止一遍地去读它.并认真地了解这些概念的实际背景.古人说得好:“读书百遍,其意自现.”

3. 要养成良好的学习习惯.课后不要急于做作业,要先阅读教材,整理课堂笔记,梳理一下知识点,甚至查阅一些相关的参考书或资料.要独立完成作业,不抄袭,不应付。另外,请学习者注意,高等数学上课时间与课后学习时间约为 1∶1.

只要你尽自己的努力,相信你一定能够学好高等数学.

1　函数与极限

学习基本要求

1. 理解函数的概念，知道函数的表示方法. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念.

4. 熟练掌握基本初等函数的性质和图形.

5. 理解极限的概念. 了解函数左极限和右极限的概念，了解极限存在与左、右极限之间的关系. 会求曲线的水平、垂直渐近线.

6. 熟练掌握极限的四则运算法则. 会用两个重要极限求函数的极限.

7. 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小、同阶无穷小和等价无穷小的概念，会用等价替换求极限.

8. 了解函数连续的概念(含左连续、右连续)，会求函数的间断点并判断类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性. 知道闭区间上连续函数的性质(最大值和最小值定理、介值定理及其推论).

自然界中一切事物都在不停地变化着. 人们要征服自然，改造自然，造福人类，就必须研究、掌握这些变化的客观规律. 数学就是研究现实世界中空间形式和数量关系的学科. 作为变化着的事物及它们之间依存关系的反映，在数学中就产生了变量与函数的概念. 高等数学的主要研究对象就是变量与函数. 它是在极限的基础上，给出了微积分等更高级、更精美的工具，使人们有可能更好地研究函数与变量的特性，从而在量的方面掌握事物变化的客观规律. 本章将在较为系统地归纳、总结中学有关函数知识的基础上，学习极限的概念及运算，并利用极限给出函数的连续性与闭区间上连续函数的性质.

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

考虑下面四个例子.

例 1.1.1　一列火车在平直的轨道上制动后的运动规律 $s = 20t - 0.2t^2$. 其中 s 表示路程，单位是米，t 表示时间，单位是秒.

例 1.1.2　2002 年 2 月 11 日国务院公布的存款利率表(见表 1.1.1).

表 1.1.1

时间	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率(%)	1.71	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79

例 1.1.3　气象台气温自动记录仪记下的某地某日 24 小时内的气温曲线(见图 1.1.1).

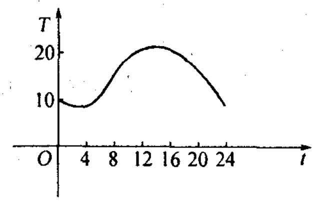

图 1.1.1

其中 T 表示温度(℃),t 表示时间(时).

例 1.1.4　邮寄一封快信的费用 C 依赖于这封信的重量 w. 尽管不能用一个简单的公式把 w 和 C 联系起来,但当 w 已知时,邮局的工作人员还是有一个规则来确定 C.

以上每一个例子都描述了一种规则. 如例 1.1.3,只要在[0,24]中任意给定一时刻 t_0,通过图 1.1.1,先找到曲线上横坐标为 t_0 的点,再量出该点的纵坐标,就能唯一地确定 t_0 时刻的气温 T_0 了. 显然,以上四例中一个变量总是依赖另一个变量,这就产生了函数.

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 对于任意的 $x \in D$,变量 y 按照某个对应关系 f 都有唯一确定的实数与之对应,则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数,记作 $y = f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量. D 称为函数的定义域,数集 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

当自变量 x 取定某一数值 x_0 时,如果 $y = f(x)$ 有唯一确定的值与之对应,便称 $y = f(x)$ 在 x_0 点有定义,且将 x_0 点的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

1.1.2　函数的表示法

前面的 4 个例子依次对应着函数的一种表示法.

1. 公式法(用显示公式)
2. 表格法(用函数值列表)
3. 图示法(用函数图形)
4. 描述法(用语言描述)