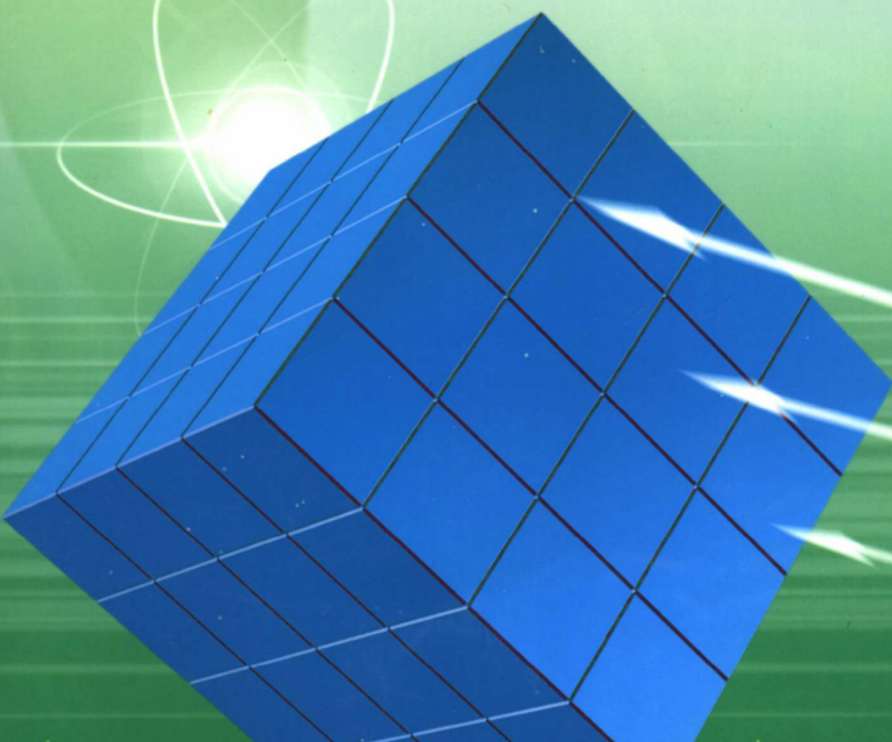
主审 李胜宏

高中数学竞赛实战演练

高二分册

主　编 马茂年
副主编 沈虎跃 蔡小雄 虞金龙



浙江大学出版社

高中学科竞赛实战演练丛书

高中数学竞赛实战演练（高一分册）
高中数学竞赛实战演练（高二分册）
高中数学竞赛实战演练（综合分册）
高中化学竞赛实战演练（高一分册）
高中化学竞赛实战演练（高二分册）
高中物理竞赛实战演练（高一分册）
高中物理竞赛实战演练（高二分册）

ISBN 7-308-04127-1
9 787308 041270 >

ISBN 7-308-04127-1/G · 828
定价：17.00 元

高中数学竞赛实战演练

（高二分册）

主　审　李胜宏

主　编　马茂年

副主编　沈虎跃　蔡小雄　虞金龙

编　委　（按姓氏笔画为序）

丁国先　马茂年　王宏权　冯定应　冯　寅

李惟峰　李超儿　孙惠华　吕峰波　许康华

沈虎跃　严根林　余建新　吴国建　吴文广

吴光仓　季诚胜　郑日锋　郑佩勇　金荣生

金雪东　周建峰　崔继国　黄健康　斯理炯

蒋荣清　韩国梁　舒林军　虞金龙　蔡小雄

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛实战演练(高二分册)/马茂年主编.
杭州:浙江大学出版社,2005.3
ISBN 7-308-04127-1

Ⅰ.高... Ⅱ.马... Ⅲ.数学课-高中-习题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 016280 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 杨晓鸣 王同裕
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 14
字　　数 320 千字
版 印 次 2005 年 3 月第 1 版 2006 年 7 月第 3 次印刷
印　　数 15001–18000
书　　号 ISBN 7-308-04127-1/G·828
定　　价 17.00 元

前　言

学好数学，离不开科学的训练。数学习题有多种功能，通过演练，不仅可以巩固旧知识，发展新知识，还可以培养科学的思维方法和良好的思维习惯，以达到发展智力的目的。“高中数学竞赛实战演练”丛书给您提供了数学训练的机会。做题，要保持浓厚的兴趣，不必赶任务，时间充裕，多做一些，时间紧迫，少做几道，灵活取舍。做题切忌贪多，食而不化，基础要巩固，做完题后要总结，看看有哪些步骤可以省略，哪些地方可以改进，努力找出最佳的解法。经常这样琢磨，解题能力就会有很大的提高，能使你对数学的感觉更敏锐，理解更透彻，解题更得心应手。

“高中数学竞赛实战演练”丛书与各年级教材同步，融竞赛知识和高考于一体，充分体现新课标理念，注重直观，注重方法，注重能力。题型全面、充分，选择余地大，既是高考复习的辅助教材，又是竞赛训练的工具书。丛书内容充实，不论是知识结构还是解题方法都具有典型性、新颖性。在知识点的编排上，由浅入深，由易到难。起点低，终点高，通俗易懂，便于训练。

数学竞赛虽然有一定的难度，但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的，也许本丛书能为你摘取桂冠铺平道路。让我们共同努力，在数学的奇妙天地中体会数学，感受数学，创造数学。

“高中数学竞赛实战演练”丛书由全国数学奥林匹克竞赛总领队、浙江省数学奥林匹克普委会主任、浙江大学博士生导师李胜宏教授主审，杭州第十四中学特级教师、浙江师范大学数学教育硕士生导师、中国数学奥林匹克高级教练马茂年老师主编。参加本丛书编写的还有(按姓氏笔画为序)：丁国先(杭州高级中学)、王宏权(杭州第十四中学)、冯定应(学军中学)、冯寅(湖州中学)、李惟峰(杭州外国语学校)、李超儿(效实中学)、孙惠华(杭州第二中学)、吕峰波(嘉兴一中)、许康华(富阳二中)、沈虎跃(镇海中学)、严根林(金华一中)、余建新(衢州二中)、吴国建(东阳中学)、吴文广(永康一中)、吴光仓(江山中学)、季诚胜(义乌中学)、郑日锋(学军中学)、郑佩勇(丽水中学)、金荣生(温州中学)、金雪东(衢州一中)、周建峰(浙师大附中)、崔继国(萧山中学)、黄健康(余姚中学)、斯理炯(诸暨中学)、蒋荣清(黄岩中学)、韩国梁(桐庐中学)、舒林军(兰溪一中)、虞金龙(绍兴一中)、蔡小雄(杭州第二中学)。丛书由一线的辅导教练参与编写，他们成熟的奥林匹克培训思想、能力和方法，充分体现在丛书的每道试题之中。

尽管我们在成书过程中,本着近乎苛刻的态度,题题推敲,层层把关,力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华,但丛书中也难免有疏忽和纰漏之处。检验本丛书质量的唯一标准是广大师生使用本丛书的实践。作为教研领域的最新成果,我们期盼它的社会效益,也诚挚地希望广大师生的批评指正。

目　　录

第一章　不等式

第二章　直线和圆

第三章　圆锥曲线

第四章　直线、平面、简单几何体

第五章　排列组合和概率统计

第六章　数学归纳法与极限

第七章　导数与复数

第八章　综合训练

第一章　不等式

测试1　不等式的性质及解法

一、选择题(本大题共6小题,每小题6分,共36分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求)

1. 已知$0<a<b$,$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$,$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$,则x,y的大小关系为　(　　)

A. $x>y$　　B. $x<y$　　C. $x\geqslant y$　　D. $x\leqslant y$

2. 若a是不等于1的正数,则关于x的不等式组$\begin{cases}\log_a 2x<2\log_a x\\(a-1)x<a^2-1\end{cases}$的解集为　(　　)

A. $(2,a+1)$　　B. $(a+1,2)$　　C. $(1,2)$　　D. 以上都不对

3. 设$A=\{x|1<x<3\}$,B是关于x的不等式组$\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0\\x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$的解集,则使得$A\subsetneqq B$恒成立时的$a$,$b$取值范围为　(　　)

A. $a\leqslant -3$且$b\geqslant 3$　　B. $b\leqslant -3$且$a\geqslant 3$

C. $a\leqslant 3$且$b\geqslant 3$　　D. $a\leqslant -3$且$b\geqslant -3$

4. 若$0<x<\frac{1}{2}$是不等式$x^2-\log_a x<0$成立的必要而非充分条件,则a的取值范围是　(　　)

A. $(0,\frac{1}{16})$　　B. $(0,\frac{1}{16}]$　　C. $(\frac{1}{16},1)$　　D. $[\frac{1}{16},1)$

5. 设$x=\arcsin(\cos 1)$,$y=\arccos(\sin 2)$,$z=\arctan(\cot 3)$,$u=\operatorname{arccot}(\tan 4)$,则$x$,$y$,$z$,$u$从小至大按顺序排列应为　(　　)

A. $x<y<z<u$　　B. $z<y<x<u$　　C. $x<y<u<z$　　D. $u<x<z<y$

6. 设a,b,c依次是方程$\log_{\frac{1}{2}}x+2=x$,$\log_2(x+2)=\sqrt{-x}$,$2^x+x-2=0$的根,则a,b,c的大小关系是　(　　)

A. $b<c<a$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

二、填空题(本大题共6小题,每小题9分,共54分,把答案填在题中的横线上)

7. 若不等式$\sqrt{3x-k}>\sqrt{x-4}$的解集为$\{x|x\geqslant 4\}$,则整数k的最大值为________.

8. 不等式$\sqrt{1-x^2}\geqslant x+t$的解集是$\varnothing$,实数$t$的取值范围是________________.

9. 不等式$\arcsin|x|>\arccos|x|$的解集是________.

10. 不等式$\frac{8}{(x-1)^3}+\frac{10}{x-1}<x^3+5x<6$的解是________.

11. 已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$,a,b,$c\in\mathbf{R}$,满足:(1)$f(-1)=0$;(2)对于任意$x\in\mathbf{R}$,$x\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2+1}{2}$,那么$a^2+b^2+c^2=$________.

12. 长方形的一边长为1,设它被两条互相垂直的直线分成四个小长方形,其中三个小长方形的面积不小于1,第四个小长方形的面积不小于2,则长方形的另一边至少要多长________.

三、解答题(本大题共 3 小题,每小题 20 分,共 60 分,解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤)

13. 试求对任意 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $-9<\dfrac{3x^2+px+6}{x^2-x+1}\leqslant 6$ 恒成立的实数 p 的值.

14. 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{(x-1)^2+1}{1+2ax}$,

(1)求 $f(x)$的定义域;

(2)求使 $f(x)>0$ 的所有 x 的值.

15. 关于 x 的不等式 $a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$ 的解集是全体实数,求实数 a 的取值范围.

测试 2　不等式的证明方法与技巧

一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 6 分,共 36 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求)

1. 对任意实数 $x,y,S=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4$ 的最小值为 (　　)

A. 4　　B. 1　　C. 0　　D. -1

2. 已知 $x+y+z=1$,则 $2x^2+3y^2+z^2$ 的最小值是 (　　)

A. 1　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{6}{11}$　　D. $\frac{5}{8}$

3. 已知正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$,则 $\sqrt{8a+1}+\sqrt{8b+1}+\sqrt{8c+1}$ 的最大值为 (　　)

A. 9　　B. $3\sqrt{3}$　　C. 16　　D. $4\sqrt{3}$

4. 设 a,b,c 为实数,$4a-4b+c>0$,$a+2b+c<0$,则下列四个结论中正确的是 (　　)

A. $b^2\leqslant ac$　　B. $b^2>ac$　　C. $b^2>ac$ 且 $a>0$　　D. $b^2<ac$ 且 $a<0$

5. 在△ABC 中,各边 a,b,c 的对角分别为 A,B,C,R 为外接圆半径,记 $N=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2B}+\frac{1}{\sin^2C}\right)$,则有 (　　)

A. $N\geqslant 36R^2$　　B. $N\leqslant 36R^2$　　C. $N\geqslant 36R$　　D. $N\leqslant 36R$

6. 设 x,y 是不相等的正数,m,n 是正整数,且 $m<n$,设 $a=\sqrt[m]{x^m+y^m}$,$b=\sqrt[n]{x^n+y^n}$,则 a 与 b 的大小关系为 (　　)

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a=b$　　D. 大小不能确定

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 9 分,共 54 分,把答案填在题中的横线上)

7. 若 $0<a,b,c<1$,并且 $a+b+c=2$,则 $a^2+b^2+c^2$ 的取值范围是________.

8. 已知 $x-y=1(x>1)$,则 $u(x,y)=\frac{1}{y^3}+x+1$ 的最小值是________.

9. 设函数 $f(x)=\log_a(x+1)(a>0,a\neq1)$,当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>0$,则对于任意的实数 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$,$\frac{1}{2}[f(x_1-1)+f(x_2-1)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2-2}{2}\right)$ 的大小关系为________.

10. 设 $x_i\in\mathbf{N}^*(i=1,2,3,4,5)$,且 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$,则 x_5 最大值是________.

11. $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1x_2+x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$(其中 x_1,x_2,x_3 不全为 0)的最大值为________.

12. 设函数 $y=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}x^2-\sqrt{2}kx-5k+3\right)$ 的定义域是实数 $\mathbf{R}$,则 k 的取值范围为________.

三、解答题(本大题3小题,每小题20分,共60分,解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤)

13. 设$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$,求证:$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

14. 设$a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,求证:

(1)$a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$;

(2)$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}$.

15. (1)设$0<x<\frac{1}{3}$,求函数$y=x^2(1-3x)$的最大值;

(2)设$x\in[3,5]$,求函数$y=\frac{3x^2-2x-21}{x^2-1}$的值域.

测试 3　平均值不等式与柯西不等式

一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 6 分,共 36 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求)

1. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $x+3y+4z=6$,则 $x^2\cdot y^3\cdot z$ 的最大值是　　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

2. 已知实数 a,b,c,d 满足 $a+b+c+d=3$,$a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$,则 a 的最小值与最大值的和是　　(　　)

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $\sqrt[3]{2}+1$　　C. $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$　　D. 3

3. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$,则 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}$ 的最小值是　　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

4. 若 $a>0,b>0$,则下列不等式成立的是　　(　　)

A. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

C. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant a+b$　　D. $\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\geqslant a^2+b^2$

5. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $x+y+z=1$,则 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 的最大值是　　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,且 $abc=1$,则 $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$ 的最小值为　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 9 分,共 54 分,把答案填在题中的横线上)

7. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $x^2+y^2+z^2=1$,则 $\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ 的最小值是________.

8. 函数 $f(x)=\sin^3x\cdot\sin 3x$ 的最大值是________.

9. 设 a,b,c 为正数,且 $a+b+c=1$,则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2$ 的最小值是________.

10. 设 x_1,x_2,x_3 均大于 0,且 $x_1+x_2+x_3=1$,则 $x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ 的最大值为________.

11. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,则 $\frac{(a+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{a}$ 的最小值为________.

12. 已知 $a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0$,且 $a+b+c\leqslant3$,若有 $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$,则 $x=$________.

三、**解答题**(本大题共 3 小题,每小题 20 分,共 60 分,解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤)

13. 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,且满足$\dfrac{kabc}{a+b+c}\leqslant(a+b)^{2}+(a+b+4c)^{2}$,求 k 的最大值.

14. 已知 a,b,c 为任意正数,且 $0\leqslant\lambda<\min\left\{\dfrac{b+c}{a},\dfrac{c+a}{b},\dfrac{a+b}{c}\right\}$,求证:$\dfrac{a}{b+c-\lambda a}+\dfrac{b}{c+a-\lambda b}+\dfrac{c}{a+b-\lambda c}\geqslant\dfrac{3}{2-\lambda}$.

15. (1)设三个正数 a,b,c 满足不等式$(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}>2(a^{4}+b^{4}+c^{4})$,求证:$a,b,c$ 一定是某个三角形的三条边长;

(2)设 n 个正数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$ 满足$(a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{n}^{2})^{2}>(n-1)(a_{1}^{4}+a_{2}^{4}+\cdots+a_{n}^{4})$ $(n\geqslant3)$,求证:这些数中的任何三个一定是某个三角形的三条边之长.

测试4　排序不等式和琴生不等式

一、选择题(本大题共6小题,每小题6分,共36分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求)

1. 设 $a,b,c\geqslant 0$,且 $a^2+b^2+c^2=3$,则 $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}$ 的最大值是　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

2. 已知△ABC 的三个内角为 A,B,C,则 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值为　(　　)

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 设 a,b,c 为任意正数,则 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值为　(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 3　　D. 2

4. 设 a,b,k 都是正实数,且 $a+b=1$,则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^k+\left(b+\frac{1}{b}\right)^k$ 的最小值为　(　　)

A. $\left(\frac{5}{2}\right)^k$　　B. $\frac{5^k}{2^{k-1}}$　　C. $\frac{5^{k-1}}{2^k}$　　D. 以上答案均不对

5. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列,则 $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$　(　　)

A. $\geqslant n$　　B. $\leqslant n$　　C. $\geqslant\sqrt[n]{n}$　　D. $\leqslant\sqrt[n]{n}$

6. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,则 $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}$ 的最小值是　(　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. n^2

二、填空题(本大题共6小题,每小题9分,共54分,把答案填在题中的横线上)

7. 设 x,y,z 为任意正实数,且 $xy+yz+zx=a^2$,则 xyz 的最大值是__________.

8. 若 $a+2b=12$,则 2^a+2^{b+1} 的最小值为________.

9. 设 α,β,γ 是钝角三角形,则 $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$________$\frac{27}{\pi^2}$(填 $\geqslant,=,\leqslant$).

10. 半径为 r 的圆内接 n 边形其面积的最大值是________.

11. 给定正数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是它的一个排列,则________使得乘积 $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$ 取最大值.

12. 方程组 $\begin{cases}x^3+y^3+z^3=x+y+z,\\ x^2+y^2+z^2=xyz\end{cases}$ 的所有正实数解为__________.

三、**解答题**(本大题共 3 小题,每小题 20 分,共 60 分,解答须写出文字说明、证明过程或演算步骤)

13. 设 a,b,c 为正实数,求证:$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$.

14. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正实数,求证:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}\leqslant\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}.$$

15. (1)设 a,b,c 为正实数,且 $abc=1$,求证:$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$;

(2)设 x,y,z 是正实数,且 $xyz=1$,求证:$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}$.

测试 5　不等式的综合应用

一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 6 分,共 36 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求)

1. 已知 x,y 都在区间$(-2,2)$内,且 $xy=-1$,则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$的最小值是　(　　)

A. $\frac{8}{5}$　　$\frac{24}{11}$　　C. $\frac{12}{7}$　　D. $\frac{12}{5}$

2. 若 $a+b+c=1,a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$的最小值为　(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 若函数 $y=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$定义域的集合为 A,关于 x 的不等式 $\lg(2ax)<\lg(a+x)(a\in\mathbf{R}^+)$的解集为 B,则使 $A\cap B=A$ 的实数a 的取值范围是　(　　)

A. $(0,2)$　　B. $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{2}{3},2\right)$

4. 若 $f(x)=ax+b$ 对所有 $x\in[0,2\pi]$都满足不等式 $f^2(x)+\cos x\cdot f(x)<\frac{1}{4}\sin^2x$,则　(　　)

A. a,b 均为正数　B. a,b 异号　C. a,b 均为负数　D. a,b 不存在

5. 给定正数 p,q,a,b,c,其中 $p\neq q$.若 p,a,q 成等比数列,p,b,c,q 成等差数列,则一元二次方程 $bx^2-2ax+c=0$　(　　)

A. 无实根　　B. 有两个相等的实根

C. 有两个同号相异的实根　　D. 有两个异号的实根

6. 设 $F(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数,且对任意的 $x\in[0,1]$,不等式 $F(2kx-x^2)<F(k-4)$,$F(x^2-kx)<F(k-3)$均成立,则 k 的取值范围是　(　　)

A. $(-3,4)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(-3,2)$　　D. $(2,4)$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 9 分,共 54 分,把答案填在题中的横线上)

7. 若方程 $x^2-mx+4=0$ 在$[-1,1]$上有解,则参数 m 的取值范围是________.

8. 有四个变量 x,y,z,t 满足不等式 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant t\leqslant 100$,则$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$的最小值为________.

9. 设 $\theta\in\mathbf{R},0<\varphi<2\pi$,若关于 x 的不等式$x^2\cos\theta+2\sin\varphi(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta>0$ 的解集为区间$(1,10)$,则 φ 的值是________.

10. 已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$,且$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=1$,则函数 $u=x^2y^3$ 的最小值为________.

11. 已知 α,β,γ 均为锐角,且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,则 $\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma$ 的最大值等于________.

12. 正$\triangle ABC$ 的边长为 2,P,Q 分别为AB,AC 上的动点,且线段 PQ 将$\triangle ABC$ 的面积二等份,则线段 PQ 长的取值范围为________.