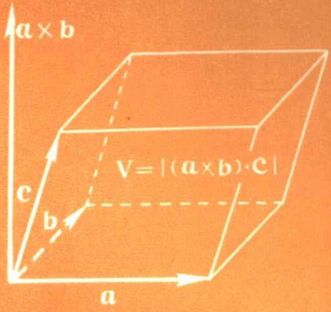
数学进修用书



赵伟祥

向量代数

XIANGLIANGDAISHU

浙江人民出版社

数学进修用书

向量代数

赵伟祥

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书主要研究常向量间的代数运算，系统地介绍了向量的基本概念和它们间的运算及性质。是我们进一步学习高等数学、力学和工程技术的基础。为了便于自学，例题大多是与初等数学有关的一些典型题。这些例题也有助于读者用向量观点来处理初等数学，尤其是解析几何，可用于中学教学参考。

数学进修用书

向量代数

赵伟

*

浙江[redacted]出版

（杭州武林路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥塊）

浙江省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32 印张5 字数 111,000

1980年3月第一版

1980年3月第一次印刷

印数：1—6,500

统一书号：7103·1093

定价：0.42元

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的．随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加．在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务．当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切．出版本丛书目的就是为他们进修提供一点比较系统的材料．编写时照顾教师队伍的实际情况，内容比部编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程基础更加扎实．同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学．丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学．

写在前面

在学习初等数学时，我们对于用字母表示数，并按照实数的运算法则进行数和字母间的运算的代数方法，已很熟悉了.

代数方法几乎贯穿在全部的数学中. 在解决任何数学问题时，通常有一部份是一些不同复杂程度的代数计算. 但值得注意的是，随着数学的发展，运算中所出现的字母已不一定表示数，而可以是任何其它对象，因此，在这种情况下，字母的运算法则便可能不同于初等的代数. 例如本书研究的对象——向量，它的运算，按其形式来说同普通代数运算有相似之处，而其法则部份地与数的运算法则相同，但主要的部份却是不同的.

向量理论在研究解析几何、微分几何、力学、物理和工程技术等方面有很大的价值. 本书则以其中的基础部份——向量代数，即研究常向量间的代数运算（加法、乘法）的理论为主要内容，并在此基础上对变向量理论的初步知识作一简单介绍.

全书共五章. 在前三章中，系统地叙述向量的基本概念，它们间的运算以及性质，并引进向量的坐标概念，使向量运算通过其坐标转化为实数运算，从而构成向量代数的基本理论——用代数方法来研究和发展有向线段的理论.

在第四章中，着重介绍向量代数在空间解析几何以及坐标变换中的应用.

在第五章中，主要介绍变向量——作为数性变量的向量函数的微积分初步.

为便于读者自学，在例题上，着重选择与初等数学有关的一些典型问题. 未学习过微积分的读者，第五章可暂不阅读.

目　　录

第一章　向量及它的两个基本运算

本章介绍本书所研究的对象——向量的概念，以及向量加法与数乘向量两个基本运算.

通过本章有关向量的基本理论的建立，以及实例的讨论，我们可以看到，向量既具有明显的物理意义和几何意义，其运算又具有典型的代数性质. 所以，它在沟通代数和几何方面，提供了一个有力的工具.

§1　向量概念

1. **向量**　一般用来量度物质的属性和描述其运动状态时所用的各种量值，可分两类. 其中一类，例如长度、重量、面积、体积、密度等等，它们在规定的单位下，都可以用一个非负实数来表示. 这类只有大小的量叫做**数量**（或**纯量**）.

另一类，它们的特征不能单纯地用一个数来表示. 例如大家所熟知的力、速度、位移、加速度、力矩等等，它们不仅有大小，而且有方向. 如速度不仅有快慢之分，也有方向的不同；同样，力有大小的不同，又有作用方向的区分等等. 这类既有数量特性，又有方向特性的量叫做**向量**（或**矢量**）. 常用画有箭头的线段来表示向量：箭头的指向代表向量的方向，线段的长度则按选定的比例尺画出，代表向量的大小.

定义　向量是既有大小（用一个非负实数表示）又有方向的量.

向量的几何表示是一个规定了起点和终点的线段——**有向线段**．有向线段的方向（由起点指向终点）叫做**向量的方向**；有向线段的长度叫做**向量的模**（也叫长度）．

例如，规定线段 AB 的端点 A 为起点，B 为终点，此时所得到的有向线段 AB，即表示向量，记作 $\overrightarrow{AB}$（图1）．向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$，A、B 依次叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点．如果在讨论向量的性质时，不需指出其起、终点，那么可用一黑体字母，例如用 **a**① 来表示．向量 **a** 的模记作 |**a**|．

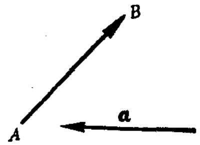


图 1

2．向量的相等

定义　两个方向相同，模相等的向量叫做相等向量

在上述规定下，如果两个向量通过平行移动后，能使它们重合，那么，这两个向量是相等的．如果向量 **a** 和 **b** 是相等向量，则记作 **a**＝**b**．

根据向量相等的定义，任何一个向量 **a** 经过平行移动后，仍为一个与原向量相等的向量．这样，相等的向量便可看成为同一个向量经平移得到．如图2所示，向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$…是由向量 **a** 经平移，将其起点放置在 A_1、A_2、A_3…时所得．换句话说，向量 **a** 可以看作为其起点可以任意选取的向量．我们把这种向量叫做**自由向量**．以后文中所提及的向量，除作特殊说明外，皆指自由向量．

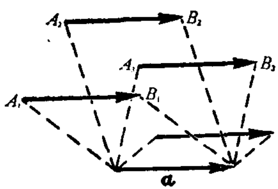


图 2

①注：本书统一用正黑体字母，书写时可用 $\vec{a}$ 表示．

3. **零向量·单位向量·逆向量.**

起点和终点重合的向量叫做**零向量**,记作0①. 它的模为0而方向不定. 并规定:**一切零向量都相等.**

任何模为1的向量叫做**单位向量**. 两个单位向量仅在方向一致时相等. 由此可知,单位向量的特征就是方向. 一个单位向量确定一个方向;一个方向也确定一个单位向量. 这就是说,方向与单位向量间是一一对应的. 因此,可用不同的单位向量来表示不同的方向.

两个模相等而方向互为相反的向量,叫做**互为逆向量**. 向量$\mathbf{a}$的逆向量记作$-\mathbf{a}$;向量$\overrightarrow{AB}$的逆向量就是$\overrightarrow{BA}$,即$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 可见,求一个向量的逆向量,仅需将其起、终点的位置对调即得. 在物理学中,由牛顿第三运动定律所指出的两个物体间的作用力与反作用力,就是两个互为逆向量的最明显的例子.

4. **共线向量·共面向量** 如果将一组向量的起点放置在同一点时,它们都落在同一条直线上(图3),换句话说,若一组向量都平行于同一条直线,则这组向量叫做**共线向量**;

如果将一组向量的起点放置在同一点时,它们都落在同一个平面上(图4). 换句话说,若一组向量都平行于同一个平

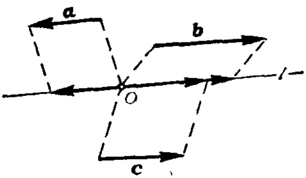


图3

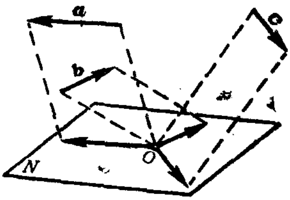


图4

①注:书写时用$\vec{0}$表示.在不会与数0混淆的情况下,为方便起见,也可用0表示零向量.

面，则这组向量叫做共面向量.

我们把方向相同或相反的向量叫做平行向量. 若a和b为平行向量，则记作 a // b. 显然，平行向量是共线的，而且也是共面的.

两个不共线的向量决不是平行向量，但一定是共面的. 事实上，将两个不共线的向量 a 和 b 的起点放置于同一点O后，它们必分别在两条相交于O点的直线 l 和 m上，因而必在由直线 l 和 m所确定的平面N上（图 5）.

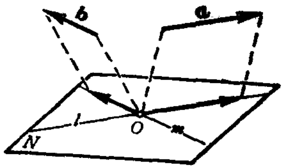
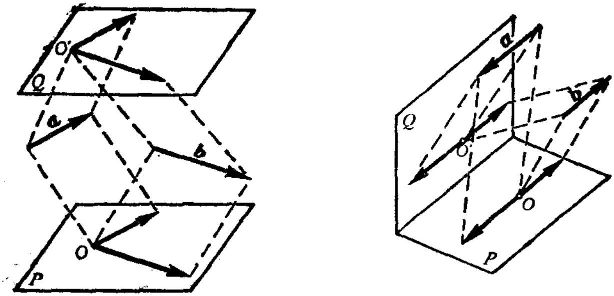


图 5

这里要指出一点，若两向量不共线，则和它们同时平行的一切平面互相平行；若两向量共线，则和它们平行的平面彼此不一定平行（图6）.



(a) a 和 b 不互相平行　　(b) a 和 b 互相平行

图 6

对于零向量，我们总可以把它看成为与任何向量平行. 换句话说，零向量与任何向量共线.

§ 2 向量加法

1. 两向量的和 在物理学中求作用于一个质点的两个力 **a** 与 **b** 的合力，通常的方法是所谓平行四边形法则：以 O 点为起点作出力向量 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ 与 $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，以它们为邻边作一个平行四边形 $OACB$，那么对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是合力.

但是，也可以按所谓三角形法则：以 O 点为起点作出力向量 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，以 A 为起点作出力向量 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$，以它们为两边作一个三角形 OAC，那么第三边向量 $\overrightarrow{OC}$ 就是合力.

上述两种作法是不同的，平行四边形法则是从同一个起点作出两个力向量；三角形法则是接连地作出两个力向量，但结果是一样的. 其它如求合速度、合位移等等，也是如此. 可见，向量相加与数量相加所遵循的规律是不相同的. 我们将求合力、合速度、合位移等的平行四边形法则抽象出来，定义一般向量的加法如下：

定义 **设已知向量 a 和 b，以任意给定的一点 O 为起点，作 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$、再以 OA、OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，那么，对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$，就叫做 a 与 b 的和（或和向量）. 记作 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$. 由 a 和 b 求 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 的运算叫做向量加法.** 这种求两向量和的作图法，叫做**平行四边形法则**（图 7）.

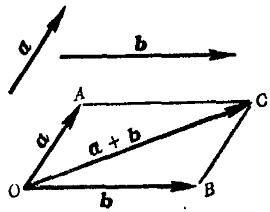


图 7

由上述作图法可知，两个不共线的向量的和向量与这两个向量不共线，但它们是共面的. 当两个向量为共线向量时，它们的和向量与这两向量共线.

求向量和还有另一种方法：如果以任意给定的一个点O为起点，作向量$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，再以 a 的终点 A 为起点，作向量 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$，则向量$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ 就是 a 和 b 的和向量．即 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$．这种作图法叫做**三角形法则**（图 8）．显然，以上两个法则所作出的和向量是相同的．

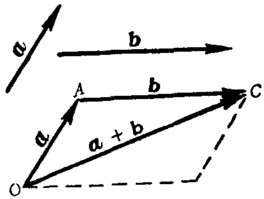


图 8

【问题1·1】证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形．

证 设四边形$ABCD$，$AO=OC$，$BO=OD$(图 9)．由$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，

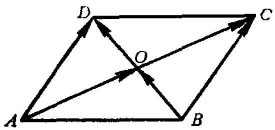


图 9

所以 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$，

即 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$．

由此可知$AD \perp\!\!\!= BC$．故$ABCD$是一平行四边形．

2.运算性质 对于任意向量**a**，我们有

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0};$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

向量加法还具有下面的运算性质：

定理1·1 向量加法满足交换律和结合律． 即

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a};$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

利用三角形法则作图，上述定理即可得到验证．如图10和图11所示．

这就是说，向量求和与向量的先后顺序以及结合方式无关．

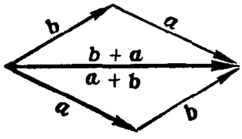


图10

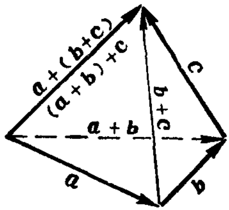


图11

根据求两向量和的三角形法则及定理1.1，n 个向量相加，可以将它们按任何一个顺序，并取前一个向量的终点作为后一个向量的起点连成一条折线．那么，以第一个向量的起点作起点，以最后第 n 个向量的终点为终点的向量，即用以封闭住这条折线的向量，就是它们的和（图12），特别地，当 n 个向量所组成的折线恰好是封闭折线（图13）．那么，它们的和就是零向量．

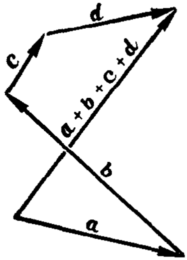


图12

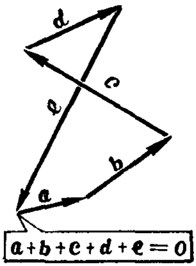


图13

对于空间中三个不共面的向量相加时，我们有下述定理：

定理1·2（平形六面体法则）设 a、b、c 为三个不共面的向量，在以它们为棱所构成的平行六面体中，那个以它们的公共起点为起点的对角线向量 S，就是它们的和向量．即

$$S=a+b+c.$$

本定理的正确性，读者不难从图14所示各向量间的关系中看出，在这里就不再详述了.

【问题1.2】 证明：三个不共线的向量 a、b 和 c 构成一个三角形的充要条件是

$$a+b+c=0. \qquad (*)$$

证 若 a、b、c 构成一个三角形，那么折线 a+b+c 是封闭的，所以(*)式成立；反之．若(*)式成立，那么 a+b+c 是个封闭折线．因a、b 和 c 为不共线的向量，所以，构成的封闭折线必为三角形.

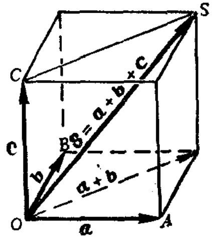


图14

【问题1·3】 设 $ABCDE$ 是一正五边形，O是其中心. 证明：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=0.$$

证 在平面上任取一点 P_1 为起点，顺次作 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{P_3P_4}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{P_4P_5}=\overrightarrow{OD}$ 和 $\overrightarrow{P_5P}=\overrightarrow{OE}$ 得一折线$P_1P_2P_3P_4P_5P$（图15），现证P与P_1必重合.

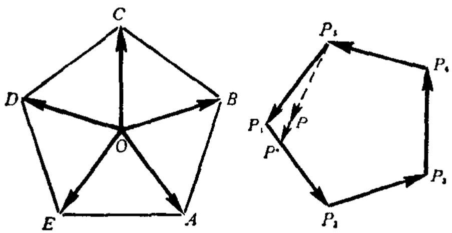


图15

由题设知，$OA=OB=OC=OD=OE=r$（r 为正五边形外接圆半径），且$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA=\frac{2\pi}{5}$. 而由作图可知 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$、$|\overrightarrow{P_2P_3}|$、$|\overrightarrow{P_3P_4}|$、$|\overrightarrow{P_4P_5}|$、$|\overrightarrow{P_5P}|$