



数学精品库

SHUXUE JINGPIN KU

决策致胜思维训练

JUECE ZHISHENG SIWEI XUNLIAN



郑应文

民主与建设出版社

数 学 精 品 库

决策致胜 思维训练

郑应文 著

福建省自然科学基金资助项目

图书在版编目(CIP)数据

决策致胜思维训练/郑应文著

—北京:民主与建设出版社,1996.11

(数学精品库)

ISBN 7-80112-065-5

I. 决…

II. 郑…

III. 数学课—中学—课外读物

IV. G634.604

责任编辑:闵杰

民主与建设出版社出版发行

(社址:北京朝外大街吉祥里208号 邮编:100020)

北京佳顺印刷厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张:3.875

2001年1月第3次印刷

字数:83千字 印数:13001—23000 定价:6.00元

《初等数学精品库》编委会

主编 王志雄

编委 (按姓氏笔画为序)

吴碧英 余文竑 汪启泰 林 常

郑应文 高鸿桢 詹方玮

作者介绍

郑应文,1969年北京大学数学专业毕业,1981年厦门大学控制理论研究生毕业,获硕士学位,1989年至1990年在法国计算机与自动化研究院任客座研究员,现为福州大学自动化研究所副研究员,并担任福建省系统工程学会常务理事、副秘书长,福建省自动化学会理事、副秘书长。

近年来参加过3项国家自然科学基金项目,主持过多项省级科研项目,其成果曾收入科学出版社编辑的《中国八五科学技术成果选》,编写出版了《管理运筹学》硕士教材,在国内发表过30多篇学术论文,曾获得福建省自然科学优秀论文奖。

前 言

数学的发展,一方面由于自身的魅力,它能够激发起人们思维中最神奇最奇妙的艺术构思能力,引起人们的兴趣;一方面由于在社会、经济、生活等方面的广泛应用,它的思想方法已经渗透到社会经济生活的各个领域中去,可以说,目前世界上的任何一门科学与技术的发展都无法离开数学。

对策论的产生和发展就是这样。千百年以来,从民间到王室,各个民族都创造出无数种引人入胜的对抗性的智力游戏。正是对这些游戏的研究,促进了对策论这一学科的建立,而对策论的真正发展,却是与军事、经济、政治的实际活动联系在一起的。近年来,对策论引起了各国的普遍重视,得到了巨大发展,其源盖出于此。

本书正是从游戏与应用这两方面,向读者介绍对策论的基本内容与方法,融趣味性、知识性、科学性为一体。读者在阅读中可以充分开动脑筋,享受着种种对奕游戏的乐趣,并从中体会到对策论的实质。

本书分为四章,第一章简要地介绍了对策论的发展历史,它的基本内容和研究方法。第二章以各种趣味博弈游戏为例,介绍了完全信息有限对策的基本理论,并讨论了各类具体对策问题的种种巧妙解法。第三章介绍了以支付矩阵来研究各类对策问题,包括二人零和的纯策略和混合策略问题,二人非零和对策等问题。第四章简单介绍了对策论在实际应用中

的两个新专题——诱导对策与追躲对策。

作为一本对策论的入门书,本书的特点是举出大量的例子,包括游戏的例子,也包括在社会经济军事上的应用。解决这些问题,需要有数学修养和灵活的技巧,但不必用到高深的数学知识。通过这些例子的分析与学习,可以掌握对策论的主要理论问题和基本方法,并为进一步研究打下基础。

本书内容的完成得到吾师李文清先生的指导,并得到师兄王志雄教授的帮助,本书在写作中得到福建省自然科学基金的支持,本书的出版得到民主与建设出版社的支持,这里一并致谢。

目 录

前言	(1)
第一章 从博弈到科学	(1)
第二章 寻求必胜的策略	(10)
第一节 夺取战略要点	(10)
第二节 百战不殆的理论依据	(26)
第三节 形形色色的取胜方法	(38)
第三章 二人矩阵对策	(58)
第一节 对策的规范形	(58)
第二节 以不变应万变	(67)
第三节 混合策略及其求法	(73)
第四节 矩阵非零和对策	(91)
第四章 两个新的应用专题	(105)
第一节 诱导对策	(105)
第二节 追躲对策	(110)

第一章 从博奕到科学

象棋、围棋、军棋、扑克……各种各样的棋牌游戏吸引着世界上的千百万人人为之折腰陶醉。相传晋朝人王质入山伐木，见二老者在下棋，就在一旁观看，待他观完棋下山时，世上已过了几千年，所携的斧柄都已腐烂。这自然是个传说，但各种棋类游戏无论在国内国外，在古代现代，在各种民族，各种阶层，各种年龄的人群中，都能使无数人入迷倾倒，却是不可否认的事实。

为什么棋类游戏会有那么大的魅力？它用简单的规则形式，表现出丰富的艺术性和哲理性，特别是它具有严谨的数学逻辑思想，使对奕者能够以此来充分展示自己的才华与智慧，更重要的是，下棋中的谋略思想，在现实生活的许多方面都有所体现。“纹枰对坐，从容谈兵”，象棋、围棋的产生与发展就是和战争联系在一起的，象棋中车、马、兵等子力的攻杀防御，反映了古代战争的模式，而军棋中棋子的配置，简直就是现代军队的编制结构。“棋经十三篇”与“兵法十三篇”有许多内容乃至语句都是相似的。许多将军和军事家都擅长或喜爱下棋，如古代的曹操、谢安、李世民等等。我军的许多高级指挥员如朱德、彭德怀、陈毅等元帅都喜爱下棋，并往往能用棋理来作为战争指挥的说明，如彭老总说过：“下棋有如作战，双方都在想办法争取优势，消灭对方的有生力量，集中优势兵力有利时

机，各个击破敌人。”抗日战争时期周恩来同志在重庆与棋王谢侠逊谈论到象棋与抗战时，曾经说过：明朝人长于用炮，清朝人善于用马，今人奕棋，应重于用兵卒。这体现出“兵民是胜利之本”的宏伟思想，被棋王赞为“深得奕棋之真谛”。毛泽东主席在其军事著作中，多次用下棋来形象地说明战争的思想，譬如他用“做眼”来比喻建立革命根据地的重要；在指挥平津战役中，他用“隔而不围”、“围而不打”的高级围棋手段来阐述决战的战略方针，表现出他对围棋的深厚造诣，更表现出他对战争的高超指挥艺术。

实际上，下棋的韬略不仅仅可以用在军事战争中，“商场如战场”，在经济、贸易上也有着极为广泛的应用。在政治、外交、协商谈判等社会活动，各种体育竞技等等，总之，在两人或更多的人，两个集团或更多集团之间，共同参与完成一项互相配合又互相对抗的活动时，都要用到这种“下棋思想”。人们把它总结起来，加以理论化系统化，发展成为一门专门科学，称为“博弈论”，或者更一般地称作为“对策论”。

例 1.1 第二次世界大战期间，英国处在抗击德国法西斯的前沿，它所缺少的大量粮食和军需物品要美国从大西洋的彼岸运来。为了破坏这条海上给养线，德军派出一批潜水艇；封锁航线，袭击轮船，屡屡得手。美英盟军派飞机携深水炸弹，要炸毁德军的潜艇，但茫茫大海何处觅敌舰，一开始效果并不好，后来经过一些数学家的分析，从敌方的角度出发考虑问题，找出他们最可能潜伏的地点与路线，制定自己的最好对策，将打击敌方的命中率大大提高，基本上保护了这条海上运输线。

例 1.2 在某次世界乒乓球锦标赛中，已连续 3 届与男

子团体世界冠军无缘的中国队,抱着夺回斯韦思林杯的决心,一路顺利,最后进入决赛,决赛的对手正是前3届的世界冠军队。男子团体赛每方出3名选手,双方的第一主力、第二主力之间交叉比赛,共赛四盘,双方的第三主力之间进行一盘比赛,这五盘比赛中胜3盘或3盘以上者将夺得冠军。显然,第一、二主力要各赛两盘,看来比第三主力更重要。对方的乒乓球球队教练分析了两队的主力情况,他认为双方6个队员的强弱顺序各排为A,a,b,B,c,C,这里A,B,C表示他本队的3名队员,a,b,c表示中国的3名队员,排在前面的有可能战胜后面的。这样他看到,他如按正常顺序安排A、B打一、二主力,C打第三主力,面对中国的第一、二主力a、b,以及第三主力c,他除了A胜两盘以外,其余3盘都要输,所以他决定改变顺序,将C排在第二主力,B排在第三主力,这样,即使C两盘都输了,还能指望B战胜中国队的c而取得一分,加上A的两分,来争取全场比赛的胜利。可是等到上场时双方一公布名单,这位教练惊得目瞪口呆,原来中国队让a、c打一、二主力,将b放在第三主力位置上,于是a、c分别战胜C,而b战胜B,3员战将各取一分,中国队终于夺回了阔别6年之久的团体冠军奖杯。

其实,在比赛中用对策论思想排阵,牺牲局部以取得全局胜利的方法在我国早已有之,最典型的就是众所周知的“孙臆赛马”的故事。

例 1.3 战国时,齐王与大将田忌赛马,马分上中下三级,共赛3场,每场胜者可赢得千两黄金。田忌的谋士孙臆仔细观察了比赛情况,发现田忌的马,无论上中下级,都要比齐王的马略逊一筹,如果按上中下顺序与齐王比赛,3场都要失

败，但田忌的上马决不比齐王的中马差，田忌的中马也会比齐王的下马强。孙臏将田忌赛马的出场次序作了调整，以下马对付齐王的上马，以上马对付齐王的中马，以中马对付齐王的下马。这样，田忌虽然败了一场，却胜了两场，共赢得千两黄金。

下棋已有几千年的历史了，在军事、政治、经济、竞技各个领域使用对策论的方法也有过数不清的实例。但是，将对策论提炼成一门科学理论，用数学方法加以系统的研究，则是 20 世纪的事情。1912 年，德国数学家策墨洛用集合论的方法研究国际象棋，著有《关于集合论在象棋对策中的应用》一书，策墨洛证明了国际象棋的全局着法必存在以下 3 种结果中的一种：(1)不依赖黑方如何，白方总能取胜；(2)不依赖白方如何，黑方总能取胜；(3)有一方总能达到和局。他实际上说明了有限对策有解。1921 年法国数学家波雷尔讨论了几种对策现象，并引入了如“最优策略”等概念。到了 1928 年，美籍匈牙利数学家冯·诺意曼证明了对策论的基本定理——最小最大值定理，奠定了初等对策论的理论基础。但是这段时期所研究的对象，大都停留在下棋、扑克等游戏上，未引起社会上的广泛兴趣。到了第二次世界大战期间，残酷无情的战争，迫使交战双方的决策指挥者花费很大精力去解决在军事上、生产上、运输上所提出的形形色色的实际对策问题，促使许多数学家致力于对策论的应用研究。冯·诺意曼和摩根司坦总结了前人的研究成果，在 1944 年出版了《对策论和经济行为》(1947 年又出版了第 2 版)。这是系统阐述对策论的第一部专著，包括着丰富的思想和概念，对于对策论的发展与应用，产生了深远影响。军事家、政治家、经济学家纷纷投入大量人力财力进行对策论研究，一些数学家也认为对策论可以用在各个领域，解决

人类社会的一切冲突问题。

事物的发展总是曲折的,人们逐渐发现,由于世界各种事物的复杂性,对策论也并不是万能的。当人们研究重点转向多人对策时,发现经典的“解”的概念已不适合。1957年,卢斯与拉费写出了《对策和决策》一书,指出了对策论的局限性,1967年卢卡斯发现,十人对策不存在冯·诺意曼和摩根司坦意义下的解。看来,对策论的价值正面临一场考验。

实际上,正是这些深入研究为对策论的发展开创了新的天地,人们不再把对策论看作医治百病的万能灵药,而在具体实用领域中都不断取得瞩目的进展。在军事上,依萨克提出了“微分对策”理论,把最优控制与对策论相结合,来研究实际的对抗问题,引起人们的广泛注意,并得到了巨大发展。在经济上,诺贝尔经济学奖已经不止一次地授予进行对策研究的数学家,说明了对策论在经济发展,特别是在市场对策中已成为核心理论之一。在经营管理、社会交往、集团谈判等等问题上,掌握对策论已成为决策者的必备知识。在一些原来意想不到的领域,例如在研究影响生物繁殖模式的基础进化过程中,也有人提出一个对策论模型的理论结构。目前人们认识到,对策论的具体模型和现成公式,不可能是解决所有社会关系问题的万能钥匙,但是对策论所阐述的深刻思想和丰富方法,对于处理解决许多实际对抗问题是大有裨益的。学一点对策论,掌握它的精华,可以帮助人们妥善处理各种关系,找出最优策略,在复杂的社会竞争中取得成功。

“下棋是智慧的体操。”现在国内国外,都有一些学校把围棋、国际象棋等列入学校学生的必修课或选修课。下棋和数学是密切相关的,对策论是从下棋游戏产生的一门数学理论,它

更是智慧的高级体操。研究一些对策论提出的趣味问题,需要广泛地应用许多知识特别是数学知识,而且更要有灵活的思维方式。“看脑子还灵不灵,打几盘桥牌就清楚了。”这是名人的经验之谈,说明了对策与对策论对于锻炼人们思维能力的特殊作用。

我们再举几个最简单的对策游戏。

例 1.4 (抢 30)甲乙两人轮流报数字,甲先报,第一次可报 1 或 2,以后每次每人所报的数字都是在对方所报数字的基础上加上 1 或 2,不能不报,也不能报的数字比对方大 3 或 3 以上,谁能报到 30 这个数字者为胜。

这个游戏的规律很简单,后报者乙有必胜的方法,他只要每次报 3、6、9……这样 3 的倍数,就一定能够获得胜利。

这个游戏可以扩展到一般情况。

例 1.5 两人轮流报数,从 0 开始,每次可在原基础上加上从 1 到 a 之间的任意一个自然数,谁先报到自然数 N ,谁将获胜。

扩展后的抢 30 游戏,掌握它的规律也并不困难,这时未必是后报者必胜,也可能是先报者必胜。读者可自行分析一下。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

(图 1.1)

例 1.6 (填方格)甲乙两人轮流在一个 3×3 的方格中填上 1~9 这 9 个数字,填好后,甲计算上下两行 6 个数字的

和,乙计算左右两列 6 个数字的和,谁的数字大谁就获胜(图 1.1)。

解:先填方有必胜的方法。比如甲先填,我们看到只要填好后能够使得 $B+H>D+F$,甲就能获胜。甲第一次可在 B 格填上 9,这时如果乙将 2~8 中的数字填在某个空格中,甲第二次只要将 1 填在 D 格式 F 格(总有一个空的)上,甲就必胜了。所以乙第一次的最好填法是将 1 填在 H 格。第二次填时,如果甲在 D 格填上 2,乙就在 F 格填 8,甲无法取胜。但第二次甲可在 A 格填 8,乙只好将 2 填在 C 格(或 E、G、I 格),否则甲只要在第三次将 2 填在 D 或 F 格就能获胜。接下去,甲将 7 填在 E 格,乙将 3 填在 G 格,甲将 6 填在 I 格,剩下两个数字 5 和 4,只能填在 D 格与 F 格,甲获得胜利。

例 1.7 黑板上写着 1~100 这 100 个自然数,甲乙两人轮流将数字划去,每次每人划去 1 个,待最后剩下两个时,如果这两个数互质,甲胜;如果不互质,乙胜。

解:这个游戏甲乙双方谁后划谁将有必胜的方法。如甲后划,他可将这 100 个数字分成 50 组:(1,2),(3,4),…,(99,100),不论乙划去哪个数,甲就划去与之同组的那一个,这样划下去,最后剩下的两个数是同组的,必为相邻的两个自然数,当然是互质的了。

如果乙后划,他就只划去奇数,并将 3 与 9 这两个奇数尽量保留到最后。如果甲在前 48 次中划去 1 个或 1 个以上奇数,那么乙可将所有剩余的奇数都划去,剩下两个偶数自然不互质;如果甲 49 次都划去偶数,那么乙前 48 次可划去除了 3 与 9 外的全部奇数,第 49 次划去剩下的最后 1 个偶数,剩下的两个自然数为 3 和 9,不互质,所以不管怎样,乙后划也都

可以取胜。

从上面几个例子可以看出,对策的基本结构是:

1. 参与对策的人或集团,比如象棋比赛中的棋手,战争中双方的指挥者,经济竞争中的决策者等等,我们称为局中人。对于利益一致的对策集团,只作为一个局中人,比如足球赛中,一个足球队的队员、教练有十儿人,但只称为一个局中人。在某些对策中,是人与自然界形成冲突的双方,这时可以把自然界看作为一个局中人。如果参与对策的有两个局中人,称为二人对策,如围棋、象棋等;如果参与对策的有超过两个的局中人,称为多人对策,如三人跳棋、打麻将等。打桥牌虽有四人参加,但两两之间构成一个利益完全一致的集团,故也是二人对策。

2. 每个局中人在对策中,可以选择不同的对策方法,我们称为策略。比如在例 1.4 的抢 30 中,后报的一方以报“3、6、9……”的方法,构成一个能保证获胜的策略。孙臆赛马中以下马、上马、中马的顺序进行比赛,也是一个策略。对策中的每个局中人都有自己的策略,这些策略凑起来,就成为一个完整的对策过程。

这里所说的策略,是整个对策过程中一方采取的方法,而不是一两个局部的办法。例如,例 1.6 中的一次填数,例 1.7 中的一两次划数,象棋中走一步棋炮二平五,都不能称为一个策略,而只能叫作一个步法,它是策略的一个组成部分。

3. 当各局中人都选用自己的策略构成一个完整的对策后,对策将有一个结果,比如下棋中的胜、负、和,或者经济贸易中各方的赚、赔的金额等等。这些结果可用各局中人的一个数量来描述,比如国际象棋比赛中胜者得 1 分,负者得 0 分,

如果下成和棋,则双方各得 $\frac{1}{2}$ 分。我们将这种所得的数量称为局中人的赢得值,或称为“支付”。

如果对策的双方(或多方)的赢得值的和是固定的,比如上述的国际象棋比赛,每局棋双方的赢得值的和永远是1,我们称这样的对策为零和对策。有时双方或各方的赢得值总和不是常量,则称为非零和对策。比如现在的世界杯足球比赛,规定每场球胜方得3分,负方得0分,如果踢成平球,则各得1分。这样一场比赛结束后,双方得分的和可能是3分,也可能是2分,这就是非零和对策了。

局中人、策略、支付值是研究对策的三个要素。参加对策的局中人要按照对策的规则,制定自己的策略,以争取得到最大的支付值。我们看到,策略的选取是决定对策结果的关键,不正确的策略将导致己方的失败。在例1.4到例1.7的对策中,总有一个局中人存在着不依赖对手如何行动的必胜策略,而另一方不管多有本事也无法取胜;在例1.1与例1.2中,如果任何一个局中人事先不知道对方所采取的策略,那他是不可能稳操胜券的。在各种对策中如何选取最正确的策略,它将达到什么样的结果,这就是对策论研究的内容。