普通高等学校基础课辅导用书

大学数学

典型题解析

(高等数学分册)

主编 陈 仲
编者 陈 仲
范红军

南京大学出版社

普通高等学校基础课辅导用书

大学数学典型题解析

（高等数学分册）

主编　陈　仲

编者　陈　仲

　　　范红军

南京大学出版社

内 容 简 介

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写. 考虑学生考研的要求，编写时参照了教育部制定的《考研数学考试大纲》. 全书含两个分册，本册是高等数学分册，内容为一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、级数和常微分方程.

本书从大学数学教材和习题集中，从高校历年期中考试、期末考试试题中，以及从历年硕士研究生入学考试题中，精选了800余例典型题，逐条详细解析，指出可能发生的错误，总结解题方法和技巧，指导学生举一反三，触类旁通.

本书可作为高等学校大学数学课程的教学参考书，习题课教材，以及考研复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学典型题解析. 高等数学分册/陈仲主编. —南京:南京大学出版社，2005. 8
ISBN 7-305-04543-8

Ⅰ. 大… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学-高等学校-解题
Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 103162 号

书　　名　大学数学典型题解析(高等数学分册)
编 著 者　陈　仲　范红军
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话　025—83596923　025—83592317　传真　025—83328362
网　　址　http://press. nju. edu. cn
电子邮件　nupress1@public1. ptt. js. cn
　　　　　sales@press. nju. edu. cn(销售部)
印　　刷　常熟华通印刷有限公司
开　　本　850×1168　1/32　印张　13. 125　字数　341 千
版　　次　2005 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN　7-305-04543-8/O・362
定　　价　19. 80 元

前　　言

大学数学是高等学校理、工、文科各系的公共必修基础课. 学习大学数学，除掌握数学的基本概念、基本理论和基本方法外，更重要的是使自己受到良好的科学训练，得到数学思维方法、逻辑推理能力的培养，获得一定的数学素养，为学习专业课和后续课打下扎实的基础. 因此要学好大学数学成了每个大学生的共识.

大学数学是一门系统、严谨的学科，内容多，教学进度快，致使相当多的刚进入大学的大学生感到学习困难. 我们编写这本书的宗旨就是指导大学生学好大学数学.

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写，并参照了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》. 按其内容分为两个分册(高等数学分册，线性代数与概率统计分册)，第一分册包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程；第二分册包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数学特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验. 全书共 22 章，每章分两部分，第一部分是“基本概念与内容提要”，列出主要概念、基本内容，并对其中的重要内容和主要定理作详细叙述，希望读者能掌握这些内容，它是学好大学数学的基础. 第二部分是“典型习题与试题解析”，编者从有关教材与习题集中，从历年高校期中考试、期末考试试题中，以及从历年硕士研究生入学考试题(包括统考与单独考试)中，精选出典型题

共800余例,逐条详细解析,对重要题目深入分析研究,总结出解题方法和技巧,并指出可能发生的错误.这些典型题解析内容广、类型多、技巧强,是本书的核心内容.编者希望通过典型题解析,指导大学生如何解题,做到举一反三,触类旁通.各类学生可根据自己的专业要求,选学本书;文科学生和对大学数学要求较低的学生,对书中的难题可以删略.解题能力虽不是大学数学教学的全部内容,但它是学好大学数学的试金石.读者如能阅读好本书的典型题解析,定能提高分析能力,掌握解题技巧,提升应试水平.为了帮助读者检测学习效果,全书共设置11份阶段复习试题(书末附有试题答案与提示).

本书可供高等学校学生作为学习大学数学课程的教学参考书,可供准备考研的人员作为复习备考用书,可供高等学校教师作为习题课教材或教学参考书.

由于编者水平所限,书中缺点和错误难免,恳请读者批评、指正.

陈 仲

目 录

1 **极限与连续性** ………………………………………… 1
1.1 基本概念与内容提要………………………………… 1
1.2 典型习题与试题解析………………………………… 6
2 **一元函数微分学**……………………………………… 28
2.1 基本概念与内容提要 ……………………………… 28
2.2 典型习题与试题解析 ……………………………… 36
阶段复习试题一 ………………………………………… 100
3 **不定积分与定积分** ………………………………… 106
3.1 基本概念与内容提要……………………………… 106
3.2 典型习题与试题解析……………………………… 111
4 **定积分的应用与广义积分** ……………………… 163
4.1 基本概念与内容提要……………………………… 163
4.2 典型习题与试题解析……………………………… 168
阶段复习试题二 ………………………………………… 197
5 **空间解析几何** ………………………………………… 201
5.1 基本概念与内容提要……………………………… 201
5.2 典型习题与试题解析……………………………… 208
6 **多元函数微分学** …………………………………… 224
6.1 基本概念与内容提要……………………………… 224
6.2 典型习题与试题解析……………………………… 229
阶段复习试题三 ………………………………………… 256

7 重积分 ………………………… 262
7.1 基本概念与内容提要 ………………………… 262
7.2 典型习题与试题解析 ………………………… 266
8 曲线积分与曲面积分 ………………………… 289
8.1 基本概念与内容提要 ………………………… 289
8.2 典型习题与试题解析 ………………………… 298
阶段复习试题四 ………………………… 327
9 无穷级数 ………………………… 334
9.1 基本概念与内容提要 ………………………… 334
9.2 典型习题与试题解析 ………………………… 338
10 常微分方程 ………………………… 362
10.1 基本概念与内容提要 ………………………… 362
10.2 典型习题与试题解析 ………………………… 370
阶段复习试题五 ………………………… 401

阶段复习试题答案与提示 ………………………… 406

1

极限与连续性

1.1 基本概念与内容提要

1）集合的概念. 集合的并、交、差运算

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$
$$A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \,\overline{\in}\, B\}.$$

2）一元函数基本概念

设 $I \subseteq \mathbf{R}$，则称映射

$$f: I \rightarrow \mathbf{R}$$

为定义在 I 上的一元函数. 称 I 为 f 的定义域，记为 $D(f)$. 全体函数值 $f(x)$ 的集合称为 f 的值域.

利用已知条件求函数的表示式. 利用函数的解析表达式求函数的定义域.

（1）* 函数的初等性质（奇偶性，单调性，有界性，周期性）. ①

（2）反函数，* 复合函数，隐函数概念.

（3）* 基本初等函数.

幂函数 $y = x^{\lambda}$，指数函数 $y = a^{x}(a > 0, a \neq 1)$，对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$，三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$，反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x$，

① 本书中标“*”的内容为重点.

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 的性质及其图形.

(4) 初等函数与分段函数.

3) 数列与函数的极限

(1) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时恒有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,或称$\{x_n\}$收敛于 A.

(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$,或称 $x \to a$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A.

(3) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $x > M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,或称 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A,简记为 $f(+\infty) = A$.

(4) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $x < -M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$,或称 $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A,简记为 $f(-\infty) = A$.

(5) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $|x| > M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,或称 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A,简记为 $f(\infty) = A$.

4) 函数的左极限与右极限

(1) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < a - x < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$,则称 $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$(左极限为 A),简记为 $f(a-) = A$.

(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < x - a < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$，则称 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$（右极限为 A），简记为 $f(a+) = A$.

5）* 夹逼准则

若函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 皆在 $x = a$ 的某去心邻域 I 内定义，且 $\forall x \in I$ 有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x),$$

若

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A(\text{或} \pm \infty),$$

则

$$\lim_{x \to a} f(x) = A(\text{或} \pm \infty).$$

这里的极限过程改为 $x \to a\pm$，$x \to +\infty$，或 $x \to -\infty$，上述结论仍成立.

6）* 单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增有上界，或单调减有下界，则数列 $\{x_n\}$ 必收敛，即 $\exists A \in \mathbf{R}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

7）* 两个重要极限

若 $x \to a$（或 $x \to a+$，$x \to a-$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$，$x \to \infty$）时 $\square \to 0$（$\square$ 表示 x 的任一函数），则

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \quad \lim_{x \to a}(1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = \mathrm{e}.$$

8）* 等价无穷小因子替换法则

若 $x \to a$（或其他极限过程）时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小（$\alpha(x) \sim \beta(x)$），$\gamma(x)$ 与 $\delta(x)$ 为等价无穷小（$\gamma(x) \sim \delta(x)$），则有

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x) f(x)}{\gamma(x) g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\beta(x) f(x)}{\delta(x) g(x)},$$

当右端极限为 A 时，左端也为 A；或右端极限不存在时，左端也不存在.

当 $\square \to 0$ 时，有下列无穷小的等价性：

(1) $\square \sim \sin\square \sim \arcsin\square \sim \tan\square \sim \arctan\square \sim \ln(1+\square) \sim e^{\square}-1$；

(2) $(1+\square)^{\lambda}-1 \sim \lambda\square(\lambda \in \mathbf{R})$；

(3) $1-\cos\square \sim \dfrac{1}{2}\square^{2}$.

9) * 四则运算法则

在求极限的过程中，常综合运用初等变形，变量代换，四则运算法则，两个准则，两个重要极限，等价无穷小因子替换法则等各种方法.

在以后的章节中，还有运用导数定义，洛必达法则，泰勒展式，定积分定义，级数性质等求极限的方法.

10) 无穷小的概念和性质

若在某极限过程中($x\to a, x\to a+, x\to a-, x\to+\infty, x\to-\infty, x\to\infty$ 中任一个)，变量或函数 $\alpha(x)\to 0$，则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程中的无穷小量，简称无穷小. 在同一极限过程中的有限个无穷小的和或乘积仍为无穷小. 特别的，无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量. 例如

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

11) * 无穷小的比较

设 $x\to a$(或 $x\to a+,\cdots$) 时，α,β 都是无穷小，若

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，称 α 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$.

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta}\to\infty$，称 α 是 β 的低阶无穷小.

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}\to c(c\neq 0, c\in\mathbf{R})$，称 α 与 β 为同阶无穷小. 特别，当 $c=1$ 时，称 α 与 β 为等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta(x\to a)$.

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta^{k}}\to c(c\neq 0, c\in\mathbf{R})$，则以 β 为基准，称 α 为 k 阶无穷小，并

称 $c\beta^k$ 为无穷小 α 的主部. 例如,因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2},$$

所以 $x\to 0$ 时 $\tan x-\sin x$ 的无穷小主部为$\frac{1}{2}x^3$.

12) 无穷大的概念、无穷大的比较

当 $x\to+\infty$ 时,下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, x^\alpha(\alpha>0), x^\beta(\beta>\alpha), a^x(a>1), x^x.$$

当 $n\to\infty$ 时,下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, n^\alpha(\alpha>0), n^\beta(\beta>\alpha), a^n(a>1), n^n.$$

13) * 函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点连续,称 f 在区间 I 上连续. 若函数 $f(x)$ 的定义域是一区间,且 $f(x)$ 在该区间上连续,则称 $f(x)$ 为连续函数,记为 $f\in\mathscr{C}$.

14) 左连续、右连续概念

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左(右)邻域内有定义,若

$$f(a-)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)\quad\left(f(a+)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)\right),$$

称 $f(x)$ 在 $x=a$ 左(右)连续.

函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=a$ 左连续且右连续.

15) 连续函数的运算性质

函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 皆连续,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(a)\neq 0)$ 在 $x=a$ 也连续.

若 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续,$u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,则 $f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 连续,即

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)).$$

* 初等函数在其定义域上连续.

16）* 间断点分类

若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 不连续，称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的间断点. 间断点分为两类：

(1) 当 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 皆为有限数时，称 $x=a$ 为第一类间断点（若 $f(a-)=f(a+)$，称 $x=a$ 为可去型；若 $f(a-)\neq f(a+)$，称 $x=a$ 为跳跃型）.

(2) 当 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中至少有一个不为有限数时，称 $x=a$ 为第二类间断点（当 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 中有一个等于 ∞ 时，$x=a$ 为无穷型）.

17）* 闭区间上连续函数的性质

(1) **有界定理**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists K>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant K,\ \forall x\in[a,b].$$

(2) **最值定理**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使得

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2),\ \forall x\in[a,b].$$

(3) **介值定理**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)<f(b)$，则 $\forall\mu\in(f(a),f(b))$，必 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.

(4) **零点定理**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$（称 ξ 为 $f(x)$ 的零点）.

1.2　典型习题与试题解析

例 1.1　求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解析 (1) 由$\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\geqslant 0, x-3\neq 0$可推出

$$D(y)=\{x\mid (x-1)(x-2)(x-3)\geqslant 0, x\neq 3\}.$$

	$(-\infty,1]$	$[1,2]$	$[2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
乘积	$-$	$+$	$-$	$+$

乘积为$+$的区间为$D(y)$,所以所求的定义域为$[1,2]\cup(3,+\infty)$.

(2) 由$\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0, \\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0, \\ |2x-1|\leqslant 7,\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3, \\ -3\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

所以所求定义域为

$$x\in\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2 \text{ 或 } 3\leqslant x\leqslant 4\}.$$

例 1.2 设函数$f(x)$满足

$$3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0,$$

试求$f(x)$.

解析 在等式

$$3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0, \tag{1}$$

中取x为$-\dfrac{1}{x}$得

$$3f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{x^2}f(x)-7x=0, \tag{2}$$

由(1)与(2)消去$f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$得

$$f(x)=4x^3+\frac{3}{x}.$$

例 1.3　设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$g(x+1)=x^2+x+1$，试求 $f(g(x)),g(f(x)),f[f(g(x))]$，$f[g(f(x))]$.

解析　(1) 令 $x+1=u$，则

$$g(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1,$$

故 $g(x)=x^2-x+1$，由于对一切 x 有 $x^2-x+1>0$，所以

$$f(g(x))=g(x)=x^2-x+1.$$

(2)
$$g(f(x))=f^2(x)-f(x)+1$$
$$=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(3) 由于 $f(g(x))=x^2-x+1>0$，所以

$$f[f(g(x))]=f(g(x))=x^2-x+1.$$

(4) 由于 $g(f(x))>0,\forall x\in\mathbf{R}$，所以

$$f[g(f(x))]=g(f(x))=\begin{cases}1, & x<0,\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1.4　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$

求 $g[f(x)]$.

解析　因

$$g(u)=\begin{cases}2-u, & u\leqslant 0,\\ u+2, & u>0,\end{cases}$$

令 $u=f(x)$ 得

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0,\end{cases}$$

因 $f(x)\leqslant 0$ 等价于 $x\geqslant 0$，此时 $f(x)=-x$；$f(x)>0$ 等价于 $x<0$，此时 $f(x)=x^2$，所以

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2+x, & x \geqslant 0, \\ 2+x^2, & x < 0. \end{cases}$$

例 1.5 设 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数，当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x) = \sin x + \cos x - 1$，求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式.

解析 因 $f(x)$ 是奇函数，所以当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ 时，

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -[\sin(-x) + \cos(-x) - 1] \\ &= \sin x - \cos x + 1. \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数，所以当 $\in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-\pi) = \sin(x-\pi) - \cos(x-\pi) + 1 \\ &= -\sin x + \cos x + 1. \end{aligned}$$

再利用 $f(x)$ 为奇函数，故当 $x \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) = -[-\sin(-x) + \cos(-x) + 1] \\ &= -\sin x - \cos x - 1. \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x - \cos x - 1, & -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x - \cos x + 1, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 0, \\ \sin x + \cos x - 1, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -\sin x + \cos x + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

例 1.6　"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

解析　数列极限的 ε-N 语言定义为：

"$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$."

这是一个很经典的定义，只有掌握它的实质，才能判断有哪些地方可作非实质的改动. 因为若对某正数 ε_0，结论成立，则对大于 ε_0 的正数其结论亦成立. 所以 $\forall \varepsilon \in (0,1)$ 是可以的；$n > N$ 改为 $n \geqslant N$，只要将存在的 N 改为 $N+1$ 就行；$|x_n - a| < \varepsilon$ 改为 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$ 也是可以的，因为 ε 是任给的正数，2ε 也可认为是任意给定的正数，它可以任意小就行. 故选(C).

例 1.7　用定义证明

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

解析　当 $x > 1$ 时，$2x - 1 > x$，

$$\left| \frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2\,|2x-1|} = \frac{3}{2(2x-1)} < \frac{3}{2x},$$

令

$$\frac{3}{2x} < \frac{3}{2N_1} = \varepsilon,$$

则 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \max(1, N_1) = \max\left(1, \dfrac{3}{2\varepsilon}\right)$，当 $x > N$ 时有

$$\left| \frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

例 1.8　用定义证明

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8.$$