根据人教版最新教材编写

NEW 1本通 yibentong

高一数学

新一本通

xinyibentong

试验修订版

新一本通

根据人教版最新教材编写

高一数学

试验修订版

◎主　编／秦　梦
◎分册主编／王金生　张素虹
◎编者／王金生　张素虹　贾睿智　杨巧梅

◎吉林人民出版社

（吉）新登字 01 号

新一本通·高一数学（试验修订版）

主　　编	綦　梦	分册主编	王金生　张素虹
责任编辑	张长平　王胜利	封面设计	魏　晋
责任校对	孙　丹　唐晓明	版式设计	王胜利

出 版 者　吉林人民出版社
（长春市人民大街 124 号　邮编 130021）
发 行 者　吉林人民出版社　0431－5678541
印 刷 者　北京市通县长凌营印刷厂

开　　本　850×1168　1/32
印　　张　15.25
字　　数　480 千字
版　　次　2002 年 6 月第 1 版
印　　次　2002 年 6 月第 1 次印刷
印　　数　1－30100 册

标准书号　ISBN 7－206－03203－6/G·842
定　　价　17.00 元

目　　录

第一章　集合与简易逻辑

1.1　集　合

问题的提出

1. 什么是集合？

2. 集合中的元素具有怎样的性质？

3. 如何根据集合的特征来表示集合呢？

4. 元素与集合具有怎样的关系呢？

知识讲解

1. 集合概念

(1)一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

(2)集合中的元素具有三大特性

①确定性；②互异性；③无序性.

(3)集合常用的表示方法

①列举法：把集合中的元素一一列举出来的方法.

②描述法：用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法. 关于"确定的条件"可以是语言描述，也可以用不等式(组)，方程(组)等来表示. 这要根据集合中元素的特性来确定.

2. 元素与集合的关系

设a是任意的一个元素，A是任意的一个集合，a与A的关系有两种情形：要么$a\in A$，要么$a\notin A$. 二者必居其一. 一个集合也可以不含有任何元素，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合. 这种用来表示集合的封闭曲线也叫做文氏图. 高中数学以数集和点集为主要研究对象.

典例剖析

例 1 用适当的方法表示下列集合

(1)方程$(x^2-1)(x^2+2x-3)=0$的根组成的集合；

(2)方程组$\begin{cases}5x^2-y^2=1,\\ y=2x\end{cases}$的解集；

(3)直角坐标平面内，由一、三象限内的点或坐标轴上的点组成的点集；

(4)设x,y,z都是非零实数，

$M=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$可能取到的值所组成的集合；

(5)被 3 除余 1 的正整数组成的集合；

(6)所有的三角形组成的集合.

分析 (1)该方程根的集合，是由方程$x^2-1=0$和$x^2+2x-3=0$的根所组成的，因此只要解出这两个一元二次方程即可，由于根的个数有限且较小，所以用列举法表示更直观明了；

(2)该方程组是二元二次方程组，所以它的每一个解都由一对有序实数构成，而不是一个实数所能表示的. 随着不断地学习我们会发现二元方程(组)的解的几何意义就是坐标平面上的点，故我们就把点的坐标(x,y)作为二元方程(组)的解集的代表元素，再注意到二元方程组的解一般情况下最多不会超过四个，故用列举法表示更适当；

(3)显然这个点集是一个无限集，不适合用列举法来表示，通过挖掘点的坐标的公共属性，用描述法更为适合；

(4)认真观察M的结构特点你会发现，虽然x,y,z可取任意的非零实数，但M的值却是有限多个且个数较少，故宜用列举法表示；

(5)显然被3除余1的正整数有无限多个，只要挖掘出这些正整数的特征，就可用描述法表示. 从另一个方面看，虽然这个集合是一个无限集，但若把它们按照从小到大的顺序依次列举，并通过列举部分元素能够给读者提供一定的规律，而使读者能够根据这个规律判断出后面的元素，那么只要列举它的部分元素，其余元素用省略号表示即可. 这也就是说无限集有时也可用列举法来表示；

(6)该集合显然是一个无限集，由于三角形的形状大小各异，又是平面图形，显然不能用列举法表示. 注意到它的公共属性都是“三角形”，故用描述法表示.

解 (1)由$(x^2-1)(x^2+2x-3)=0$

$\Rightarrow x^2-1=0$,或$x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow x=1,-1$,或$x=1,-3$

$\Rightarrow x=1,-1,-3$.

$\therefore$方程$(x^2-1)(x^2+2x-3)=0$的根组成的集合用列举法可表示为

$\{1,-1,-3\}$.

说明 本题中,方程$x^2-1=0$和$x^2+2x-3=0$都有根1,有些学生就把它表示成$\{1,1,-1,-3\}$,这是错误的.究其原因是没有很好的理解集合中元素的互异性.集合中元素的互异性要求,集合中的任意两个元素都不同,相同元素归入同一集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(2)把$y=2x$代入$5x^2-y^2=1$可得

$x^2=1\Rightarrow x=1$或-1,

当$x=1$时,代入$y=2x$得$y=2$,

当$x=-1$时,代入$y=2x$得$y=-2$.

$\therefore$方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$

故方程组的解集用列举法可表示为$\{(1,2),(-1,-2)\}$.

说明 有些学生把这个解集错误地表示为$\{1,-1,2,-2\}$.这种表示说明该集合中的每一个元素是一个数,而不是一个有序数对,它显然不能构成二元方程组的一个解.因为二元方程或方程组的每一个解都是由两个实数构成的有序数对(x,y).集合$\{(1,2),(-1,-2)\}$与$\{1,-1,2,-2\}$中的元素的属性截然不同.前者是有序数对集(也就是点集),后者是数集.希望同学们一定要深刻体会,不要混淆.

(3)该点集显然是一个无限集,当点(x,y)在第一或第三象限时,满足$xy>0$;当点(x,y)在坐标轴上时,由于x和y中至少有一个为零,所以满足$xy=0$.综上可知,点的坐标总满足$xy\geqslant 0$,这就是这个点集中所有元素满足的公共属性.故此点集用描述法可表示为

$$\{(x,y)\mid xy\geqslant 0,x,y\in \mathbf{R}\}.$$

说明 点集的代表元素就是(x,y)的形式.一般情况下,若点集是无限集时,只能用描述法来表示,若点集是有限集时,两种表示方法皆可.一些常用的点集应能熟练地把它们表示出来.例如:x轴上的点集可表示为$\{(x,y)\mid y=0,x\in \mathbf{R}\}$;一、三象限的角平分线上的点集可表示为$\{(x,y)\mid y=x,x,y\in \mathbf{R}\}$;$y$轴左侧的点集可表示为$\{(x,y)\mid x<0,y\in \mathbf{R}\}$等等.这是一些最基本的技能,应

熟练掌握.

(4)需对 x,y,z 的正、负进行分类讨论.

①x,y,z 均大于0,则 $M=5$；　②x,y,z 均小于0,则 $M=-3$；

③$x>0,y>0,z<0$,则 $M=1$；　④$x>0,y<0,z<0$,则 $M=-1$；

⑤$x>0,y<0,z>0$,则 $M=-1$；⑥$x<0,y<0,z>0$,则 $M=1$；

⑦$x<0,y>0,z>0$,则 $M=-1$；⑧$x<0,y>0,z<0$,则 $M=-1$.

综上所述:M 的所有不同的值为 $-1,-3,1,5$.

故 M 的所有可能值组成的集合用列举法可表示为 $\{-1,-3,1,5\}$.

说明　本题分类讨论是关键,如何分类是同学们感到比较困惑的问题.注意到 x,y,z 的正、负分别均有两种情况,所以 x,y,z 正、负的所有情况有 $2\times2\times2=8$(种).按照 x,y,z 的顺序进行讨论时,首先应考虑 x 的正负,其次考虑 y 的正负,最后考虑 z 的正负.分类见图1-1:

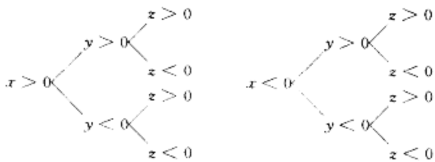

图1-1

分类的基本原则是:既不能重复,也不能遗漏.

(5)描述法:被3除余1的整数可表示为 $3n+1,n\in\mathbf{Z}$.

被3除余1的正整数可表示为 $3n+1,n\in\mathbf{N}$.

若设这个集合的代表元素为 x,那么这个集合用描述法可表示为

$$\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{N}\}.$$

列举法:被3除余1的正整数按从小到大的顺序进行列举依次为

$1,4,7,10,13,16,\cdots$

仔细观察你会发现,从第二个数起,后面每一个数都比前面的一个数大3.根据这个规律就可以判断出这个集合的其他元素.所以这个集合用列举法也可表示为 $\{1,4,7,10,13,16,19,22,\cdots\}$.

说明　此集合中的最小正整数是1,许多学生往往误认为是4,这是审题不清.有的同学还误写为 $\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,实际上这个集合是被3除余1的整数集合,而不是正整数集合,这说明对 n 的范围的限定是至关重要的.另外

我们经常要用到的奇数集可表示为$\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$（也可表示成$\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$）；偶数集可表示为$\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$（也可表示为$\{2n|n\in\mathbf{Z}\}$）．有关的整数集也可用列举法表示．例如：正整数集可表示为$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；正偶数集合可表示为$\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}$．整数的平方组成的集合可表示为$\{0,1,4,9,16,25,36,\cdots\}$等等．总之到底用哪种方法表示集合，要因题而异，选择适当的方法，使表示更具有针对性、合理性．

（6）该集合显然是一个无限集，其几何属性只能用语言描述，所以三角形的集合用描述法可表示为

$$\{x|x\text{ 是三角形}\}.$$

说明　有许多集合都只能用描述法来表示．例如：所有的中国人组成的集合可表示为$\{x|x$是中国人$\}$（也可以简略表示为$\{$中国人$\}$）．虽然中国人组成的集合是有限集，但却不易用列举法表示，用描述法表示更好．这说明集合的表示要因题而异，灵活把握．

例2　已知集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$．

（1）若集合A中只有一个元素，求a的值；

（2）若集合A中至少有一个元素，求a的取值范围；

（3）若$A=\varnothing$，那么a的取值范围是什么？

分析　（1）由于$a\in\mathbf{R}$，所以不可认为方程$ax^2+2x+1=0$就是一元二次方程，它也可能是一元一次方程，因此应分$a=0$和$a\neq0$两种情况进行讨论；

（2）至少有一个元素，蕴含着有一个、有二个或更多的情形．因此也应分类讨论；

（3）$A=\varnothing$说明此方程无实数根，也要分$a=0$和$a\neq0$两种情况进行讨论．

解　（1）当$a=0$时，原方程可化为$2x+1=0$．

这是一个一元一次方程，解方程得$x=-\dfrac{1}{2}$．

此时A中只有一个元素$-\dfrac{1}{2}$．

当$a\neq0$时，$ax^2+2x+1=0$为一元二次方程，

要使得A中只有一个元素，须$\Delta=0$，而$\Delta=0\Leftrightarrow4-4a=0$，解之得$a=1$．

此时，方程可化为$x^2+2x+1=0$，解之得$x=-1$．

综上可知，当$a=0$，或$a=1$时，A中只有一个元素．

（2）由（1）可知，当$a=0$时，A中只有一个元素．

当$a\neq0$，且$\Delta=0$时，$a=1$，此时A中只有一个元素．

当$\Delta>0$时，A中有两个元素，解$\Delta>0$可得$a<1$．

综上可知，当$a\leqslant1$，且$a\neq0$时，A中至少有一个元素.

(3)由(2)可知，当$a>1$时，$\Delta<0$，此时方程无解，$A=\varnothing$.

说明 由于方程$ax^2+2x+1=0$中含有字母系数a，因此方程根的个数就与a的取值有着密切的关系，就本题来看，a是否为零决定着方程的类型，随之也就决定着根的个数. 因此需对a进行分类讨论. 当$a\neq0$时，又需对其判别式Δ进行讨论. 所以这种分类讨论具有层次性，需认真分析，逐步进行. 分类讨论的思想本质就是使问题顺利解决.

例3 已知$-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，求a的值.

分析 由题设知-3是集合$\{a-3,2a-1,a^2+1\}$中的元素，故-3可能是$a-3$，也可能是$2a-1$，但不可能是a^2+1($\because -3<0,a^2+1>0$). 所以应分情况讨论求解.

解 若$-3=a-3$，则$a=0$，

此时-3所在的集合为$\{-3,-1,1\}$，与题设相符.

若$-3=2a-1$，则$a=-1$，

此时-3所在的集合为$\{-4,-3,2\}$，与题设相符.

综上可知：当$-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$时，a的值为0或-1.

说明 本题中用列举法表示的集合中的元素含有参数a，这样就使得与-3相同的元素的可能性不止一种，须分类讨论. 由集合中元素的互异性可知，a的值必须保证$a-3\neq2a-1$，且$2a-1\neq a^2+1$. 在有些问题里，a的某些值往往不能够保证集合中的元素互异，因此必须将其舍去. 例如若将此题改编为“已知$-3\in\{a-3,2a-1,a^2-3\}$，求a的值”. 你会发现由$a-3=-3$解得$a=0$，此时-3所在集合是$\{-3,-1,-3\}$，即集合中的元素不满足互异性. 因此应把$a=0$舍去.

例4 小于或等于x的最大整数与大于或等于x的最小整数之和是5，求x的集合.

分析 要想求得x的集合，应紧扣题设条件挖掘关于x的不等关系，同时还需对x取整数和分数进行讨论.

解 ①若x是整数，依题意可得$x+x=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$，

这与$x\in\mathbf{Z}$矛盾. $\therefore x$不能是整数.

②若x不是整数，那么x必介于两个连续的整数之间，设$n<x<n+1$，$n\in\mathbf{Z}$，则应有$n+(n+1)=5$，解之得$n=2$.

进而可知：$2<x<3$.

故 x 的值的集合为 $\{x|2<x<3, x\in \mathbf{R}\}$.

说明 当 x 是整数时，小于或等于 x 的最大整数与大于或等于 x 的最小整数都是 x，这是易搞错的一个知识点，应好好体会.

例5 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：

①P 中的元素有正数，有负数；②P 中的元素有奇数，有偶数；

③$-1\notin P$；④若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$.

对于集合 P，下列结论正确的一个是 （　　）

A. $0\in P, 1\in P$　　B. $0\notin P, 1\in P$　　C. $0\in P, 1\notin P$　　D. $0\notin P, 1\notin P$

分析 本题是判断元素与集合的关系，应根据定义及性质设法判断元素0和1是否满足集合 P 的属性.

解 由题设性质(1)可知，集合 P 一定存在最小正整数和最大负整数. 不妨设最小正整数为 a，最大负整数为 b. 那么必有 $b<a+b<a$.

由性质(4)可知 $a+b\in P$，而 $a+b$ 比最小正整数小且比最大负整数大，所以 $a+b$ 既不是正数，也不是负数. 因此 $a+b=0$. 故 $0\in P$. 这样便可排除掉B，D. 正确结论可能是A或C. 只要判断1与 P 的关系即可.

假设 $1\in P$，则1就是 P 中的最小正整数，$\therefore a=1$，由 $a+b=0$，可知，$-1\in P$，这与题设中的 $-1\notin P$ 相矛盾. $\therefore 1\notin P$. 故正确结论为C.

说明 本题所给的集合 P 是抽象的，要想判断元素0，1与 P 的关系，只能依据题设性质. 在运用性质时要求能合理的设，巧妙的推理分析，当从正面不易突破时，可采取反证的方法，对于抽象的问题可通过合理引入有关的数或量，使问题具体化，进而达到化难为易的目的.

例6 设 $M=\{a|a=x^2-y^2, x,y\in \mathbf{Z}\}$.

(1)判断8，9，10是否属于 M；

(2)证明：一切奇数均属于 M；

(3)证明：偶数 $4k-2(k\in \mathbf{Z})$ 不属于 M；

(4)求证：属于 M 的两个整数，其积仍属于 M；

(5)若 $x_1, x_2\in M$，那么 x_1+x_2 是否一定属于 M?

分析 本集合中元素的属性是：能够写成两个整数的平方差. 这就启发我们无论是判断元素与 M 的关系，还是证明元素与 M 的关系，都应从判断元素是否满足属性入手.

解 (1) $\because 8=3^2-1^2, 3,1\in \mathbf{Z}, \therefore 8\in M$.

$\because 9=3^2-0^2, 3,0\in \mathbf{Z}, \therefore 9\in M$.

$10\notin M$，为什么?

假设 $10\in M$，则 $10=x^2-y^2(x,y\in\mathbf{Z})$，

$\Rightarrow(x+y)(x-y)=10$. $\because x,y\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x+y\in\mathbf{Z}$，$x-y\in\mathbf{Z}$，为方便起见，不妨设 $x+y=5$，$x-y=2$，

则有 $\begin{cases}x+y=5,\\x-y=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{7}{2},\\y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}\Rightarrow x,y\notin\mathbf{Z}$. $\therefore 10\notin M$.

(2)证明：设 a 为任意的奇数，且 $a=2k-1(k\in\mathbf{Z})$.

$\because 2k-1=k^2-k^2+2k-1=k^2-(k-1)^2$，

$\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k-1\in\mathbf{Z}$，故 $2k-1\in\mathbf{Z}$.

由 a 的任意性可知，一切奇数均属于 M.

(3)假设 $4k-2\in M$，则存在 $x,y\in\mathbf{Z}$ 使得

$4k-2=x^2-y^2\Rightarrow(x+y)(x-y)=4k-2=\boxed{2}(2k-1)\cdots$①

①式说明 $x+y$ 和 $x-y$ 必有一个是偶数，另一个是奇数，由 $(x+y)(x-y)$ 等于偶数可知 $x+y$ 与 $x-y$ 的奇偶性相同. 出现矛盾，故①式不能成立，所以 $4k-2\notin M$.

(4)设 $m,n\in M$，则 $m=x_1{}^2-y_1{}^2$，$n=x_2{}^2-y_2{}^2(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{Z})$

$$\begin{aligned}\therefore mn&=(x_1{}^2-y_1{}^2)(x_2{}^2-y_2{}^2)\\&=x_1{}^2x_2{}^2+y_1{}^2y_2{}^2-x_1{}^2y_2{}^2-x_2{}^2y_1{}^2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2\end{aligned}$$

$\because x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{Z}$，$\therefore x_1x_2-y_1y_2\in\mathbf{Z}$，$x_1y_2-x_2y_1\in\mathbf{Z}$. 故 $mn\in M$.

(5)显然 $0\in M$，$1\in M$，则 $0+1=1\in M$，$1\in M$，$9\in M$，但 $1+9=10\notin M$.

这说明：当 $x_1,x_2\in M$ 时，x_1+x_2 不一定属于 M.

说明 在(1)中应能熟练的把一个属于 M 的整数写成两个整数的平方差，需要注意的是它的形式是不惟一的. 例如：$9=3^2-0^2=(-3)^2-0^2=5^2-4^2=(-5)^2-4^2$ 等等. $10\notin M$ 应给出简要的证明，当正面不易证时，可采用反证法. 在(2)和(4)中，要学会合理地设，巧妙地配凑(主要是配方). 在(5)中可通过举出正、反两方面的例子来加以说明.

例7 已知 $M=\{m\mid x^2+2(m-1)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，

求当 $x\in M$ 时，$y=2x-1$ 的取值范围.

分析 应根据 M 中元素的属性求出 x 的范围，根据 x 的范围再求出 y 的范围.

解 由题设可知，m 的取值应使方程 $x^2+2(m-1)x+1=0$ 总有实根. 故

其判别式$\Delta \geqslant 0$，即$4(m-1)^2-4 \geqslant 0$，解之得$m \geqslant 2$，或$m \leqslant 0$.

$\therefore M=\{m \mid m \geqslant 2$，或$m \leqslant 0\}$.

又$x \in M$，$\therefore x \geqslant 2$，或$x \leqslant 0$.

当$x \geqslant 2$时，$2x \geqslant 4 \Rightarrow 2x-1 \geqslant 3$，即$y \geqslant 3$.

当$x \leqslant 0$时，$2x \leqslant 0 \Rightarrow 2x-1 \leqslant -1$，即$y \leqslant -1$.

$\therefore y$的取值范围是$y \geqslant 3$，或$y \leqslant -1$.

说明 在集合M中，一定要明确其代表元素是m而不是x，由m满足的属性知，方程$x^2+2(m-1)+1=0$总有实根．$\therefore \Delta \geqslant 0$．另外$y=2x-1$中的$x \in M$，与方程中的$x$有着质的不同．这应该引起同学们的注意.

例8 已知$A=\{x \mid x^2+px+q=x, x \in \mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid (x-1)^2+p(x-1)+q=x+1\}$．当$A=\{2\}$时，求集合$B$.

分析 可由$A=\{2\}$及A中元素的属性求得p和q的值，再将p, q的值代入B中的方程，解方程可求得B.

解 $\because A=\{x \mid x^2+px+q=x\}=\{x \mid x^2+(p-1)x+q=0\}=\{2\}$.

$\therefore$方程$x^2+(p-1)x+q=0$有两个相等的实根$x=2$.

由韦达定理可得$\begin{cases} -(p-1)=2+2, \\ q=2 \times 2. \end{cases}$解得$\begin{cases} p=-3, \\ q=4. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \{x \mid (x-1)^2+p(x-1)+q=x+1\} \\ &= \{x \mid (x-1)^2-3(x-1)+4=x+1\} \\ &= \{x \mid x^2-6x+7=0\}=\{x \mid x=3 \pm \sqrt{2}\} \\ &= \{3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

说明 本题中在求p, q的值时，巧妙地利用了根与系数的关系，从而使求解过程简捷明了．当然也可由$\Delta=0$，$x=2$是方程的根，代入方程得到关于p, q的二元一次方程组，求得p, q，不过这样运算量比较大．这就要求我们在解有关一元二次方程的问题时，要善于分析题目的特点，做到有的放矢.

强化训练

一、选择题

1. 下列各组对象能够形成集合的是　　（ C ）

   A. 与2非常接近的全体实数　　B. 很著名的科学家的全体

   C. 某教室内的全体师生　　D. 个子较矮的人

2. 已知$a=\sqrt{3}$，$A=\{x \mid x \geqslant \sqrt{2}, x \in \mathbf{R}\}$，则　　（ ）

A. $a \notin A$　　　　B. $a \in A$

C. $\{a\} = A$　　　　D. $a \notin \{a\}$

3. 有四个命题：

①"所有相当小的正数"组成一个集合；

②集合$\{x,y,z,x,t\}$中有5个元素；

③$\{1,3,5,7\}$与$\{7,5,3,1\}$表示同一集合；

④$\{(x,y)\mid x+y=0,x,y\in\mathbf{R}\}$表示坐标平面内第二、四象限角平分线上的点的集合.

其中正确的命题是　　(　　)

A. 仅有①③　　B. 仅有①②③　　C. 仅有③　　D. 仅有③④

4. 由实数$x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$所组成的集合，最多含有　　(　　)

A. 2个元素　　B. 3个元素　　C. 4个元素　　D. 5个元素

5. 下列集合中只有一个元素的是　　(　　)

A. $\{x\mid x^2-1=0\}$　　B. $\{x^2-1=0\}$

C. $\{x\in\mathbf{Z}\mid x=|x|\}$　　D. $\left\{a\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{3}{5-a}\in\mathbf{N}\right\}$

6. 设集合$A=\{x\mid x=(-1)^n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{2,4,6,8,10,\cdots\}$，$C=\{(x,y)\mid 3x+2y=16,x,y\in\mathbf{N}\}$，$D=\{x\mid 1<x<2,x\in A\}$，$E=\{$等腰直角三角形$\}$，其中无限集的个数是　　(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 集合$A=\{x^2,3x+2,5y^3-x\}$，$B=\{$周长等于20 cm的三角形$\}$，$C=\{x\in\mathbf{R}\mid x-3<2\}$，$D=\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$. 其中用描述法表示的集合有　　(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

8. 集合$M=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{8}{x+3},x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\right\}$中元素的个数是　　(　　)

A. 2个　　B. 4个　　C. 6个　　D. 8个

9. 集合$A=\{x\mid=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，又$a\in A,b\in B$，则有　　(　　)

A. $a+b\in A$

B. $a+b\in B$

C. $a+b\in C$

D. $a+b$不属于A,B,C中的任何一个

10. 集合 $M=\{(x,y)\mid xy=0,x,y\in\mathbf{R}\}$是 (　　)

A. 第二象限内的点集　　B. 第四象限内的点集

C. 第二、四象限内的点集　　D. 不是第一、三象限内的点集

11. 已知 $x\in\{1,2,x^2\}$，则有 (　　)

A. $x=1$　　B. $x=1$，或 $x=2$

C. $x=0$，或 $x=2$　　D. $x=0$，或 $x=1$，或 $x=2$

12. 设集合 $M=\{x\mid x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M$，$y_0\in\mathbf{N}$，则 x_0y_0 与集合 M，N 的关系是 (　　)

A. $x_0y_0\in M$　　B. $x_0y_0\in N$　　C. $x_0y_0\notin M$　　D. $x_0y_0\notin N$

13. 已知 $M=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x^2-1$，且 $y=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，用列举法表示 M，N 完全正确的一个是 (　　)

A. $M=\{1,-1\}$，$N=\{1,-1\}$

B. $M=\{(1,-1)\}$，$N=\{(1,-1)\}$

C. $M=\{1,-1\}$，$N=\{(1,-1)\}$

D. $M=\{1,-1\}$，$N=\{(1,0),(-1,0)\}$

14. 若点 P 的坐标 $(x,y)\in\{(x,y)\mid y=-1+x-2x^2,x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，则 P 点所在象限为 (　　)

A. 第一或第三象限　　B. 第二或第三象限

C. 第三或第四象限　　D. 第一或第四象限

15. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq1\right\}$，若 $x\in A$，则①$x\in\mathbf{N}$；②$x\in\mathbf{Z}$；③$x\in\mathbf{Q}$；④$x\in\mathbf{R}$. 其中正确的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

1. 集合N 中最小的元素是________.

2. 元素 $a=\sqrt{11}$ 与集合 $M=\{x\mid x\leqslant3\sqrt{3}\}$的关系是________.

3. 设 a，b 是非零实数，那么 $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+1$ 可能取值组成的集合是________.

4. 用数字 1，2，3 排成无重复数字的三位数的集合为________________.

5. 平方后仍等于本身的数组成的集合用列举法可表示为________.

6. 元素 3 与集合$\{x^2-6x+9=0\}$的关系是________.

7. 设 $A=\{x\mid x^2-4x+4=0,x\in\mathbf{R}\}$，则 A 中元素的个数为________.

8. 被 2 除余 1 的整数组成的集合用描述法可表示为________.

[redacted]

9. $\{x \mid (x-1)^2(x-2)=0\}$用列举法可表示为________.

10. 集合$\left\{(x,y) \middle| \begin{cases} 2x+y=8, \\ x-y=1. \end{cases}\right\}$中元素的个数为________.

11. 已知$A=\{a,b,c\}$，$B=\{x \mid x\in A\}$，则用列举法表示$B=$________.

12. 坐标平面内到原点的距离小于等于1的点集用描述法可表示为________.

三、解答题

1. 已知集合$A=\{2,4,2x^2+5x\}$，当x为何值时有$3\in A$？
2. 求数集$\{1,x,x^2-x\}$中的元素x所应满足的条件.
3. 若$a\neq 0$，试写出方程$x^2-3ax+2a^2=0$的解集.
4. 若集合$A=\{x \mid x^2+ax+b=x\}$中，仅有一个元素a，求a,b的值.
5. 数集A满足：若$a\in A$，$a\neq 1$，则$\frac{1}{1-a}\in A$.

   (1)若$2\in A$，求A；

   (2)求证：集合A不可能是单元素集；

   (3)集合A中至少有3个不同的元素.
6. 设$S=\{x \mid x=m+\sqrt{2}n, m,n\in \mathbf{Z}\}$.

   (1)若$a\in \mathbf{Z}$，则a是否属于S？

   (2)对S中任意两个元素x_1,x_2，x_1+x_2，$x_1\cdot x_2$是否属于S？

   (3)对于给定的整数n，试求满足$0<m+\sqrt{2}n<1$的S中元素的个数.
7. 关于x的方程$ax+b=0$，当a,b满足什么条件时，解集为有限集？当a,b满足什么条件时，解集为无限集？
8. 已知元素$(1,2)\in A$，且$(1,2)\in B$，这里$A=\{(x,y) \mid ax-y^2+b=0\}$，$B=\{(x,y) \mid x^2-ay-b=0\}$，求$a,b$的值.

1.2 子集、全集、补集

问题的提出

1. 什么是子集、全集、补集？
2. 怎样判断集合间的关系？

知识讲解

1. 子集

设A,B是两个集合，若对于任意的$x\in A$，都有$x\in B$，那么A叫做B的子