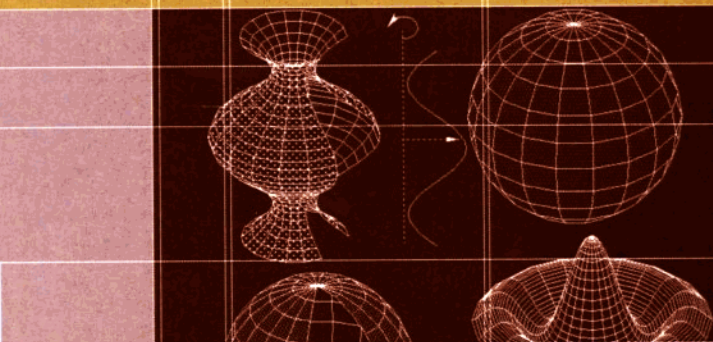


高等师范院校教材

中学数学教学论

ZHONGXUE SHUXUE JIAOXUELUN

陈建强
佟盛林
郎淑雷 编著



黑龙江人民出版社

前言

我国的中学数学教材教法源于前苏联的数学教材教法体系，而当下作为交叉学科的数学教育学，其发展是不够成熟的，是从传统的教学法向数学教育体系的一种发展和过渡。在这里我们把它们统称为数学教育类教材。

数学教育类教材有一个共同的目的——使师范生成为一名合格的中学教师。具体地说，就是为什么教？教什么？如何学？如何教等问题。为达到这样一个共同的目的，数学教育类教材是关注教育理论，还是侧重于教学实践？始终是其体系构建和内容选择，以及教师进行本门课程教学时的热点问题。数学教育学从这方面说更注重教育理论的探讨和介绍，但是基本上还是一般教育学+数学例子的模式；中学数学教材教法则侧重于教和学的方法，似乎更倾向于实践。本书则对教育理论进行深入探讨的同时，又把中学数学教学中每天都会遇到的问题——教学活动的设计纳入到教材体系中。另外在教学研究中除介绍教学研究方法和内容外，增加了“双微”的介绍，旨在为学生走一条教学与研究共同进步之路引导方向。

《中学数学教学论》是黑龙江省教改工程项目研究成果。全书共分为八章，每章的主要内容及编写意图如下：

第一章课程与课程改革，涉及数学课程与课程标准、教学大纲、课程改革等内容。随着基础教育课程与教学改革的不深入，课程与课程改革与中学数学教师的关系也越来越密切，这是数学教育发展成熟的表现，只有明确课程的含义，了解国际课程标准和课程改革的情况及课程标准与教学大纲的异同，才能做到成为数学课程的开发者和数学教材创造性使用者；

第二章数学的思想方法，主要对中学数学中涉及的数学思想和方法进行了介绍。数学教育的主要目的是培养合格数学素养的公民，因此，数学思想和方法就成为数学教育的重要内容；

第三章数学学习理论，主要论述了数学观，介绍了中外学习理论、数学学习的心理特征、数学学习的原则和方法等内容。数学观是影响数学学习的重要因素，也是对学生学习心理产生重要影响的内容，让学生形成一个动态合理的数学观，会对其数学学习方向有一个正确的引导；

第四章数学教学原则、模式和方法，主要对中学数学教学中所涉及的重要原则、常规模式和各种教学方法进行了介绍。明确教学原则可以把握教学改革的方向，不会被表象所迷惑，能够抓住改革的本质；而教学模式和方法的选择则是成功教学的必要条件；

第五章中学数学逻辑基础，研究数学概念、命题、推理、证明等基本问题，阐明逻辑基础知识与中学数学内容及其教学的联系，为具体的数学教学中深入理解数学知识、把握数学知识的教学奠定基础；

第六章中学数学教学设计,对中学数学教学设计的基本理论和方法,以及教学目标、概念命题、教学活动的教学设计进行了阐述。突出了设计的基本思路,特别是教学活动的设计对于师范生来说更具有实践性,也是把教学理论付诸实践的一种尝试;

第七章数学思维,其内容是探讨了数学思维的类型、品质、方法及思维能力的培养。数学素养从本质上说是形成数学思维,明确数学思维的相关理论,对于师范生在教学中如何使所教学生形成良好的数学素养提供了理论基础;

第八章数学教学评价与教学研究,本章介绍了数学教学评价理论、教学过程最优化理论及教学设计方案的评价与调整,并重点论述了中学数学教学研究的内容、方法等,为适应数学教育的长足进步,要成为研究型、创新型教师,必须学会如何进行数学教学研究。本章所介绍的“双微”研究案例对于师范生如何探讨教学中出现的问题提供了可供参考的模式。

总之,教材的编写本着继承与发展相结合的原则,注重理论与实践的有机结合,学习心理与教学理论相结合,教学与教学研究相结合,并力求做到体系合理、观点新、内容充实。

本教材由陈建强、佟盛林、郎淑雷、郭伟艳编著。教材的写作中我们参考了大量的相关著作和论文,虽然将主要参考文献列出,但不免会有遗漏,恳请作者原谅,并在此对我们所参考的文献的作者表示衷心的感谢!

编 者

2005.8

目 录

第一章 数学课程与课程改革	1
§ 1.1 课程与课程标准	1
§ 1.2 高中课程标准的国际比较	6
§ 1.3 课程标准与教学大纲的异同	9
§ 1.4 国内外课程改革概况	16
复习思考题	25
第二章 数学的思想方法	26
§ 2.1 数学思想	26
§ 2.2 数学方法	32
复习思考题	50
第三章 中学数学学习	51
§ 3.1 数学观	51
§ 3.2 中外学习理论	58
§ 3.3 中学生数学学习的心理特征	67
§ 3.4 中学数学的学习原则与方法	70
复习思考题	78
第四章 数学教学原则、模式和方法	79
§ 4.1 教学原则	79
§ 4.2 教学模式	90
§ 4.3 教学方法	104
复习思考题	111
第五章 中学数学逻辑基础	112
§ 5.1 数学概念	112
§ 5.2 数学命题	121
§ 5.3 数学推理	129
§ 5.4 数学证明	135
复习思考题	139
第六章 中学数学教学设计	141
§ 6.1 数学教学设计概述	141
§ 6.2 数学教材分析	143
§ 6.3 教学目标设计	156
§ 6.4 数学概念的教学	163

§ 6.5 数学命题的教学	172
§ 6.6 教学活动设计	177
复习思考题	201
第七章 数学思维	202
§ 7.1 数学思维的概述	202
§ 7.2 数学思维的品质	210
§ 7.3 数学思维的基本方法	215
§ 7.4 数学创造思维能力的培养	226
§ 7.5 问题解决	233
复习思考题	239
第八章 数学教学评价与教学研究	240
§ 8.1 数学教学评价理论	240
§ 8.2 教学过程最优化	242
§ 8.3 教学设计方案评价与调整	248
§ 8.4 中学数学教学研究	250
复习思考题	264
参考文献	265

第一章 数学课程与课程改革

§ 1.1 课程与课程标准

一、课程概述

(一) 课程的概念

“课程”一词在我国宋代出现在朱熹的《朱子全书·学问》中：“宽着其限，紧着课程”，大意是学习的范围和进程。而仅《国际教育大百科全书》（美国匹尔加蒙公司1985年出版）中就提到了九种定义。课程用于教育科学的专门术语，始于英国教育家斯宾塞（Herbert Spencer, 1820~1903）。作为教育科学的重要倡导者，他把课程解释为教学内容的系统组织。课程的定义随着社会的变化其内涵和外延也在不断变化，由于不同的教育主张和对课程的理解不同，对课程的定义也众说纷纭，莫衷一是，这可能是教育科学中最不统一、歧义最多的一个概念。我们可以对课程作如下理解。

课程的广义理解：是指“所有学科（教学科目）的总和”，或者“学生在教师指导下各种活动的总和”。狭义的理解：通常把一门学科或一类活动称为课程，如“数学课程”、“语文课程”、“技术课程”等等。因此，狭义的课程可以定义为：课程是为实现各级各类学校的教育目标而规定的教学科目及它的目的、内容、范围、分量和进程的总和，包括为学生个性的全面发展而营造的学校环境的全部内容。

(二) 课程研究的对象

现代课程理论研究的主要问题在泰勒的《课程与教学基本原理》中归结为四个最基本的问题：学校应努力达到什么教育目标？提供怎样的教育经验才能实现这一目标？如何有效组织这些教育经验？如何确定这些教育目标是否达到？总结起来就是，课程理论研究对象包括课程目标、课程设置、课程编制、课程评价等方面。

1. 课程目标

课程目标是根据国家教育方针和总体培养目标确定的对课程在知识、技能、能力和个性品质等方面应达到的要求作出的规定，是解决“为什么教”和“实现什么教育目标”的问题。研究课程目标应当确定出课程总目标和具体的课程目标，前者要求对某一阶段所有课程应完成的总任务提出要求，后者则要对具体学科的课程任务作出界定。一般来说，课程目标是一切教育活动的起点和归宿，是课程研究的首要问题。

2. 课程设置

课程设置主要解决“开设什么课程”和“组成怎样的课程体系（课程结构）”等问题。

课程设置是对学校的课程门类、课程目标、课程内容、课程要求及课程时间的研究和安排。研究课程设置可以产生若干文件,如课程计划、课程标准等。

(1) 课程计划。课程计划也称为教学计划,是对学校课程的总体规划。课程计划应当对某一类学校开设课程的门类,课程目标与各学科的具体目标、课程内容、时间分配等作出明确的规定,以便形成科学的课程体系。

(2) 课程标准。课程标准是各学科课程的具体规划。它是依据课程计划制定的,应当对学科课程在教学目的、教学内容、教学方法、教学要求等方面作出具体规定。

3. 课程编制

研究课程编制主要解决课程内容(教学内容)的选择和编排问题。

(1) 课程内容的选择。一般应根据国家的教育目标、课程计划、课程标准以及社会对培养人才的需求来进行。选择的内容不仅应当是各个学科最基本的知识,而且要与社会的政治经济发展相适应。

(2) 课程内容的编排。对于已经确定的课程内容,如何组织安排使之成为便于教与学的内容体系,关键在于处理好知识的逻辑结构与学生的心理结构的关系。这里需要研究的问题有两个:一个是要确定课程内容编制的原则,即探讨和分析教材编制的规律;另一方面要从学生的学习心理规律出发,把课程内容组织成既符合知识本身的逻辑要求,又符合学生的认知规律的教材体系。

4. 课程评价

课程评价就是按照教育目标提供的标准,系统地收集信息,运用科学的评价方法对课程及其实施效果作出价值判断的过程。一般来说,课程评价包括课程目标评价、课程计划评价、课程标准评价、教材评价等许多内容。在实施评价中,要设计出科学的评价指标体系,运用定性与定量相结合的测评方法,作出评价结论,并制定出改进课程的方案,以促进课程改革。

二、制定课程标准的一些基本问题

学校课程的设计已有多种多样的理论,儿童中心主义、要素主义、结构主义、改造主义等等。这些理论涉及学校的政治、语言、外语、科学、人文、艺术、体育,以及各种实践性的课程门类,虽在指导思想上与数学课程有一定的关联,但毕竟讨论的课题更为宽泛,我们将较少涉及。

国家数学课程体现了国家对公民数学素质的要求,对学校的数学教学和数学教师的工作具有约束力。在这个意义上说,《国家数学课程标准》确实是数学教育的核心。另一方面,国家对课程实施也采取多样化、因地因时制宜的方针,实行国家、地方、学校三级管理的体制。课程标准不但可以在学术上讨论,也允许新方案的试验,甚至拟订“校本课程”。因此,我们提出以下的一些基本问题和读者探讨,以加深对国家课程标准的理解,推动新世纪国家数学课程标准的实施,在试验、探究、改革的过程中,不断推进我国的数学课程建设。

(一) 数学课程的发展趋势是:变革是绝对的,稳定是相对的

纵观历史上的数学教育教学改革,我们发现数学课程改革在历次课程改革中总是冲在前面,中外几乎惊人的一致。

◎1900年英国的培利改革、1958年由美国开始的“新数学”运动,以及中国在1960年“打倒欧(几里得)家店”的改革,都是数学带头。但是,每次改革往往因过激而失败。美

国有从“新数学”到“回到基础”的阶段，中国则有“调整”阶段，也是回到“双基”。这样一来，数学课程的改革似乎失败的比较多。曾经有这样的说法：“中小学数学课程无非是算术、代数、几何那些东西，基础就是基础，一万年以后也是如此。”但是，这种观点站不住脚，请看历史的变化。

◎1906年，京师大学堂使用的（代数学）教科书，还使用“天地人元”代替 x 、 y 、 z 、 w 等表示未知数，“甲乙丙丁”代替 A 、 B 、 C 、 D 表示已知数，不准使用阿拉伯数字。

◎20世纪30年代的算术，以植树问题、流水问题、年龄问题、工程问题、行程问题等为主要内容，解题程式满天飞。以不使用代数工具为荣。

◎欧美传入的教科书，代数学以解方程为主线，以学生掌握方程理论为最高目标。几何学以解难题为风尚，西摩松线、九点圆是初中毕业考试的题目。三角恒等变换繁复，成为检验学生运算能力的指标。

◎20世纪50年代，苏联的数学教科书取代欧美教材。数学课程体系以“函数”为中心展开，“运动”进入数学。同时，将欧美教材中的“微分导数”、“概率统计”、“簿记会计”悉数扫地出门。

◎20世纪60年代以来，微积分、概率论、矩阵变换几进几出，至今还在少数省市试验。但是，大势所趋，早晚要进入中小学数学课程。唯一的例外是“集合——映射”语言的进入，没有遇到任何阻力，据说是因为它是“现代数学”的基础。其实是中国数学教育偏重“形式化”和“技巧性”的缘故。与此相反，对于新加入的数学思想往往不易接受。

◎近几年来，平面几何的内容一减再减，圆周角、弦切角等内容也岌岌可危。和差化积公式不要求记忆，考试时写在试卷上，变化不可谓不大。

总之，变化是绝对的，世上没有一成不变的东西。当然，教育领域的变化，必须步履稳妥，切忌重复历史上冒进的错误。50年代以来，我国的数学课程长期比较稳定。文化大革命十年的变化，到80年代基本恢复原样。

20世纪90年代，中国的数学课程开始发生变化。新课程于1998年在江西、山西两省和天津市首先试用，但是，改革的力度尚嫌不足。面对21世纪的挑战，中国数学课程已加大改革力度。以求适应时代需要，跟上社会前进的步伐，其影响，将在今后几十年中逐步呈现出来。

（二）课程改革的基本趋势是既要跟上时代的步伐，又要保证必要的基础

我国和世界各国的数学课程改革，无一例外地以跟上时代要求、体现“先进性”为主要诉求，但是，许多数学课程的改革又往往因“削弱基础”而失败。“回到基础”使课程改革者竟以谈“基础”而色变。但是，世上的课程改革，没有不改革基础的，成功的改革，必定会以提出课程的新“基础”作为标志。以下是一些有关“基础”的议论。

◎20世纪初年，已是清朝晚期。当时的基础，无非是“四书五经倒背如流，八股文作法烂熟于胸，一手毛笔字规范工整”。但是，这样的基础，很快被新学校的各种课程替代。时至今日，还有谁主张回到这样的“基础”呢？

◎在汽车发明之前，学习骑马是一项基本功。但是，今天的人们驾驶汽车会是一项“基础要求”。当然，走路仍然是人们的最基本要求，用汽车代步，还必须能走到汽车旁边，所以“走路+骑马”、“走路+驾车”，都是各种不同时期的基础。单纯强调“走路”是基础，既不主张骑马，也不要求驾驶汽车，岂不是太“保守”了？

◎基础和创新的^①关系。打好基础的目的是为了盖房子，或者为了踏着“基础”去摘果子。打好花岗岩的方方正正十分漂亮的基础，固然不错，但是，在这样的基础上盖一间茅草屋，也是不协调的。我们为了摘树上的苹果，可以强调扎实的基础，浇筑结实的混凝土平台，但是为了摘到苹果，也可用乱石堆起来，只要能站稳就行了。那种不谈创新、不讲未来、不抬头看发展，而是一味“埋头打基础”，恐怕也是不正确的想法。

◎双基不能仅限于“代数运算熟练”和“逻辑推理严谨”，归纳、猜想、创新的思维方式、广阔的数学视野和信息技术手段的运用，都应该是“新双基”的有机组成部分。

◎许多数学家成功之后，总是说中小学时代的数学基础十分重要，这是完全正确的。这种极端严格的基础，对日后的数学家固然受益无穷，但对从事其他行业的人来说，恐怕并非福音。也许太难，也许无用，也许反感，应当仔细品味。其实，成功数学家也常说，许多基础是自己摸索出来的。1958年以后，美国及西方各国，中小学数学课程中已经把严密的平面几何去掉了。那么是否美国数学家的几何学基础就不行了，影响了美国数学的成长？实际上并非如此，美国的数学家在攀登数学高峰时，自己就补上了。一个数学家在注意到一个命题之后，能够很快补上研究它必需的基础，也许是他们取得成功的重要原因。为学生设计基础数学知识固然重要，但结合创新要求学会自己打基础，也许同样是基础的一部分。

◎胚胎式发展的基础也许是永远的规律。人的胚胎发展，在短短的10个月内，开始像一条鱼，历经生物发展的各个阶段最后成为最高级的生物——人。历史在不断延伸，社会在不断发展，知识的总量在指数式增长，一个课程的基础不动是不行的。同样，任意跨越认识阶段，不顾发生过程，削减“基础”也是不行的。美国及西方的“新数学”运动，跳过十进制直接讲二进制，结果学生不会做普通的加法了，自然要失败。文化大革命期间，我国用“画线”代替几何，用“配农药”代替代数，结果被时代抛弃。现代数学知识成倍增加，一万年以后怎么办？合理的解决办法是胚胎式地整合所有知识，随着人的认识能力的不断提高，缩短在各个重要关节点的展开时间，最后完成人类认识世界的大体过程。今日的数学课程中的基础，也应该是这样的一种胚胎式整合，而不是随心所欲、跨越式地削减。

◎在当今的知识经济时代，中小学课程的基础不妨界定为以培养学生的创新数学意识为最高诉求，以和计算机技术相适应的数学需要为改革重点。全面地胚胎式地整合各种基础性数学内容，使学生在自主参与数学活动的基础上，获得未来社会中国公民应该具备的基本数学素质。这样，从20世纪50年代以来逐步形成的数学双基必然需要重新审视，保持精华，删繁就简，提高水平，综合平衡。

（三）数学课程和教材编写上的整体考虑和对策

数学课程和教材的编制是各国都在研究的重要课题。1986年，国际数学教育委员会在科威特组织了一个专门的研讨会，会上总结了以下十个问题。

1. 课程设计的理念是“自上而下”还是“自下而上”

讨论数学课程，常常听说“大学内容要放到中学，中学内容要下放到小学”，这是“自上而下”的考虑。英国著名的考克科劳夫特报告（数学课程设计）认为，要从社会对公民的要求出发设计数学课程，然后视每个人的能力和发展学习不同的数学，这是“自下而上”的考虑；

2. 课程设计内容是“窄而深”还是“广而浅”

一般来说，西方的数学课程面很宽，微积分、概率统计、向量、分形、离散数学、计算

机语言等都有涉及。但是都不深,介绍一下有所了解就行了,着眼于常识与修养。中国的情形则是“窄而深”,内容少,但挖得深。升学的严酷竞争使得“只读教材”根本不能升到上一级学校。“深挖洞”式的练习题把课程标准和教材的内容远远抛在后面,这是考试文化带来的弊病。适度的广、恰当的深是课程追求的平衡点;

3. 课程设计的形式是混合式还是分科式

中学分为代数、几何、三角等由来已久。这对学习者集中精力领会各科的精神实质,会有好处。但是,数学是一个整体,数与形彼此结合,相互渗透,更显数学魅力,同时,混合编排可以避免过度追求系统完整。我国的数学教材逐渐由分科转向综合,各科仍相对独立;

4. 课程设计层次是选修式和统一式

义务教育阶段为全国统一式。但是各地区乃至各个学校都可以有自己的课程,以供选择。高中现在有文理分科,今后的高中数学课程标准将提供更多的选择性;

5. 课程设计的结构是螺旋式还是直线式

我国一向强调知识的系统性,多崇尚直线式安排,实行大循环。例如,初中学平面几何,高中学立体几何,截然分开。今后的趋势是实行小循环,小学、初中都会出现立体几何内容。但是,中国的习惯仍旧会相对地求完整,不会把内容割裂得很碎;

6. 课程设计体现的教学方法是过程式还是结论式

国外曾经流行发现式教学方法,相应地有发现式教材。这种教材重过程,介绍思考数学问题的原始想法,结论最后得出。中国的传统数学教材表述非常简明,定义——定理——证明——推论,全部是形式化的结论。正如弗赖登塔尔所说:“把火热的思考变成了冰冷的美丽”。现在,这种过分形式化的叙述方式正在改变,但是基本格局还会偏重于结论式的安排;

7. 课程设计的体系是演绎证明和适度说明

在强调形式化的时代,课本上的一切都必须严密地进行逻辑证明,否则便是犯了“科学性”的错误。近来,由于数学教育趋于大众化,高度的形式化演绎势难维持,“演绎证明、实验证实、举例确认”等方法都可以采用。适度的说明同样有数学价值,例如,平面几何中不从平行公理出发进行严格的演绎展开,而是用“量一量”的方法,经验地确认“三角形内角和为 180° ”;

8. 课程设计的文化底蕴是否具有民族风格

数学是一种文化,必然具有各个民族的特色。但是,现今的数学都是按古希腊的体系安排展开的,应该逐渐体现一定的民族特色。国际上有“民族数学(Ethnomathematics)”的研究。国内也有少数民族地区的数学研究,如贵州师范大学对水族数学教学、西北师范大学对藏族学生数学学习的调查等,都有鲜明的民族特点;

9. 课程设计的趣味性

中国的数学教材正在走向更多的趣味性,联系日常生活,提供有兴趣的例子,印刷也更精美,教材中出现卡通人物,已经常见;

10. 课程参考书

数学教材不能只是印了薄薄的一本就算完事,应该有一整套与课程标准相联系的参考书。内容更加丰富,深度各不相同,让不同的学生学习不同的数学,英国 SMP 教材就有几十种参考书。我国盛行配套的为考试服务的复习解题资料,好的复习资料书也很重要,但是,过多的应试用书是有害的。

以上十条是从数学课程标准和数学教材的视角进行考察的,同时,也是使用教材的老师需要审视的。

三、数学课程标准

课程设置是课程研究的核心问题,课程计划、课程标准,就是研究学校课程设置时所产生的重要文件。课程标准是国家对公民在某一方面或领域的基本素质的要求,初高中数学课程标准是国家对初高中学生在数学领域的基本素质的要求。

一般来说,数学课程标准应包括下述内容:第一,阐述数学科学与数学课程的地位和作用;第二,数学课程的教学目标;第三,教学内容的确定与安排,明确选择与编排的原则;第四,教学中应当注意的问题,即关于数学教学原则及学习评价方法的提示;第五,教学内容与教学要求。

我国数学课程标准的制订始于近代,1923年公布的《中国新学制算学课程标准》标志着数学课程建设进入了规范化的新阶段。多年来,在教育教学改革的逐步深入过程中,我国的数学课程标准经过了无数次修订,逐渐完善。

§ 1.2 高中课程标准的国际比较

我国本次基础教育课程改革分为两个阶段实施:2000—2005年,完成新课程体系的制定、实验和修订;2005—2010年,逐步在全国全面推行新课程体系。其中,高中阶段的国家数学课程标准已经完成了实验稿,已听取完意见,正逐步付诸实践。这里先就高中数学课程的国际情况作一比较。

一、高中数学课程国际比较概述

依普通高中入学率的多少,各国高中数学课程可分为以下两种类型:

1. 低入学率

英、法、德、俄等欧洲国家,学生在初中毕业后分流,大多数学生进入职业学校,少数学生进普通高中。进入高中基本上就可以读大学,完全高中实际上相当于大学预科,课程内容远远超过我国现行的大纲。

例如,德国完成高中教育的人数占同龄人的20%,巴伐利亚州通过完全中学考试的人数占同龄人的18.3%,英国、法国的情况大体相同。俄国只有大约一半的学生进入10、11年级,这表明俄罗斯的完全中学毕业生在同龄人中所占的比例也会低于50%。

2. 高入学率

以美国、日本为代表的国家和地区,绝大多数学生进入高中,到大学才实行分流。美国实行12年义务教育,日本进入高中的学生也在95%以上。由于学生众多,数学课程的必修内容十分浅显,而且一降再降,但是,美国和日本的高中实行学分制,学区和学校的差别很大,学生的学习差异明显,优秀学生仍然可以获得数学学术水准很高的教育。

二、各国高中课程都进行了适当的分层

学生进入高中阶段,在生理和心理等各方面都已经接近“成人”,需要有更大的数学学习的选择空间。以下是各国数学课程分流、选修的情况。

(一) 德国 10年级毕业后读11、12、13年级(有4个州仅11、12年级)。11年级为共

同数学课, 12、13 年级则分流为三个系列的数学课程:

◎语言文学艺术类

◎社会科学类

◎自然科学技术类

学生必须从这三个系列中选择一种。

(二) 法国 法国高中的学制为 3 年。高一为公共数学课; 高二和高三毕业班为选修, 分为 3 个系列:

◎文学艺术类

◎经济学和社会科学类

◎自然科学类

学生必须从这三类中选择一种。

(三) 英国 英国实行到 16 岁的义务教育, 然后实行两年“第六学级”的高中教育, 也是预科性质。数学水平为两种:

◎高级水平 (A 水平) 的课程, 能获得水平证书的学生只占同龄人的 7%。

◎半高级水平 (AS 水平), 内容约为水平的一半。

持不同证书到不同的大学和系科申请入学。

(四) 俄国 俄罗斯实行 9 年义务教育, 然后读 10、11 两个年级的高中, 入学率约为同龄人的 50%。近年来, 俄罗斯的课程呈现多样化, 许多地方和组织自行制定课程标准。有这样一份国家推荐的俄罗斯高中数学标准, 没有学生的系列选修课, 基本上是统一的大纲, 但在教学中实行 A、B 两种水平, 由教师掌握。俄罗斯有全国统考, 由各大学自行出题考试, 所以实际上有不同的水平要求。

(五) 美国 美国的高中是义务教育, 但没有全国统一的教学标准, 由各州自定, 教材由各学区自选。因此, 数学教学自然呈现多样性。美国的民间组织“全国数学教师协会”(NCTM) 发布的《2000 数学课程标准》, 影响很大, 但毕竟没有约束力。这份《标准》只有教学内容及教学建议, 没有教学时数的规定。值得注意的是, 美国有许多为优秀学生设置的课程。1955 年, 美国“教育测试中心”(Educational Test Service) 建立了《高级分流计划》(Advanced Placement Program), 为高中生提供大学水平的课程, 学生通过统一的 AP 入学考试, 进入大学后可以免修, 承认学分。AP 课程有 18 门类的 33 门课程, 其中与数学有关的两门微积分课程、一门数理统计课程、两门计算机学课程。

(六) 日本 日本实行九年义务教育, 但是实际上每人都进入高中。因此, 高中学生的数学水平参差不齐。2003 年实行了高一设必选课, 二者挑一, 数学基础或数学 I, 高二以后有数学 II、数学 III、数学 A、数学 B、数学 C 等多种选择。实行学分制, 最少的修完“数学基础”(2 学分) 即可毕业; 最多的修满全部数学课, 可达 18 学分, 差异之大令人吃惊。

三、高中课程内容比较

(一) 所有国家的高中课程都有微积分

德、法、英、俄等国都是必修课, 日本、美国则是选修课。自从 1908 年, 德国数学家 F. 克莱因主张微积分进入中学以来, 已成为国际潮流, 无一例外。20 世纪 50 年代中国学苏联, 没有微积分, 但是后来苏联的 11 年制高中都有微积分。

(二) 大多数国家的必修数学课程都有概率统计

高深的内容优先列入“身边的统计”专题，并在选修课里大量出现。俄罗斯有强大的概率学派，却在必修课中不设概率统计。但是俄罗斯有大量的数学学校，这些学校虽然也是11年制，却安排很深的概率统计内容，包括定理、可靠性理论、假设检验等。

(三) 几何学的安排呈现多样化

日本 高中有平面几何选修课，高三选修有少量的向量几何。

美国 没有综合法的几何学，但有向量矩阵表示的变换几何。

英国 没有综合法的立体几何，用向量方法处理线面关系。

法国 少量的综合平面几何、向量处理立体几何，图形变换及矩阵表示。

德国 非常艰深的数学，超过我国大学的“高等数学”，但是只有不多的向量几何，重视变换几何。

俄国 在所有国家中综合几何要求最高，6个国家标准中唯一的列有“三垂线定理”，同时要求向量几何、变换几何。

(四) 普遍重视数学建模和联系实际

德国必修课中有37处要求联系物理、化学、经济、日常生活，以及哲学观念，他们还强调球面几何、球面三角，建立的模型包括人口增长、质量控制、疾病传染、抽样试验等。

美国的NCTM数学标准，包含大量的实例，其中用迭代法处理“按时服药以保持药物浓度”的例子就很简单而精彩。

英国是以应用数学见长的国家，他们的数学课程里包括“力学”在内。

日本的“数学基础”课程，其内容是：

(1) 数学和人类的活动；(2) 用数学理论观察有关的社会生活；(3) 身边的统计，主要培养学生的数学兴趣和用数学眼光分析自然界和社会现象的意识。

(五) 数列、迭代、数学归纳法、二项式定理等作为离散数学的内容受到重视

这些内容只限于“理科要求”，社会科学往往不列入（数列与级数除外）。复数在美国、日本课程中消失，俄罗斯在“数理学校”中才增加“复数”，德国、法国、英国的标准都列入选修内容。

四、几点结论与思考

第一，与欧洲国家相比，我国高中生的知识总量比较少，这不利于“尖子人才”的成长；

第二，我国高中生约有一半升入大学。因此，必须使不同的人学习不同的数学，即增加学生学习数学的选择性。在公共数学课之后，分为若干系列课程是欧洲国家的普遍做法，学分制似乎也是必然趋势。即使高一的“公共基础数学课”，也应该分为几个水平，以适应不同学生的需要。初步认为，最低水平也许只要掌握普通知识分子所应具备的数学常识即可；

第三，函数与微积分、概率统计、向量几何学是世界各国高中数学的核心内容，这些部分恰是我国数学课程的弱点；

第四，增加数学和其他科学及日常生活的联系是一个总趋势。计算技术和数学建模的教学将日益重要；

第五，数学和文学艺术、社会科学的联系日益紧密，使优秀人才文理结合，提高数学修养会继续得到支持。数学与人类文化的联系应当列入中学内容。

§ 1.3 课程标准与教学大纲的异同

教学大纲是国家教育行政部门依据《课程计划》制定的法令性文件。它以纲要的形式界定数学课程的内容、范围和体系,提出教学要求,并规定各部分内容的教学时数。

很多中学教师认为课程标准与教学大纲没有本质的区别,只是换了一种说法。是不是这样呢?现行的课程标准与原教学大纲之间到底有什么区别?下面我们一起来以高中数学教学大纲和高中数学课程标准为例对它们的异同进行分析比较。

《普通高中数学课程标准》与现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》相比,由于现行高级中学数学教学大纲是在原有大纲基础上吸收了国内外高中数学课程改革的一些成果,作了较大幅度的修改后于2002年4月由国家教育部颁发的,因而两者在刻画数学活动的三个维度(知识与技能;过程与方法;情感、态度、价值观)方面的要求有较多相似之处,并且有所发展,主要体现在如下几个方面:

一、保证必要的基础知识和基本技能,适当控制了内容难度

在高中阶段,学生学习内容的主体仍是集合与简易逻辑,函数,数列,三角,不等式,向量,空间几何,解析几何,排列,组合,二项式定理,概率,统计,复数和极限与导数的基本知识,并新增了算法,框图,推理和证明的基本知识,要求这些内容的呈现方式应展现由具体到抽象的过程,努力体现数学知识中蕴涵的思想方法而不要在技巧、难度上作过高要求。

与义务教育阶段不同,高中数学课程应具有多样性与选择性,使得不同的学生在数学上得到不同的发展。为此,现行高中数学教学大纲将教学内容分为必修和选修两个部分,选修又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ;课程标准既为学生提供了多层次、多种类的选择以促进学生的个性发展和对未来人生规划的思考,也为学生提供了选择和发展的空间,学生可以在教师的指导下进行自主选择,初步选择以后还可以进行适当的转换,调整其选修内容的设置,较现行教学大纲内容更多,比重更大,层次更丰,涵盖面更广。

现行高中数学教学大纲已在原大纲的基础上删去了那些知识过于陈旧落后,过于繁杂,不利于学生发展的传统内容,削弱了因现代技术的发展而滞后的内容,控制了容易导致人为综合和变相拔高的内容。课程标准则在内容标准中仅规定了学生在相应学段应该达到的基本水平,提出教材编者及各地区、学校,特别是教师应根据学生的愿望及其发展的可能性,实施因材施教。

二、重视学生的自主探索,增强和强化研究性学习活动

研究性学习主要是指对某些数学问题的深入探讨,或者从数学角度对某些日常生活和其他学科中出现的问题进行研究,充分地体现学生的自主活动和合作活动。使学生在自由探索的过程中真正理解一个数学问题是怎样提出来的,一个数学概念是如何形成的,一个结论是怎样探索和猜测到的以及如何应用的。

现行高中数学教学大纲提出,在数学教学中要求增强应用数学的意识,一方面应使学生通过背景材料,进行观察、比较、分析、综合、抽象和推理,得出数学概念和规律;另一方面要使学生接触数学建模的能力,为此,安排了四次实习作业和九个研究性学习的例子。

课程标准通过设立“数学建模、数学探究、数学文化”等学习活动为学生提供了自主学习空间。有助于学生体验数学在解决问题中的价值和作用,体验数学与日常生活和其他学科的联系,体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程,增强应用意识,有助于学生初步了解数学概念和结论产生的过程,初步理解直观和严谨的关系,初步尝试数学研究的过程,体验创造的激情,建立严谨的科学态度和不怕困难的科学精神。有助于培养学生勇于质疑和善于反思的习惯,培养学生发现、提出、解决数学问题的能力,有助于发展学生的创新意识和实践能力。通过在高中阶段数学文化的学习,学生将初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用,体会数学科学中的科学价值、人文价值,开阔视野,寻求数学进步的历史轨迹,激发对于数学创新原动力的认识,同时,受到优秀文化的熏陶,领会数学的美学价值,从而提高自身的文化素养和创新意识。

三、激发学生的好奇心,培养创新精神和实践能力

现行高中数学教学大纲提出,培养学生创新意识和实践能力要成为数学教学的一个重要目标和一条基本原则。在教学中要激发学生学习数学的兴趣和好奇心,使学生通过独立思考,不断追求新知,鼓励学生质疑问难,提出自己的独到见解,启发学生发现、提出、分析,并创造性地解决问题。使学习数学成为再发现,再创造的过程。

课程标准提出让学生形成积极主动、勇于探索的学习方式,认为学生的数学学习活动不应仅限于对概念、结论和技能的记忆、模仿和积累,要提倡动手实践自主探索、合作交流、阅读自学等学习数学的方式。这些方式有助于发挥学生的主观能动性,使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。

课程标准充分肯定我国数学教学具有重视基础知识教学、基本技能训练和能力培养的传统,新世纪的高中数学课程应发扬这种传统,与此同时,随着时代的发展,特别是数学的广泛应用和现代信息技术的发展对社会各个领域的影响,数学课程设计和实施应重新审视基础知识、基本技能和能力的内涵,形成符合时代要求的新的“数学基础”。“打好基础”与“力求创新”是数学学习过程中不可或缺的两个方面,课程标准提倡在打好基础的同时,自始至终体现创新精神,二者不可偏废。数学课程的设计应当具有一定的开放性,为学生提供“提出问题、探索思考”的空间。

四、提高学生的数学思维能力

现行高中教学大纲提出,要努力培养学生的数学思维能力,包括空间想象、直觉猜想、符号表示、运算求解、演绎证明、体系构建等诸多方面,能够对客观事物中的数量关系和数学模式作出思考和判断。

课程标准认为提高学生的数学思维能力是数学教育的基本目标之一。人们在学习数学和运用数学解决问题时,不断地经历直观感知、观察发现、空间想象、抽象、符号表示、运算求解、演绎证明、反思建构等思维过程,这些过程是数学思维能力的具体体现,它们有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式作出思考和判断,在形成理性思维能力中发挥独特的作用,有助于学生不迷信权威、不感情用事、不含糊马虎。

五、运用科学的教学方法,帮助学生打好基础,发展能力

现行高中数学教学大纲提出,数学教学要发扬重视基础知识教学、基本技能训练和能力培养的传统,与时俱进,重新审视基础知识、基本技能训练和能力的内涵。教师在教学中的主导作用必须以确立学生主体地位为前提,要依据教材,又不囿于教材,把学生的知识、经

验、生活世界作为重要的课程资源鼓励学生自主学习, 教学过程中要发扬民主, 师生相互尊重, 密切合作, 共同探索。要鼓励学生质疑、探究, 让学生感受和体验数学知识产生、发展和应用的过程。

课程标准认为教学中应强调对基本概念和基本思想的理解和掌握, 熟练掌握一些基本技能。对一些核心概念和基本思想(如函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等)要贯穿于高中数学教学的始终, 帮助学生更好地理解和掌握。由于数学高度抽象的特点, 在教学中要引导学生经历从具体实例抽象出数学概念的过程, 在初步运用中逐步理解概念的本质, 注重体现基本概念的来龙去脉。要重视运算、作图、数据处理、算法、科学型计算器的使用等基本技能训练, 但应注意避免过于繁杂和技巧性过强的训练。

课程标准认为教学中要与时俱进地审视基础知识和基本技能。如统计、概率、导数、向量、逼近(函数零点与方程的根的关系)、算法等内容已经成为高中数学的基础知识。对原有的一些基础知识也要用新的理念来组织教学。例如, 空间几何的教学可从两个视角展开, 从整体到局部, 从具体到抽象, 而且应注意用向量的方法处理有关问题; 不等式的教学要关注它的几何背景和应用; 三角恒等变形的教学应加强与向量的联系, 简化相应的运算和证明。又如, 口头、书面的数学表达是学好数学的基本功, 在教学中应予以关注。

六、重视数学教学的育人功能

现行高中数学教学结合数学教学内容和学生实际对学生进行思想品德教育, 逐步树立实事求是、一丝不苟的科学精神, 是数学教学的一项重要任务。要用辩证唯物主义的观点阐述教学内容, 使学生领悟到数学来源于实践又反过来作用于实践。从中体会反映在数学中的辩证关系, 从而受到辩证唯物主义观点的教育。应该通过数学教学激发学生的民族自尊心和凝聚力, 努力使学生形成国家和民族振兴而努力学习的志向。要阐明数学的产生和发展的历史, 使学生了解国内外的古今数学成就, 以及数学在现代科学技术、社会生产和日常生活中的广泛应用。要陶冶学生的情操, 培养学生勤于思考的习惯、坚韧不拔的意志和勇于创新的精神。帮助学生通过学习数学养成良好的学习习惯, 认识数学的科学意义、文化内涵, 理解和欣赏数学的美学价值。

课程标准提出要关注数学的人文价值, 促进学生科学观的形成。认为数学是人类文化的重要组成部分, 是人类社会进步的产物, 也是推动社会发展的动力。数学教学中应引导学生初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用, 体会数学的科学价值、应用价值、人文价值, 开阔视野, 探寻数学进步的历史轨迹, 使学生受到优秀文化的熏陶, 以提高其文化素养, 养成求实、说理、批判质疑等追求真理的精神。在教学中, 应尽可能结合高中数学课程的内容, 介绍一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物, 反映数学在人类社会进步、人类文化建设中的作用, 同时也反映社会发展对数学发展的促进作用。建议老师向学生介绍以下内容: 欧几里德的公理体系对人类理性思维、数学发展、科学发展、社会进步的重大影响; 笛卡尔创立的解析几何, 牛顿、莱布尼兹创立的微积分, 反映了数学与社会发展的相互促进和推动作用; 概率论开创了对随机现象的认识; 数系的发展和扩充过程, 反映了数学内部动力、外部动力以及人类理性思维对其产生和发展的作用。

七、倡导现代信息技术的应用

现行高中数学教学大纲在教学建议中提出, 在教学过程中, 应有意识地利用计算机和网络等现代信息技术, 认识计算机的智能画图、快速计算、机器证明、自动求解及人机交互等

功能在数学教学中的巨大潜力,努力探索在现代信息技术支持下的教学方法、教学模式。要因地制宜,积极稳妥地在数学教学中推广使用现代信息技术。要重视教学设计,实现教师与专业信息技术工作者的优势互补。设计和组织能吸引学生积极参与的数学活动,支持和鼓励学生运用现代信息技术学习数学、开展课题研究,改进学习方式,提高学生的自主学习能力和创新意识。

课程标准提出要利用现代信息技术,改进教与学的方式,提高教学质量,认为现代信息技术的广泛应用正在对数学课程内容、数学教学、数学学习等产生深刻的影响。信息技术在课程教学中的使用是时代的要求,如何在教学中恰当地使用信息技术来呈现以往课堂教学中难以呈现的课程内容,更应重视信息技术与课程内容的有机整合,通过信息技术,开发与利用课程资源。教学中,应尽可能使用科学型计算器、计算机及软件、互联网,以及各种数学教育技术平台,加强数学教学与信息技术的结合。教师应恰当使用信息技术,改善教学方法和学生的学习方式。引导学生借助信息技术学习有关数学内容,探索、研究一些有意义、有价值的数学问题。但应注意信息技术不能代替学生的思考,也不能代替教师的作用。

八、与现行高中数学教学大纲相比的较大变化

从某种意义上说,数学课程标准带来了一场教育观念的革新,一场人才培养模式的革新,一场课堂教学方式、学生学习质量以及日常教育教学管理、评价等等一系列的革新,与现行高中数学教学大纲相比发生了较大的变化,主要表现在数学课程理念、课程标准结构、课程内容、课程实施等几个方面。

(一) 数学课程理念的变化

数学课程标准提出,高中阶段的数学课程是义务教育后普通高级中学的一门主要课程。它是参加社会生产、日常生活的基础,也是学习高中物理、化学、计算机等课程和进一步学习的基础,对于培养学生的创新意识和应用意识,认识数学的科学和文化价值,形成理性思维、发展智力有积极作用。因此,使学生在高中阶段继续受到数学教育,提高数学素养,对于提高全民素质,为培养人才打好基础是十分必要的。高中阶段又是学生成长和个性发展的重要时期,高中的数学课程应为优秀人才的培养提供发展空间。基于这些认识,课程标准提出了如下的基本理念:

数学课程应突出体现基础性、多样性和选择性,使数学教育面向全体学生,实现人人学有价值的数学,人人都能获得必需的数学,不同的人在教学上得到不同的发展。

随着时代的发展,特别是数学的广泛应用和现代信息技术的发展对社会各个领域的影响,数学课程的设置和实施应重新审视基础知识、基本技能和能力的内涵,形成符合时代要求的新的“数学基础”。

数学学习内容应当是现实的、有意义的、富有持久性的,这些内容要利于学生主动地进行观察、猜测、验证、推理与交流数学的本质。数学课程“要讲推理,更要讲道理”,通过典型例子的分析和学生自主探索活动,使学生理解数学概念、结论的形成过程,体会蕴涵在其中的思想方法,追寻数学发展的历史足迹。

数学的教学活动必须建立在学生的认知发展水平和已有的知识经验基础之上,要有利于学生形成积极主动、勇于探索的学习方式,有利于提高学生的数学思维能力,有利于发展学生的数学应用意识。

数学课程应适当介绍数学发展的历史、应用和趋势,数学对推动社会发展的作用,数学