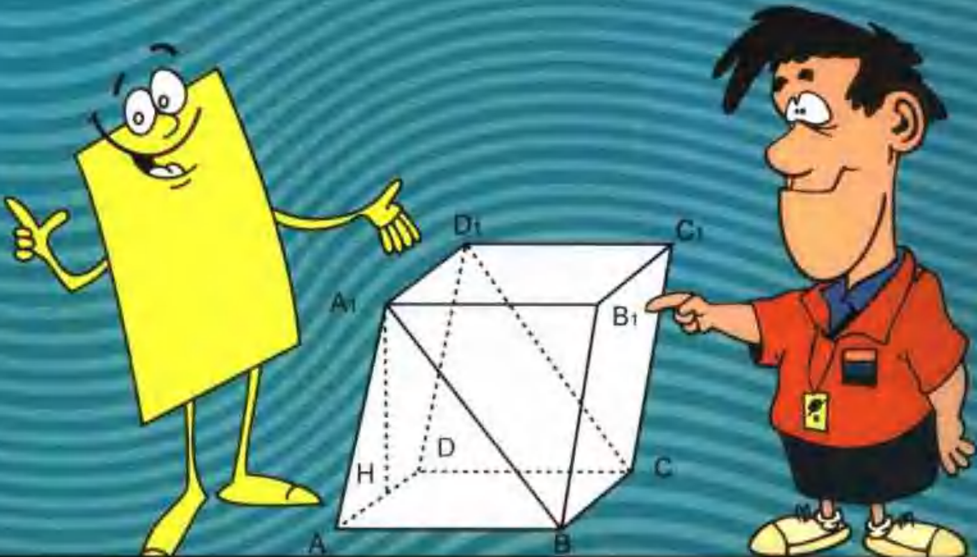
高中精学巧练丛书

上海市 松江二中 编写



高二数学（试验本）

精要点拨与能力激活

丛书主编/乔世伟　副主编/徐界生　本册主编/孙金明

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高中精学巧练丛书

高三数学(试验本)

精要点拨与能力激活

丛书主编　乔世伟

副 主 编　徐界生

本册主编　孙金明

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高三数学(试验本)精要点拨与能力激活/乔世伟主编;孙金明本册主编. --上海:华东理工大学出版社,2005.7

(高中精学巧练丛书/乔世伟主编)

ISBN 7-5628-1760-X

Ⅰ.高... Ⅱ.孙... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.O634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第074304号

高中精学巧练丛书

高三数学(试验本)精要点拨与能力激活

编　　写　上海市松江二中

丛书主编　乔世伟

副 主 编　徐界生

本册主编　孙金明

责任编辑　钱四海

封面设计　戚亮轩

责任校对　张　波

出版发行　华东理工大学出版社

地　址:上海市梅陇路130号,200237

电　话:(021)64250306(营销部)

传　真:(021)64252707

网　址:press.ecust.edu.cn

印　　刷　江苏省通州市印刷总厂有限公司

开　　本　787×1092　1/16

印　　张　13.75

字　　数　343千字

版　　次　2005年7月第1版

印　　次　2006年6月第2次

印　　数　8051—11080册

书　　号　ISBN 7-5628-1760-X/O·146

定　　价　18.00元

高中精学巧练丛书编委会名单

前　言

本丛书可谓我校《高中教学精华丛书》的新生代。

《高中教学精华丛书》自1996年8月初版以来，即受到广大中学师生的普遍欢迎，经多次重版共销售近百万册。此后，随着教改形势的发展，教材及高考命题的变化，为进一步提高丛书质量，满足读者要求，我们于2001年6月对本丛书作了相当的修改增删，以“修订版”的新貌出现在各家书店的图书专柜上，再一次赢得了广大读者的嘉许。

然而，时代的演变，教改的推进是一个生生不息的过程，永远不允许以服务广大高中师生、服务高中教学为宗旨的我校丛书编写停步不前，只能是与时俱进，以变应变。上海市新一轮课改提出了“以国际化大都市为背景，以德育为核心，以培养学生创新精神和实践能力为重点，以学习方式的改变为特征”的明确要求，市级的各科教学的新编、新选教材闻风而动，相继进入课堂，这对我们来说是一次重编新书的机遇，也是一次探索新路的挑战，更是一次顺应高考改革方向，寻取实战效果的尝试。借百年老校之传承，积数载教改之经验，凭优良师资之实力，受二期课改之驱动，我们群策群力，集思广益，终于促成新生代婴儿的呱呱坠地，命其名为《高中精学巧练丛书》。

在以往的《高中教学精华丛书》的各个分册中，我们曾力求分别体现其实用性、针对性、侧重性、贴近性、全面性、启发性，以期适应自主学习、自主发展、应对考查、应战高考的需要，后又加大“引导性”、“示范性”的力度，掌握了变中求胜的先机。现在看来，以上种种仍需择优融入新编丛书之中。体例不同了，编排不同了，内容不同了，题路不同了，但出新并不意味着一概弃旧，一切都遵循**优化整合**、**发展创新**的原则，**落实能力立意**，**应用为要**的措施，注重**夯实基础**，**促进理解**；**循序渐进**，**同步操练**；**激活思维**，**拓展视野**；**加强研究**，**提升能力**……在这个大前提下，本丛书的各分册编写者各展所长，各显其能，既有共性的渗透，又有个性的发挥。从编写思路到实例举证，文理各科基本上都自有特色。由于这些特色源自于在新的教学形势高考形势下致力于提高学生知识、能力、素质水平的我校第一线教师的智慧结晶，丰硕成果，必然有利于广大师生的参考和实际操作。

本丛书杀青之际，正值学校最为紧忙之时，难免有斟酌不及、考量不周之处，恳请广大读者提出批评建议，帮助我们做好今后的修订工作。谢谢。

上海市松江二中《高中精学巧练丛书》编委会

2005年6月

编写说明

在学校实施素质教育、全面推行二期课改的今天,如何在高三最后一段有限的时间里提高复习效率,理清重点、难点,全面掌握教学大纲所规定的基础知识、基本方法,真正做到举一反三,触类旁通,提高应考能力,已成为广大考生关注的焦点。为此我们组织了一些具有丰富教学经验的特级教师、名师和长期担任高三一线教学的骨干教师精心编写了本书。本书共分三部分,第一部分为单元复习,每一单元有"学习导引"、"范例精讲"和一定量的"专题训练"三块内容。为使读者使用方便,每一单元之后及时给出专题训练评析和详细解答,引导学生多层次、多角度地理解、分析和运用所学的知识。第二部分为专题复习,集中了高考中常用的数学思想方法,每一专题有"学习导引"、"范例精讲"、"专题训练"和详细解答。第三部分为高考模拟试题,是对综合能力的测试,这一部分的试题均按最新高考要求编写,体现了课改精神,命题规范,有利于学生在提高解题能力的同时,拓宽视野和思路,并配有详细的解答,帮助学生掌握解题要领。本书是为考生"度身定做"的一本考前复习用书。

本书主编孙金明。参加本书编写的教师有王家隆、阮晓明、黄继红、沈会忠、戴亚宁、朱伟卫。

由于时间仓促,编者水平有限,难免有疏漏之处,恳请读者批评指正。

上海市松江二中数学教研组

2005 年 6 月

目　　录

第一部分　单元复习

第二部分　专题复习

第三部分　高考模拟试题

第一部分

单元复习

1 集合与命题

学习导引

(1) 集合、子集、全集、补集、空集的概念;元素与集合的关系;集合与集合的关系.

(2) 交集与并集的性质和运算,能用数形结合(包括韦恩图及数轴等)的思想方法,图示各集合间的关系及运算.

(3) 四种命题及相互关系.

(4) 充要条件.

(5) 运用多种数学思想,包括化归、数形结合、归纳及分类讨论等,解决与集合有关的问题及"简易逻辑"中的问题.

范例解析

例 1 已知集合 $\boldsymbol{A}=\{2, 3, 5, 6, 8\}$,$\boldsymbol{B}=\{1, 3, 5, 7, 10\}$,集合 $\boldsymbol{C}$ 满足:(1)若将 $\boldsymbol{C}$ 中的各元素均减 2,则新集合 $\boldsymbol{C}_1$ 就变为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子集;(2)若将 $\boldsymbol{C}$ 中的各元素均加 3,则新集合 $\boldsymbol{C}_2$ 就变成 $\boldsymbol{B}$ 的一个子集;(3)$\boldsymbol{C}$ 中的元素可以是一个一元二次方程的两个不等实数根. 试根据以上条件,用列举法表示集合 $\boldsymbol{C}$.

分析 本题重点检测文字语言向符号语言转换的能力. 条件(3)表明集合 $\boldsymbol{C}$ 的元素个数为 2,从子集的定义出发,并转化条件(1)、(2)的表述方法,问题可顺利解决.

解 条件(1)若换一种说法,即如果将 $\boldsymbol{A}$ 中各个元素均加 2,得到新集合 $\boldsymbol{A}_1$,则 $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}_1$,即 $\boldsymbol{C}\subseteq\{4, 5, 7, 8, 10\}$;条件(2)换一种说法,即如果将 $\boldsymbol{A}$ 中各个元素均减 3,得到新集合 $\boldsymbol{B}_1$,则 $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{B}_1$,即 $\boldsymbol{C}\subseteq\{-2, 0, 2, 4, 7\}$,于是,$\boldsymbol{C}\subseteq\{4, 5, 7, 8, 10\}\cap\{-2, 0, 2, 4, 7\}$,即 $\boldsymbol{C}=\{4, 7\}$,再由条件(3)知 $\boldsymbol{C}$ 中元素个数为 2,故 $\boldsymbol{C}=\{4, 7\}$ 即为所求.

评注 集合问题的解题关键往往是将文字语言转换成集合语言,即符号语言,本题就是这方面的范例. 另外,当集合问题直接求解受阻时,往往又可考虑问题的另一方面或改变表述方式,如本题中将"$\boldsymbol{C}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子集"换成"$\boldsymbol{C}_1\subseteq\boldsymbol{A}$",再转换成"$\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{A}_1$";同时将"$\boldsymbol{C}_2$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的子集"换成"$\boldsymbol{C}_2\subseteq\boldsymbol{B}$",再转换成"$\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{B}_2$",从而使问题获得解决,读者要体会其中的数学重要思想——转换思想.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$,$\boldsymbol{B}=\{y\mid y=2x+3, x\in\boldsymbol{A}\}$,$\boldsymbol{C}=\{x\mid x=t^2, t\in\boldsymbol{A}\}$. 已知 $\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,求实数 a 的取值范围.

分析 确定集合 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的元素时需利用函数的单调性,并运用分类讨论思想,只有弄清楚

几个集合的具体内容(其中可借助图形),才能实施 $B\cup C=B$,由于 $B\cup C=B$ 等价于 $C\subseteq B$,由此建立不等式求解.

解 因为函数 $y=2x+3$ 是递增函数,当 $x\in[-2,\ a]$ 时,$y\in[-1,\ 2a+3]$,所以 $B=[-1,\ 2a+3]$.

考虑集合 C 的元素时,结合二次函数的图像,需对 a 作如下的分类讨论:

当 $a\in(-2,\ 0]$ 时,$a^2\leqslant y\leqslant 4$,所以 $C=[a^2,\ 4]$

当 $a\in(0,\ 2]$ 时,$0\leqslant y\leqslant 4$,所以 $C=[0,\ 4]$

当 $a\in(2,\ +\infty)$ 时,$0\leqslant y\leqslant a^2$,所以 $C=[0,\ a^2]$

因为 $C\subseteq B$,所以当 $a\in(-2,\ 0]$ 时,只需 $4\leqslant 2a+3\Rightarrow a\geqslant\dfrac{1}{2}$,与 $a\in(-2,\ 0)$ 矛盾,无解.

当 $a\in(0,\ 2]$ 时,只需 $4\leqslant 2a+3\Rightarrow\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$

当 $a\in(2,\ +\infty)$ 时,只需 $a^2\leqslant 2a+3\Rightarrow 2<a\leqslant 3$

合并后,本题最后结果为 $a\in\left[\dfrac{1}{2},\ 3\right]$.

学校举办以年级为单位的校运动会,高三年级共有 42 名学生报名参加,已知报名参加环城长跑的有 16 人,参加拔河的有 24 人,参加跳绳的有 12 人.其中共有 8 人兼报了两个项目,问有没有兼报 3 个项目的同学?若有,共有几名兼报 3 个项目?

解 分别记参加环城跑、拔河、跳绳比赛的同学组成的集合为 A、B、C,设兼报两个项目的 8 人中有 a 人兼报了环城跑、拔河;有 b 人兼报了拔河、跳绳;则有 $8-a-b$ 人兼报了环城跑和跳绳,又设 x 人兼报了 3 个项目.

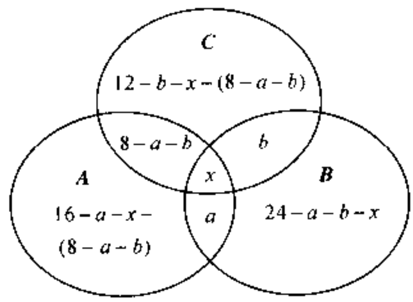


图1-1

作出如图 1-1 所示的韦恩图,由图可得

$16+24-a-x+12-b-x-(8-a-b)=42$,

解出 $x=1$.

所以只有 1 人兼报了 3 个项目.

评注 用韦恩图直观地表示集合之间的运算关系是解决集合问题的重要方法,有些集合的运算性质也是借助韦恩图来完成的,所以,数形结合思想是解决本题的关键.

设 a、b、c 均为正数,且对任意的自然数 n,以 a^n,b^n,c^n 为边总能构成三角形,试证明以 a,b,c 为边的三角形必是等腰三角形.

分析 由三条边 a^n,b^n,c^n 组成三角形总能得到其中两边之和大于第三边的结论,来推出 a,b,c 其中两条边相等,正面解决肯定是不可能的,于是考虑用反证法,即假设 a,b,c 两两不等.如果由此引出与条件相悖的结果,命题就随之得证.

证明 假设以 a,b,c 为边的三角形不是等腰三角形,则 a,b,c 必两两不等,不妨设 $a<b<c$.

构建函数 $f(n)=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n$

因为 $0<\frac{u}{c}<1$，$0<\frac{b}{c}<1$，由指数函数性质得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$.

于是总能找到自然数 n_0，使 $\left(\frac{a}{c}\right)^{n_0}+\left(\frac{b}{c}\right)^{n_0}<1$ 成立.

$\Rightarrow a^{n_0}+b^{n_0}<c^{n_0}$.

这与已知条件即对任意自然数 n，以 a^n，b^n，c^n 为边均能构成三角形相矛盾.

所以 a，b，c 中至少有一对数相等；

所以以 a，b，c 为边能组成等腰三角形.

评注 命题的证明一般分直接证明与间接证明，反证法属于间接证法. 反证法是通过"反设"后引出矛盾使命题得证的，反证法通常又叫"归谬法"，反证法的关键是导出矛盾，本题导出矛盾前使用了极限概念，指数函数性质，要很好领会极限的概念才能理解本题引出的矛盾.

例5 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上有意义，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$f(1)=0$，又有函数 $f(\theta)=\sin^2\theta+m\cos\theta-2m$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，若集合 $\boldsymbol{M}=\{m\mid g(\theta)<0\}$，集合 $\boldsymbol{N}=\{m\mid f[g(\theta)]<0\}$.

(1) 求 $f(x)<0$ 的解集；

(2) 求 $\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{N}$.

解 (1) 因为奇函数 $f(1)=0$，所以 $f(-1)=-f(1)=0$.

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数，

所以 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $0<x<1\}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{N}=\{m\mid f[g(\theta)]<0\}$，

由(1)得 $\boldsymbol{N}=\{m\mid g(\theta)<-1$ 或 $0<g(\theta)<1\}$，

又因为 $\boldsymbol{M}=\{m\mid g(\theta)<0\}$，所以 $\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{N}=\{m\mid g(\theta)<-1\}$.

所以 $\sin^2\theta+m\cos\theta-2m<-1$ 成立，

$\Rightarrow(2-\cos\theta)m>2-\cos^2\theta$ 恒成立，其中 $0\leqslant\cos\theta\leqslant1$.

所以 $m>\frac{2-\cos^2\theta}{2-\cos\theta}=\cos\theta-2+\frac{2}{\cos\theta-2}+4$.

所以 $\cos\theta-2\in[-2,-1]$，

所以 $\cos\theta-2+\frac{2}{\cos\theta-2}\leqslant-2\sqrt{2}$（等号在 $\cos\theta=2-\sqrt{2}$ 时取），

所以 $\cos\theta-2+\frac{2}{\cos\theta-2}+4\leqslant4-2\sqrt{2}$.

所以 $m>4-2\sqrt{2}$.

所以 $\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{N}=\{m\mid m>4-2\sqrt{2}\}$.

评注 这是与集合概念有关的综合题. 涉及函数、三角、不等式及集合概念. 问题的本质是函数和不等式，集合概念则是对这些综合知识的穿针引线，若对函数、不等式知识不具备扎实的功底，这类综合性较强的题目仅靠集合概念是解决不了的.

基础训练

（A　组）

1　与命题"若 $a\in M$，则 $b\notin M$"等价的命题是　（　　）

(A) 若 $a\notin M$，则 $b\notin M$.　　(B) 若 $b\notin M$，则 $a\in M$.

(C) 若 $a\notin M$，则 $b\in M$.　　(D) 若 $b\in M$，则 $a\notin M$.

[redacted]　设全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid |x|<3\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2\geqslant 0\}$，则 $A\cap(\complement_u B)$ 等于　（　　）

(A) $(1,2)$.　　(B) $(-3,1)\cup(2,3)$.

(C) $(-3,1]\cup[2,3)$.　　(D) $(-3,3)$.

3　若关于 x 的不等式 $x^2+ax-a-2>0$ 和 $2x^2+2(2a+1)x+4a^2+1>0$ 的解集依次为 M 和 N，那么使得 $M=\mathbf{R}$ 和 $N=\mathbf{R}$ 至少有 1 个成立的实常数 a　（　　）

(A) 可以是 $\mathbf{R}$ 中的任何数.

(B) 有无穷多个，但并不是 $\mathbf{R}$ 中的所有实数.

(C) 有且仅有 1 个.

(D) 不存在.

[redacted]　关于 x 的方程 $|x|-|x-1|=a$ 有解的充要条件是　（　　）

(A) $0\leqslant a\leqslant 1$.　　(B) $-1\leqslant a\leqslant 1$.

(C) $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 1$.　　(D) $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$.

5　在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B 均为锐角，但 $\cos A>\sin B$，则三角形 ABC　（　　）

(A) 一定为直角三角形.　　(B) 一定为钝角三角形.

(C) 一定为锐角三角形.　　(D) 不能确定为何种三角形.

[redacted]　设集合 $A=\{(x,y)\mid y=\lg(4^x+2)\}$，$B=\{(x,y)\mid y=\lg 2^x+\lg 3\}$，则集合 $A\cap B=$ ________.

7　已知 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ 是关于 x 的不等式 $|x-m|<1$ 解集的真子集，则实数 m 的取值范围是 ________.

[redacted]　已知集合 $M=\{3,a\}$，$N=\{x\mid x^2-3x<0,x\in\mathbf{Z}\}$，$M\cap N=\{1\}$，又 $P=M\cup N$，那么集合 P 的子集共有 ________.

9　已知集合 $A=\{y\mid y=2^{|x|}-1,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{y\mid y=\sqrt{-x^2+2x+3}\}$，则集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}=$ ________.

[redacted]　对等差数列，有真命题：设 $\{a_n\}$ 是无穷等差数列，则对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$，总有 $a_m-a_n=(m-n)d$（其中 d 为公差），类似地对等比数列，也能写出一个相应的真命题 ________________.

11　设 a,b,u 都是正实数，且 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=1$. 则使得 $a+b\geqslant u$ 恒成立的 u 的范围是 ________.

[redacted] 问 k 为何值时，$\{y \mid y=x+1, x\in \boldsymbol{A}\}=\{y \mid y=x^2, x\in \boldsymbol{A}\}$，其中 $A=[-1, k]$？

13 设 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+1}{x-3}}$ 的定义域为 $\boldsymbol{A}$，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$（其中 $a>1$）的定义域为 $\boldsymbol{B}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$；

(2) 若 $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$，求实数 a 的取值范围.

14 已知集合 $\boldsymbol{A}=\{t \mid 使\{x \mid x^2+2tx-4t-3\neq 0\}=\mathbf{R}\}$，

集合 $\boldsymbol{B}=\{t \mid 使\{x \mid x^2+2tx-2t=0\}\neq\varnothing\}$，

其中 x，t 均为实数.

(1) 求 $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$.

(2) 设 m 为实数，$g(\alpha)=-\sin^2\alpha+m\cos\alpha-2m$，$\alpha\in\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$，若 $m\in \boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ 时，恒有 $g(\alpha)>k$（k 为常数），求 k 的取值范围.

（B 组）

1 设全集 $\boldsymbol{I}$ 是实数集 $\mathbf{R}$，$\boldsymbol{M}=\{x \mid x^2>4\}$ 与 $\boldsymbol{N}=\{x \mid \frac{2}{x-1}\geq 1\}$ 都是 $\boldsymbol{I}$ 的子集（如图 1-2所示），则阴影部分所表示的集合为（　　）

(A) $\{x \mid -2\leq x<1\}$.

(B) $\{x \mid -2\leq x\leq 2\}$.

(C) $\{x \mid 1<x\leq 2\}$.

(D) $\{x \mid x<2\}$.

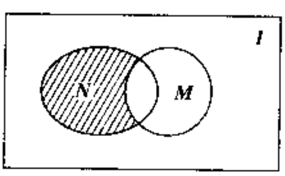


图 1-2

[redacted] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 有下列三个命题：

(1) 若存在常数，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\leq M$，则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值；

(2) 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq x_0$，有 $f(x)<f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值；

(3) 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\leq f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.

上述命题中，真命题的个数是（　　）

(A) 0 个.　(B) 1 个.　(C) 2 个.　(D) 3 个.

3 设函数 $f(x)=|x|x+bx+c$，给出下列四个命题：

(1) 当 $b=0$，$c>0$ 时方程 $f(x)$ 只有一个实数根；

(2) 当 $c=0$ 时，$y=f(x)$ 是奇函数；

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $c(0, c)$ 对称；

(4) 方程 $f(x)=0$ 至多有两个实数根.

其中正确命题的序号为____________.

4 设原命题 α：空间四点中，若任意三点不共线，则这四点必不共面．α 的逆命题为 β，则 (　　)

(A) α 是真命题，β 是假命题.　　(B) α、β 都是真命题.

(C) α 是假命题，β 是真命题.　　(D) α，β 都是假命题.

5 某个命题与自然数 n 有关. 如果当 $n=k(k\in \mathbf{N}^*)$ 时该命题成立，那么可推得 $n=k+1$ 时该命题也成立，现已知当 $n=5$ 时该命题不成立，那么可推得 (　　)

(A) 当 $n=6$ 时该命题不成立.　　(B) 当 $n=6$ 时该命题成立.

(C) 当 $n=4$ 时该命题不成立.　　(D) 当 $n=4$ 时该命题成立.

6 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都是非零常数，记 $\boldsymbol{M}=\{x \mid a_1x^2+b_1x+c_1>0\}$，$\boldsymbol{P}=\{x \mid a_2x^2+b_2x+c_2>0\}$，则"$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}$"是"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"的 (　　)

(A) 充分不必要条件.　　(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.　　(D) 既不充分又不必要条件.

7 定义：满足不等式 $|x-\boldsymbol{A}|<\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}>0, \boldsymbol{A}\in \mathbf{R})$ 的实数 x 的集合叫做 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{B}$ 邻域．若 $a+b-2$ 的 $a+b$ 邻域是偶函数的定义域，则 a^2+b^2 的最小值为________.

8 函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\in \boldsymbol{P} \\ -x & x\in \boldsymbol{M}\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{M}$ 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的两个非空子集，又规定 $f(\boldsymbol{P})=\{y \mid y=f(x), x\in \boldsymbol{P}\}$，$f(\boldsymbol{M})=\{y \mid y=f(x), x\in \boldsymbol{M}\}$，给出下列四个判断：

(1) 若 $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{M}=\varnothing$，则 $f(\boldsymbol{P})\cap f(\boldsymbol{M})=\varnothing$

(2) 若 $\boldsymbol{P}\cap \boldsymbol{M}\neq\varnothing$，则 $f(\boldsymbol{P})\cap f(\boldsymbol{M})\neq\varnothing$

(3) 若 $\boldsymbol{P}\cup \boldsymbol{M}=\mathbf{R}$，则 $f(\boldsymbol{P})\cup f(\boldsymbol{M})=\mathbf{R}$

(4) 若 $\boldsymbol{P}\cup \boldsymbol{M}\neq\mathbf{R}$，则 $f(\boldsymbol{P})\cup f(\boldsymbol{M})\neq\mathbf{R}$

其中正确命题为________.

9 正三角形有如下性质：正三角形内任意一点到三条边的距离之和为定值，类比上述命题，写出正四面体的一个性质________________________.

10 已知对一切 $\boldsymbol{P}\in[-2, 2]$，不等式 $(\log_2 x)^2+\boldsymbol{P}\log_2 x+1>2\log_2 x+\boldsymbol{P}$ 恒成立，求实数 x 的取值范围.

11. 已知关于 x 的不等式 $\log_{2a-1}(2x+2)<-1$ 对 $x\in[0,3]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

12. 定义非空集合 $\boldsymbol{M}$ 是以所有定义域恰为值域的子集的函数为元素构成的. 试判断 $f(x)=\sqrt{3-\dfrac{9}{x^2}}$ 和集合 $\boldsymbol{M}$ 的关系，并说明理由.

13. 已知 $c>0$，设命题 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；命题 Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，如果命题 P 和 Q 有且仅有一个是真命题，求 c 的取值范围.

14. 设集合 $\boldsymbol{A}=\{x\mid 4^x-2^{x+1}+a=0,\ x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 中有且只有一个元素，求实数 a 的取值范围 $\boldsymbol{B}$；

(2) 当 $a\in\boldsymbol{B}$ 时，不等式 $x^2-5x-6<a(x-4)$ 恒成立，求 x 的取值范围.

答案与评注

（A 组）

1. (D) **2.** (A) **3.** (B) **4.** (B) **5.** (B) **6.** $\{(0,\lg 3),(1,\lg 6)\}$ **7.** $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$ **8.** 8 个 **9.** $(2,+\infty)$ **10.** 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列，则对任意 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 总有 $\dfrac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$ **11.** $0<a\leqslant 16$，提示：设 $\dfrac{1}{a}=\cos^2\theta$，$\dfrac{9}{b}=\sin^2\theta$，则 $a+b=\sec^2\theta+9\operatorname{cosec}^2\theta=1+\tan^2\theta+9+9\cot^2\theta$，只要求出 $a+b$ 的最小值 **12.** $k=0$ 或 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，函数 $y=x^2$，$x\in[-1,k]$ 的值域要分类讨论 **13.** (1) $A=(-\infty,3)\cup(7,+\infty)$ (2) $\left(1,\dfrac{3}{2}\right]\cup[6,+\infty)$ 求 $g(x)$ 的定义域要对 a 进行分类讨论 **14.** (1) 集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素是使 $x^2+2tx-4t-3=0$ 无解时 t 的取值范围，解出 $\boldsymbol{A}=(-3,-1)$；集合 $\boldsymbol{B}$ 的元素是使 $x^2+2tx-2t=0$ 有解时 t 的取值范围，解出 $\boldsymbol{B}=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$，所以 $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=(-3,-2]$

(2) $g(\alpha)=\cos^2\alpha+m\cos\alpha-1-2m$, $\alpha\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$欲使$g(\alpha)>k$恒成立,只需$g(\alpha)_{\min}>k$即可.由于对称轴$\cos\alpha=-\frac{m}{2}\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$,所以$g(\alpha)_{\min}=-1-2m$,这是关于$m$的递减一次函数.所以$(-1-2m)_{\min}=3(m\in(-3,-2])$,所以$k<3$.

(B 组)

1. (C) 2. (C) 3. (1),(2),(3) 4. (C) 5. (C) 6. (D) 7. 2 提示:$a+b-2$的$a-b$邻域是指满足$|x-(a+b-2)|<a+b\Rightarrow-2<x<2(a+b)-2$,由于偶函数的定义域关于原点对称,所以解出$a+b=2$ 8. (2)(4) 9. 正四面体内,任意一点到四个面的距离之和为定值$\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 10. 将不等式转化为关于$\boldsymbol{P}$的一次函数$f(\boldsymbol{P})=[(\log_2x)-1]\boldsymbol{P}+[(\log_2x)^2-2\log_2x+1]$,本题即求$f(\boldsymbol{P})>0$在$\boldsymbol{P}\in[-2,2]$成立时的$x$的取值范围,只需考虑区间的两个端点的值都大于0即可.$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(8,+\infty)$ 11. $\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 12. 定义域集合为$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.值域集合$[0,\sqrt{3})$,所以$f(x)\notin \boldsymbol{M}$ 13. 满足命题P为真命题的c的范围为$0<c<1$,命题Q需作出$y=|x-2c|$和$y=1-x$的图像,要求在全体实数范围内都有前者的图像高于后者的图像,容易得出$2c>1\Rightarrow c>\frac{1}{2}$,于是命题$P$和$Q$有且仅有一个是真命题就只需所求两个范围的集合取其并集,然后去除其交集,结论为$0<c\leqslant\frac{1}{2}$或$c\geqslant1$ 14. (1) 令$2^x=t$,$(t>0)$,方程$t^2-2t+a=0$有一个正根的情况可分两类:$\Delta=0$且根为正数,及$\Delta>0$且有一根为负数或零,于是求出$a=1$或$a\leqslant0$,所求集合$\boldsymbol{B}=(-\infty,0]\cup\{1\}$ (2) 当$a=1$时,解不等式$x^2-5x-6<x-4$,当$a\in(-\infty,0]$时,结合一次函数$(x-4)a-(x^2-5x-6)>0$,在$(-\infty,0)$成立的图像考虑,只需$(x-1)<0$且$a=0$时,一次函数的值必须大于0,最后结果为$(3-\sqrt{11},4]$.