高等工科院校电子、信息类教材

离散数学

Discrete Mathematics

朱保平 叶有培 张琨 编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等工科院校电子、信息类教材

离散数学

朱保平　叶有培　张琨　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书介绍离散数学的基本理论及方法。主要由命题演算基础、命题演算的推理理论、谓词演算基础、谓词演算的推理理论、递归函数论、集合论、关系、函数与集合的势、图、树与有序树、群与环、格与布尔代数等12部分组成。

本书是高等院校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可作为教师、研究生或软件工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/朱保平，叶有培，张琨编著.—北京：北京理工大学出版社，2006.5

高等工科院校电子、信息类教材

ISBN 7-5640-0665-X

Ⅰ.离…　Ⅱ.①朱…②叶…③张…　Ⅲ.离散数学-高等学校-教材　Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第023593号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefeditor@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 11.5
字　　数 / 265千字
版　　次 / 2006年5月第1版　2006年5月第1次印刷
印　　数 / 1~5000册　　　责任校对 / 郑兴玉
定　　价 / 18.00元　　　责任印制 / 吴皓云

前　　言

“离散数学”是计算机科学的重要的理论基础课程，它不仅是计算机学科的核心课程，而且已成为电子信息类专业的热门选修课。离散数学和计算机科学有着十分密切的关系，无论是数字电子计算机雏形的图灵机，还是数字电路的布尔代数，以及作为程序设计工具的语言、关系数据库、知识库、人工智能等领域均离不开离散数学。同时两者的相互渗透推动了离散数学的发展，因此学好离散数学对于计算机科学理论的研究有着重要的作用。

本书主要分成两大部分：前半部分主要讲述了数理逻辑的基本理论及基本方法，包括命题演算基础及其推理理论、谓词演算基础及其推理理论和递归函数论等内容；后半部分主要讲述了离散数学的基本理论及其基本方法，包括集合、关系、函数与集合的势、图、树与有序树、群与环和格与布尔代数等内容。

本书第 1～8 章由朱保平编写，第 9～12 章由叶有培编写。张琨同志参与了书中图表的绘画、相关习题的编写等工作。

书中有不妥之处，请读者批评指正。

编著者

目　　录

第一章　命题演算基础

1.1　命题和联结词

1.1.1　命题

定义 1　凡是可以判断真假的陈述句称为命题。

命题具有两个特征，首先命题应是一个陈述句，感叹句、疑问句、祈使句等均不是命题；其次这个陈述句所表达的内容可决定真或假且真假不可兼，即它应有真假性。

如果一个命题取为真，则说明该命题的值为真，用 T 表示真；如果一个命题取为假，则说明该命题值为假，用 F 表示假。

下面举例说明命题的概念：

(1) 离散数学是计算机科学中的一门重要的必修课。

它是一个陈述句，可决定其真值为 T，所以为命题。

(2) 请给我一张纸！

它不是陈述句，不是命题。

(3) 我正在说谎。

悖论，虽为陈述句，但其不能判断其真值，非命题。

(4) $1+1=3$ 吗？

疑问句，不为陈述句，非命题。

命题具有两种类型：原子命题和复合命题。

(1) 第一种类型是不可剖开或分解为更简单命题的命题称为原子命题。

如："雪是白的"、"2 为质数"等就是原子命题。

(2) 第二种类型是由成分命题利用联结词构成的命题称为复合命题。

如："$1+1=3$ 且雪是白的"；"如果 $1+1=3$，则雪是黑的"等就是复合命题，其中语句中的"且"、"如果……则……"等就是联结词。

注意有时有些语句看似复合命题，但实际上为原子命题。

如语句"TOM 和 JOHN 是兄弟"就不能分解为"TOM 是兄弟"和"JOHN 是兄弟"，因为某一个人不能成为兄弟，故把它理解为原子命题。

数理逻辑是研究前提和结论间的形式关系，而不研究具体的内容。为此采用数学方法将命题符号化也称为形式化方法是十分重要的，约定用大写字母表示命题。

例如

P：表示"$1+1=3$"；

Q：表示"2 为质数"。

定义 2　如果当 P 表示任意命题时，P 称为命题变元。

注意命题变元和命题是两个不同的概念。

命题指具体的陈述句有确定的真值。

命题变元没有确定的真值，只有当代以具体的命题时才能确定它的真值。换言之，命题变元是以真假为变域的变元，用 P,Q,R 等表示命题变元。

1.1.2 联结词

下面介绍五个常用的联结词：

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$

一、否定词($\neg$)

否定词"$\neg$"是一个一元联结词，利用该联结词可由成分命题构成复合命题$\neg P$，读为非 P。

日常语句中的"非"、"不"和"并非"等表示逻辑非。

非 P 的真假与P 的真假关系定义如下：

$\neg P$ 为真当且仅当P 为假

其真值表如图 1.1 所示。

P	$\neg P$
T	F
F	T

图 1.1 逻辑非的真值表

例 P 表示今天是星期天。

$\neg P$:今天不是星期天。

二、合取词($\wedge$)

合取词"$\wedge$"是一个二元联结词，利用该联结词可将成分命题 P 和Q 构成复合命题$P\wedge Q$，读为 P 合取Q。其中$P\wedge Q$称为合取式，P、Q 称为$P\wedge Q$ 的合取项。

日常语言中的"且"、"与"等均表示为合取。

P 合取Q 的真假和P、Q 的真假关系定义如下：

$P\wedge Q$ 为真当且仅当P 和Q 均真

其真值表如图 1.2 所示。

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

图 1.2 合取词的真值表

例 1 $1+1=2$ 且雪是白的。

令：P 表示"$1+1=2$"；

Q 表示"雪是白的"。

则原句译为：$P\wedge Q$

例 2 这台笔记本电脑质量很好但很贵。

令：P 表示"这台笔记本电脑质量很好"；

Q 表示"这台笔记本电脑很贵"。

则原句译为：$P\wedge Q$

三、析取词($\vee$)

析取词"$\vee$"是一个二元联结词，利用成分命题 P 和Q 可构成复合命题 $P\vee Q$，读为 P 析取Q。

其中 $P\vee Q$ 称为析取式，P 和Q 称为$P\vee Q$ 的析取项。

日常语言中的"或"等可用析取词来表示。

P 析取Q 的真假和P、Q 的真假关系定义如下：

$P\vee Q$ 为假当且仅当P 和Q 均假

其真值表如图 1.3 所示。

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

图 1.3 析取词的真值表

例 今天下雨或下雪。

令:P 表示“今天下雨”;

Q 表示“今天下雪”。

则原句译为:$P \vee Q$

注意语言中“或”在现实生活中有可兼性和不可兼性,在数理逻辑中规定只有唯一的一种意思,即可兼的“或”。

四、蕴含词($\rightarrow$)

蕴含词“$\rightarrow$”是一个二元联结词,利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P\rightarrow Q$,读为 P 蕴含 Q。其中 $P\rightarrow Q$ 称为蕴含式,P 称为蕴含前件,Q 称为蕴含后件,蕴含词也可用“$\supset$”表示。

日常语言中的“如果……则……”等可用蕴含词来表示。

P 蕴含 Q 的真假和 P、Q 的真假关系定义如下:

$P\rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 真 Q 假

其真值表如图 1.4 所示。

P	Q	$P\rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

图 1.4 蕴含词的真值表

例 如果 $1+1=3$,则雪是黑的。

令:P 表示“$1+1=3$”;

Q 表示“雪是黑的”。

则原句译为:$P\rightarrow Q$

从真值表可看出,当蕴含前件 P 取为 F 时,不管其后件 Q 取 T 或 F,蕴含式 $P\rightarrow Q$ 总取真,故复合命题“如果 $1+1=3$,则雪是黑的”之值为 T。也就是说,在形式推理中只要前件为假,就可推出任何命题,而此推理过程是正确的。

五、等价词($\leftrightarrow$)

等价词“$\leftrightarrow$”是一个二元联结词,利用成分命题 P 和 Q 可构成复合命题 $P\leftrightarrow Q$,读为 P 等价于 Q。其中 $P\leftrightarrow Q$ 称为等价式。

日常语言中的“当且仅当”等可用等价词来表示。

P 等价于 Q 的真假和 P,Q 的真假关系定义如下:

$P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 均真或均假

其真值表如图 1.5 所示。

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

图 1.5 等价词的真值表

例 一个三角形 ABC 为等腰三角形当且仅当三角形有两条边相等。

令:P 表示“一个三角形 ABC 为等腰三角形”;

Q 表示“三角形有两条边相等”。

则原句译为:$P\leftrightarrow Q$

上面介绍了五个常用的真值联结词,其实真值联结词还有很多。为了能更好地表达其他真值联结词,我们引进真值函项的概念,用真值函项的概念可以定义一元、二元甚至 n 元真值联结词。

定义 以真假为定义域并以真假为值域的函数称为真值函项。

有了真值函项的概念就可以用它来表达联结词。

一元联结词有一个命题变项 P,它取真和假两种,可定义四个不同的一元联结词 f_0,f_1,f_2,f_3,或称为真值函项。

其真假关系可用图 1.6 表示。

从图可看出：

$f_0(P)$：表示永真；

$f_1(P)$：表示恒等；

$f_2(P)$：表示否定，即$\neg P$；

$f_3(P)$：表示永假联结词。

P	$f_0(P)$	$f_1(P)$	$f_2(P)$	$f_3(P)$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

图 1.6　一元联结词的真值表

同理二元联结词有 16 个，如图 1.7 所示。

P	Q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F	F	F	F	T	F

图 1.7　二元联结词的真值表

从图中可以看出：

f_4 为析取 $\vee$

f_{11}为合取 $\wedge$

f_2 为蕴含 $\rightarrow$

f_8 为等价 $\leftrightarrow$

f_1 为与非：$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$

f_{14}为或非：$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

f_7 为异或：$P \oplus Q = \neg(P \leftrightarrow Q)$

1.1.3　合式公式

有了命题变元和联结词的概念，就可以利用括号来讨论命题演算的合式公式，其中括号可用来区别联结词的运算优先次序。

合式公式为如下定义的式子，简称为公式：

(1) 任何命题变元均是公式；

(2) 如果 P 为公式，则$\neg P$ 为公式；

(3) 如果为 P,Q 为公式，则$(P \vee Q)$，$(P \wedge Q)$，$(P \rightarrow Q)$，$(P \leftrightarrow Q)$为公式；

(4) 当且仅当经过有限次使用(1)、(2)、(3)所组成的符号串才是公式，否则不为公式 。

例如：P，$(P \wedge Q)$，$((P \wedge Q) \vee R)$为公式，$(P \wedge Q) \wedge$，$P \leftrightarrow Q)$不为公式。

但为了方便起见，采用省略一些括号，保留一些括号的方式来描述合式公式。

如$((P \wedge Q) \vee R)$省写为$(P \wedge Q) \vee R$ 等。

定义　若公式 α 中有 n 个不同的命题变元，就说 α 为 n 元公式。

如$((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow (P \vee Q)$中含有 P、Q、R 为三个命题变元，因此它为三元公式。

下面举一些例子说明怎样把命题符号化成公式，注意在语句符号化时，一定要分解至原子命题，而不能把某个复合命题直接用命题变元 P 来表示，如此不能完整表达语句的意思，也不

便于计算机处理相关语句及其产生的知识。

例 1　只有努力学习、认真复习，才能取得好成绩。

解　令 P 表示"努力学习"；

Q 表示"认真复习"；

R 表示"取得好成绩"。

则原句译为：$R \rightarrow (P \wedge Q)$

注意该语句不能译为 $(P \wedge Q) \rightarrow R$，翻译时一定要考虑条件的必要性和充分性。

例 2　If A then B else C

解　原句译为 $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow C)$。

例 3　A 是 B 和 C 的公约数当且仅当 A 能除尽 B 和 C。

解　令 P 表示"A 是 B 和 C 的公约数"；

Q 表示"A 能除尽 B"；

R 表示"A 能除尽 C"。

则原句译为：$P \leftrightarrow (Q \wedge R)$

例 4　已知三个命题：

P：今晚我在家上网；

Q：今晚我去球场看足球比赛；

R：今晚我在家上网或去球场看足球比赛。

试问 $P \vee Q$ 和 R 是否表达同一命题？请用真值表说明之。

解：$P \vee Q$ 和 R 不表达同一命题。可由如图 1.8 的真值表说明之。

P	Q	R	$P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

图 1.8　R 和 $P \vee Q$ 的真值表

实际上 R 应表示为：$R = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

1.2　真假性

1.2.1　解释

定义 1　设 n 元公式 α 中所有的不同的命题变元为 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$。

如果对每个命题变元均给予一个确定的值，则称对公式 α 给了一个完全解释；

如果仅对部分变元给予确定的值，则称对公式 α 给了一个部分解释。

一般地讲，完全解释能确定一个公式的真值，而部分解释不一定能确定公式的真值，公式的真假与未给予确定值的变元有关。

如：公式 $\alpha = (P \wedge Q) \rightarrow R$

在完全解释 $(P, Q, R) = (T, F, T)$ 下，公式 α 的值为 T；

对于部分解释 $(P, Q, R) = (T, T, x)$ 下（注 x 表示相应的变元未给予确定的值），公式 α 的值与 R 有关。但在某些特殊情况下，部分解释也能确定一个公式的值。

如上述公式在部分解释 $(P, Q, R) = (T, F, x)$ 下，α 取为真。

由于每个命题变元有两个取值 T 和 F，因此 n 元公式有 2^n 个完全解释。

定义 2　对于任何公式 α，凡使得 α 取真值的解释，不管是完全解释还是部分解释，均称

为 α 的成真解释。

定义 3 对于任何公式 α,凡使得 α 取假值的解释,不管是完全解释还是部分解释,均称为 α 的成假解释。

例如:公式 $\alpha=(P\wedge Q)\rightarrow R$ 的成真解释为 $(P,Q,R)=(T,F,T)$

成假解释为 $(P,Q,R)=(T,T,F)$

定义 4 如果一个公式的所有完全解释均为成真解释,则称该公式为永真公式或称为重言式;如果一个公式的所有完全解释均为成假解释,则称该公式为永假公式或称为矛盾式。

定义 5 如果一个公式存在成真解释,则称该公式为可满足公式;如果一个公式存在成假解释,则称该公式为非永真公式。

由上定义可知:

$P\wedge Q$ 为可满足公式,也为非永真公式;$P\wedge\neg P$ 为永假公式;$P\vee\neg P$ 为永真公式。

1.2.2 等价公式

定义 给定两个公式 α 和 β,设 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$ 为 α 和 β 的所有命题变元,那么 α 和 β 有 2^n 个解释,如果对每个解释 α 和 β 永取相同的真假值,则称 α 和 β 是逻辑等价的。记为 $\alpha=\beta$。

一、几组重要的等价公式

(1) 双重否定律:

$$\neg\neg P=P$$

(2) 结合律:

$$(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$$
$$(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R)$$

(3) 分配律:

$$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$$
$$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

(4) 交换律:

$$P\vee Q=Q\vee P$$
$$P\wedge Q=Q\wedge P$$

(5) 等幂律:

$$P\vee P=P$$
$$P\wedge P=P$$
$$P\rightarrow P=T$$
$$P\leftrightarrow P=T$$

(6) 等值公式:

$$P\rightarrow Q=\neg P\vee Q$$
$$\begin{aligned}P\leftrightarrow Q&=(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\\&=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\\&=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\end{aligned}$$
$$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

(7) 部分解释:

$$P \wedge T = P \qquad P \wedge F = F$$
$$P \vee T = T \qquad P \vee F = P$$
$$T \to P = P \qquad F \to P = T$$
$$P \to T = T \qquad P \to F = \neg P$$
$$T \leftrightarrow P = P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$$

(8) 吸收律:

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$
$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

二、成真解释和成假解释的求解方法

(1) 否定深入:即把否定词一直深入至命题变元上;

(2) 部分解释:选定某个出现次数最多的变元对它作真或假的两种解释从而得到公式;

(3) 化简;

(4) 依次类推,直至产生公式的所有解释。

例 试判定公式$\neg(P \wedge Q) \to ((\neg Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow \neg R)$的永真性和可满足性。

解 否定深入:

$$原式 = (\neg P \vee \neg Q) \to ((\neg Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow \neg R)$$

对 P 进行解释并化简:

$P = T$ 时,原式$= (\neg T \vee \neg Q) \to ((\neg Q \leftrightarrow T) \leftrightarrow \neg R)$

$= (F \vee \neg Q) \to (\neg Q \leftrightarrow \neg R)$

$= \neg Q \to (\neg Q \leftrightarrow \neg R)$

$Q = T$ 时,原式$= \neg T \to (\neg T \leftrightarrow \neg R)$

$= F \to (F \leftrightarrow \neg R)$

$= F \to R$

$= T$

$Q = F$ 时,原式$= \neg F \to (\neg F \leftrightarrow \neg R)$

$= T \to (T \leftrightarrow \neg R)$

$= T \leftrightarrow \neg R$

$= \neg R$

$R = T$ 时,原式$= F$

$R = F$ 时,原式$= T$

$P = F$ 时,同理可解。

由上可知,公式存在一个成真解释$(P,Q,R) = (T,T,x)$;

公式存在一个成假解释$(P,Q,R) = (T,F,T)$。

故公式可满足但非永真。

1.2.3 联结词的完备集

如前所述,一元联结词有 4 个,二元联结词有 16 个等,因此联结词的个数有很多,不可能

一一讨论,为此需要讨论它们是否均是独立的?换句话说,这些联结词是否能相互表示?答案是肯定的。

定义 设 S 是联结词的集合,如果对任何命题演算公式均可以由 S 中的联结词表示出来的公式与之等价,则说 S 是联结词的完备集。

由联结词的定义知,联结词集合$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$是完备的。

定理 1 联结词的集合$\{\neg,\wedge,\vee\}$是完备的。

证明 因为 $P\rightarrow Q=\neg P\vee Q$

$$P\leftrightarrow Q=(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$$

所以$\{\neg,\wedge,\vee\}$可以表示集合$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$

又因为$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$是完备的,即任何公式 α 均可以由集合$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$中联结词表达出来的公式与之等价。

所以任何公式 α 均可以由集合$\{\neg,\wedge,\vee\}$中的联结词表达出来的公式与之等价。

故集合$\{\neg,\wedge,\vee\}$是完备的。

同理可证,集合$\{\neg,\wedge\}$、$\{\neg,\vee\}$、$\{\neg,\rightarrow\}$是完备的。

定理 2 联结词集合$\{\uparrow\}$是完备的(其中 $P\uparrow Q=\neg(P\wedge Q)$)。

证明 因为

$$\neg P=P\uparrow P$$

$$P\wedge Q=(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)$$

所以$\{\uparrow\}$可以表示集合$\{\neg,\wedge\}$

又因为$\{\neg,\wedge\}$是完全备的,即任何公式 α 均可以由集合$\{\neg,\wedge\}$中的联结词表达出来的公式与之等价。

所以任何公式 α 均可以由集合$\{\uparrow\}$中的联结词表达出来的公式与之等价。

故集合$\{\uparrow\}$是完备的。

例 试证明联结词集合$\{\wedge\}$不完备。

证明 假设$\{\wedge\}$是完备的。

根据完备性的定义知$\neg P=P\wedge Q\wedge R\wedge\cdots$

当 $P,Q,R,\cdots$全取为真时,公式左边$=F$,右边$=T$。

显然矛盾。

故联结词集合$\{\wedge\}$不完备。

1.2.4 对偶式和内否式

定义 1 将任何一个不含蕴含词和等价词的命题演算公式 α 中的$\vee$换为$\wedge$、$\wedge$换为$\vee$后所得的公式称为 α 的对偶式,记为 α^*。

如公式 $\alpha=\neg P\wedge(Q\vee(R\wedge\neg S))$

$$\alpha^*=\neg P\vee(Q\wedge R\vee\neg S))$$

不难验证:$(\alpha^*)^*=\alpha$

注意求合式公式的对偶式时,应先消去公式中的蕴含词和等价词,否则所求对偶式不满足如上定义。

定义 2 将任何命题演算公式 α 中的所有肯定形式换为否定形式、否定形式换为肯定形式后所得的公式称为 α 的内否式,记为 α^-。

如公式 $\alpha = \neg P \wedge (Q \vee (R \wedge \neg S))$

$\alpha^- = P \wedge (\neg Q \vee (\neg R \wedge S))$

不难验证：$(\alpha)^- = \alpha$

约定在讨论对偶式和内否式的定理时，规定本节讨论的命题公式中仅含有$\neg$，$\vee$和$\wedge$三个联结词。

定理 1 $\neg(A^*) = (\neg A)^*$

$\neg(A^-) = (\neg A)^-$

定理 2 $\neg A = A^{*-}$

证明 对公式 A 中出现的联结词的个数 n 进行归纳证明。

奠基：当 $n=0$ 时，A 中无联结词，便有 $A=P$，从而有$\neg A = \neg P$，$A^{*-} = \neg P$。所以定理 2 成立。

归纳：设 $n \leqslant k$ 时定理成立。

现证 $n=k+1$ 时命题也成立。

因为 $n=k+1 \geqslant 1$，A 中至少有一个联结词，可分为三种情形：

$$A = \neg A_1, \quad A = A_1 \wedge A_2, \quad A = A_1 \vee A_2$$

其中 A_1, A_2 中的联结词个数$\leqslant k$。

依归纳假设有：$A_1 = A_1^{*-}$，$A_2 = A_2^{*-}$。

当 $A = \neg A_1$ 时

$$\begin{aligned}
\neg A &= \neg(\neg A_1) \\
&= \neg(A_1^{*-}) && \text{归纳假设} \\
&= (\neg A_1)^{*-} && \text{定理 1} \\
&= A^{*-}
\end{aligned}$$

当 $A = A_1 \wedge A_2$ 时

$$\begin{aligned}
\neg A &= \neg(A_1 \wedge A_2) \\
&= \neg A_1 \vee \neg A_2 && \text{等值公式} \\
&= A_1^{*-} \vee A_2^{*-} && \text{归纳假设} \\
&= (A_1^* \vee A_2^*)^- && \text{内否的定义} \\
&= (A_1 \wedge A_2)^{*-} && \text{对偶的定义} \\
&= A^{*-}
\end{aligned}$$

当 $A = A_1 \vee A_2$ 时

$$\begin{aligned}
\neg A &= \neg(A_1 \vee A_2) \\
&= \neg A_1 \wedge \neg A_2 && \text{等值公式} \\
&= A_1^{*-} \wedge A_2^{*-} && \text{归纳假设} \\
&= (A_1^* \wedge A_2^*)^- && \text{内否的定义} \\
&= (A_1 \vee A_2)^{*-} && \text{对偶的定义} \\
&= A^{*-}
\end{aligned}$$

由数学归纳法知，定理得证。

不难证明如下定理：

定理 3 A 和 A^- 既同永真又同可满足。

定理 4 $A \to B$ 和 $B^* \to A^*$ 既同永真又同可满足。

$A \leftrightarrow B$ 和 $A^* \leftrightarrow B^*$ 既同永真又同可满足。

1.3 范式及其应用

1.3.1 范式

定义 1 命题变元或者命题变元的否定或由它们利用合取词组成的合式公式称为合取式。

定义 2 命题变元或者命题变元的否定或由它们利用析取词组成的合式公式称为析取式。

如：$P, \neg P, P \wedge Q, \neg P \wedge Q \wedge \neg R$ 均为合取式；

$P, \neg P, P \vee Q, \neg P \vee Q \vee \neg R$ 均为析取式。

一、解释与合取式、析取式之间的关系

定理 1 任给一个成真解释有且仅有一个合取式与之对应；任给一个成假解释有且仅有一个析取式与之对应。反之亦然。

如：成真解释 $(P,Q,R)=(T,F,T)$ 对应唯一的一个合取式 $P \wedge \neg Q \wedge R$

成假解释 $(P,Q,R)=(F,F,T)$ 对应唯一的一个析取式 $P \vee Q \vee \neg R$

又如：合取式 $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ 对应唯一的一个成真解释为 $(P,Q,R)=(F,F,T)$

析取式 $P \vee \neg Q \vee \neg R$ 对应唯一的一个成假解释为 $(P,Q,R)=(F,T,T)$

定义 3 形如 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ 的公式称为析取范式，其中 $A_i(i=1,2\cdots,n)$ 为合取式。

如：$P, \neg P, P \wedge Q, P \vee Q, (\neg P \wedge Q) \vee (S \wedge \neg R)$ 均为析取范式。

定义 4 形如 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 的公式称为合取范式，其中 $A_i(i=1,2\cdots,n)$ 为析取式。

如：$P, \neg P, P \wedge Q, P \vee Q$ ，$(\neg P \vee Q) \wedge (S \vee \neg R)$ 均为合取范式。

定理 2 任何命题演算公式均可以化为合取范式（即析取式的合取），也可以化为析取范式（即合取式的析取）。

证明

(1) 设公式 α 为永真公式。

因为任何一个永真公式 α 均与公式 $P \vee \neg P$ 逻辑等价，而 $P \vee \neg P$ 既是析取范式又是合取范式，所以公式 α 既可表示为析取范式又可表示为合取范式。

(2) 设公式 α 为永假公式。

因为任何一个永假公式 α 均与公式 $P \wedge \neg P$ 逻辑等价，而 $P \wedge \neg P$ 既是析取范式又是合取范式，所以公式 α 既可表示为析取范式又可表示为合取范式。

(3) 设公式 α 既非永真又非永假。

设公式 α 的成真解释为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，成假解释为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$。

根据解释和范式的关系知：

对应于成真解释 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的合取式为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$；

对应于成假解释 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 的析取式为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$；

而公式 $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ 的成真解释为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$；