江苏省中小学幼儿园教师自学考试系列教材

小学数学理论基础（下册）

江苏省小学教师自学考试小学教育专业教材编写组

苏 州 大 学 出 版 社

小学数学理论基础

江苏省小学教师自学考试
小学教育专业教材编写组

主编：洪修仁

苏州大学出版社

小学数学理论基础
洪修仁　主编
苏州大学出版社出版发行
苏州市十梓街1号　邮编215006
江苏省新华书店经销
江苏省农垦机关印刷厂印刷
淮阴市淮海西路228号　邮编223001
开本850×1168 1/32　印张23.125　字数578千
1995年4月第1版　1997年9月第2次印刷
印数10501－20600
ISBN 7－81037－127－4/O·7　定价23.00元

编写说明

根据国家教委教师〔1992〕5号文件精神，省教委于1992年11月制定了《江苏省中小学教师自学考试暂行办法》，决定自1993年开始开设中小学教师自学考试系列，旨在加快中学教师学历培训步伐和小学、幼儿园教师提高学历层次培训步伐，以适应我省实施九年制义务教育和提高基础教育质量的需要。

省教委师范教育处、江苏省中小学教师自学考试办公室组织编写了一套小学教师自学考试小学教育专业（专科）教材。《小学数学理论基础》是其中的一门，该课程中有一些内容比较抽象。编写教材时，编者在由浅入深，循序渐进等方面作了努力，以便于读者自学。但其中部分内容对初学者来说还是有一定难度的。为了使读者能顺利地自学好该课程，在省教委师范教育处、江苏省中小学教师自学考试办公室有关领导的关心和支持下，由江苏教育学院数学系部分教师编写了学习指导书．因此，《小学数学理论基础》分为上、下册，上册为教材；下册为学习指导书．

本书对《小学数学理论基础》上册（在本书中简称《基础》上）书中的重点和疑难之处都作了详细的阐述和分析，并补充了一些例题和自测题。本书对《基础》上书中的每一章都相应地写了内容提要、疑难解析、补充例题、自测题四个部分。为了便于学员在复习解题时校核，在书后给了两个附录．对本书给出的自测题作了答案或提示，对《基础》上书上有代表性的习题和复习题作了解答．

《小学数学理论基础》下册由洪修仁主编，由徐新萍、朱忠南、洪修仁、戴曼琴分工执笔，最后由洪修仁统稿成书。具体分工如下：

第一章、第六章　徐新萍

第二章　　　　　朱忠南
第三章至第五章　洪修仁
第七章　　　　　戴曼琴

在编写过程中，《基础》上一书的编者全成梾、陈鼎、李泰祺老师提供了《基础》上一书的习题与复习题解答，谨此向他们表示感谢。

由于编者的水平与经验所限，书中缺点、错误在所难免，敬请专家，读者批评指正。

编者 1995 年元月.

目　录

第一章　基本概念 …………………………………… (1)
　Ⅰ　内容提要 …………………………………… (1)
　Ⅱ　疑难解析 …………………………………… (12)
　Ⅲ　补充例题 …………………………………… (17)
　Ⅳ　自测题 …………………………………… (21)
第二章　数系理论初步 …………………………………… (23)
　Ⅰ　内容提要 …………………………………… (23)
　Ⅱ　疑难解析 …………………………………… (40)
　Ⅲ　补充例题 …………………………………… (47)
　Ⅳ　自测题 …………………………………… (52)
第三章　数的整除性 …………………………………… (54)
　Ⅰ　内容提要 …………………………………… (54)
　Ⅱ　疑难解析 …………………………………… (61)
　Ⅲ　补充例题 …………………………………… (67)
　Ⅳ　自测题 …………………………………… (72)
第四章　同余 …………………………………… (73)
　Ⅰ　内容提要 …………………………………… (73)
　Ⅱ　疑难解析 …………………………………… (79)
　Ⅲ　补充例题 …………………………………… (89)
　Ⅳ　自测题 …………………………………… (95)

第五章　不定方程初步……………………………… (97)
Ⅰ　内容提要 ……………………………………… (97)
Ⅱ　疑难解析……………………………………… (103)
Ⅲ　补充例题……………………………………… (111)
Ⅳ　自测题………………………………………… (117)
第六章　一元多项式 …………………………… (119)
Ⅰ　内容提要……………………………………… (119)
Ⅱ　疑难解析……………………………………… (129)
Ⅲ　补充例题……………………………………… (133)
Ⅳ　自测题………………………………………… (136)
第七章　行列式、矩阵与线性方程组 ……………… (138)
Ⅰ　内容提要……………………………………… (138)
Ⅱ　疑难解析……………………………………… (146)
Ⅲ　补充例题……………………………………… (160)
Ⅳ　自测题………………………………………… (169)
附录一　自测题答案或提示 ……………………… (172)
附录二　《小学数学理论基础》上册习题、复习题选解
……………………………………………………… (188)

第一章　基本概念

1　内　容　提　要

一　集合的有关概念

1. 集合：把若干确定的，有区别的事物放在一起，看作一个整体，就称为一个集合，简称集。其中每一个事物称为这个集合的元素。

通常用大写字母 A、B、C…表示集合；用小写字母 a、b、c…表示集合的元素。当 a 是 A 的元素时，记作 $a\in A$；当 a 不是 A 的元素时，记作 $a\notin A$。

2.　集合的表示法

列举法；描述法；图示法。

3.　有限集、无限集、空集

如果集合中的元素个数是有限的，则称为有限集；否则称为无限集.

不含任何元素的集合称为空集，记作 Φ. 空集是有限集.

4.　集合间的关系

1)　相等

如果集合 A 含有 B 的每个元素，且 B 也含有 A 的每个元素，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$；

2) 子集与真子集

如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$.

如果 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

3) 集合间的关系具有的性质

(1) 对于每个集合 A，有 $A\subseteq A$；$\Phi\subseteq A$.

(2) $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(3) 对于任意三个集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

5. 幂集

一个集合的所有子集构成的集合叫做这个集合的幂集，集合 A 的幂集记作 $P(A)$. 即

$$P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$$

性质：含 n 个元素的集合的幂集有 2^n 个元素。

二 集合的运算及其运算定理

1. 集合的运算

1) 交集

$A\cap B=\{\alpha \mid \alpha\in A \text{ 且 } \alpha\in B\}$,

2) 并集

$A\cup B=\{\alpha|\alpha\in A \text{ 或 } \alpha\in B\}$,

3) 差集

$A\backslash B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}=A\cap\overline{B}$,

4) 补集

设 A 是全集 U 的一个子集，则全集 U 中不属于 A 的所有元素构成的集合称为 A 的补集，记为 $\overline{A}$。即

$\overline{A}=U\backslash A$

易见，空集的补集是全集，全集的补集是空集.

2. **集合的运算定律**

1) 交换律

$A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$;

2) 结合律

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

3) 分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

4) 互补律

$A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=U$;

5) 幂等律

$A\cap A=A$, $A\cup A=A$;

6) 对合律

$\overline{\overline{A}}=A$;

7) 0—1 律

$A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap U=A$;

$A\cup\varnothing=A$, $A\cup U=U$;

8) 吸收律

$A\cap(A\cup B)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$.

9) **德·摩根律**

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

三 映射的概念

1. **映射**. 设 A、B 是两个非空集合，如果按照某一法则 f，A 中任何一个元素 x 都与 B 中唯一确定的元素 y 对应，则称该法则 f 为从 A 到 B 的一个映射。并称 y 为 x 在 f 下的象，记为 $f(x)$，称 x 为 y 的原象。其中集合 A 称为映射 f 的定义域；而 f 的所有象组成的集合 $f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}$ 称为映射 f 的值域。

显然，$f(A) \subseteq B$.

集合 A 到 A 的映射称为 A 的变换.

恒等映射：把集合 A 的每个元素对应到自身的映射，称为 A 的恒等映射. 记为 I_A.

2. 几种特殊的映射

1） **满射**

如果 f 的值域 $f(A)=B$,则称映射 f 为 A 到 B 的满射.

2） **单射**

设 f 是 A 到 B 的映射,对于 A 中任两个元素 x_1,x_2,若 $x_1 \neq x_2$,则 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射.

3） **双射**

如果映射 $f: A \to B$, 既是单射，又是满射，则称 f 为 A 到 B 的双射。

集合 A 到 A 的双射也称为 A 的一一变换。

注 恒等映射既是单射，也是满射，因而是双射。

3. 映射的相等

设 f 和 g 都是 A 到 B 的映射,如果对于 A 的每个元素 x,都有 $f(x)=g(x)$,则称映射 f 与 g 相等. 记为 $f=g$.

4. 复合映射

设两个映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$,则 f 和 g 的复合 $g \circ f$ 是一个 A 到 C 的映射,其中 $g \circ f(x)=g(f(x))$, $x \in A$.

注： ①要构造 $g \circ f$ 就必须要求 f 的值域包含在 g 的定义域中.

②映射的复合不满足交换律。但满足结合律，即

$(f \circ g) \circ h=f \circ (g \circ h)$.

性质：若 f、g 都是双射，则 $f \circ g$ 也是双射。

5. 逆映射

设 f 是 A 到 B 的映射，如果存在 B 到 A 的映射 g，使得 $g \circ f$

$=I_A$，则称为左可逆映射，称 g 为 f 的左逆映射。

如果存在 B 到 A 的映射 g，使得 $f \cdot g = I_B$，则称 f 为右可逆映射，称 g 为 f 的右逆映射.

注 设 f 是 A 到 B 的映射，则

f 是左可逆映射的充要条件为"f 是单射"；

f 是右可逆映射的充要条件为"f 是满射".

如果既是左可逆映射，又是右可逆映射则称为可逆映射。

如果映射 f 既有左逆映射，又有右逆映射，则 f 的左、右逆映射相等，统称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}.

注： f 是可逆映射的充要条件为"f 是双射."

四 集合的基数

1. 有限集的基数

1） 集合等势的概念

设 A、B 是两个集合，如果存在从 A 到 B 的双射，则称 A 与 B 等势，记作 $A \sim B$.

注：①两个有限集等势当且仅当它们的元素个数相等。有限集所含元素的个数就是有限集的基数.

②等势具有自反性、对称性、传递性.

2） 集合的基数

和集合 A 等势的一切集合的共同特征叫做集合 A 的基数，又称为 A 的势，记作 $|A|$.

2. 有限集基数的计算

设 A、B 是两个有限集，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

注：此公式推广到三个集合的情形，即为 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

3. 有限集与无限集

1） 有限集与无限集的概念

设 n 是某个确定的自然数，则与集合

$$A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$

等势的集称为有限集，n 是这个有限集的基数，又称为势.

除有限集以外的其它集合称为无限集.

注： 与有限集等势的集是有限集，与无限集等势的集是无限集。

2) 有限集与无限集的特征

有限集不能与它的真子集等势；

集合 A 是无限集的充要条件是 A 与它的一个真子集等势.

4. 可数集与可数势

1) 概念

与自然数集 $N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 等势的集叫做可数集.

可数集的势称为可数势. 记为 $\aleph$.（读作阿列夫零）.

2) 性质

(1) 一个集合 A 是可数集的充要条件是它的所有元素可以排成无穷序列

(2) 可数集与有限集的并集（或差集）仍是可数集.

(3) 任何无限集都含有可数子集.

(4) 可数集的子集是有限集或可数集.

(5) 可数个可数集的并集是可数集.

注： ①可数集是无限集；

②并不是所有的无限集都是可数集。比如实数集 R 就是不可数集. 实数集的势称为连续势，连续势大于 $\aleph$..

五 二元关系

1. 直积和关系

1) 直积

设 A、B 是两个非空集合，则 A 与 B 的直积为

$$A\times B=\{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}$$

这里 (a, b) 为序偶.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

注：①当 $A=B$ 时，$A\times B$ 记为 A^2.

②一般情况下，$A\times B\neq B\times A$.

2) 二元关系

设 A、B 是两个非空集合，则直积 $A\times B$ 的任一子集 R 都叫做 A、B 的一个二元关系。当 $(x, y)\in R$ 时，就说 x 和 y 具有关系 R，记作 xRy。

特别地，当 $A=B$ 时，$A\times A$ 的子集 R 叫做 A 的一个二元关系。

2. 等价关系

1) 等价关系的概念

具有自反性、对称性、传递性的二元关系 R 称为等价关系. 等价关系 R 通常记为～. 于是 $(a, b)\in R$，记为 $a\sim b$.

自反性：$(x, x)\in R$，对任意 $x\in A$；

对称性：若 $(x, y)\in R$，则 $(y, x)\in R$；

传递性：若 $(x, y)\in R$，$(y, z)\in R$，则 $(x, z)\in R$；

这里的 $x, y, z, \in A$、R 是集合 A 的一个二元关系.

2) 等价类、商集

(1) 集合的分类

设 A 是一个非空集合，$P(A)$ 是 A 的幂集. $\Sigma\subseteq P(A)$，如果满足

1°对任意的 $A_a\in\Sigma$，都有 $A_a\neq\varnothing$；

2°对于任意的 A_a，$A_b\in\Sigma$，有 $A_a=A_b$ 或 $A_a\cap A_b=\varnothing$；

3°$\bigcup A_a=A$，$A_a\in\Sigma$.

则称 Σ 是集合 A 的一个分类，其中 Σ 的每个元素 A_a 都称为 Σ 的一个类。

(2) 等价关系与集合的分类之间的关系

集合 A 的一个分类 Σ 决定 A 的一个等价关系，集合 A 的一个

价关系～决定 A 的一个分类.

(3) 等价类

设 A 是非空集合，～是 A 的一个等价关系，$a\in A$，则与 a 等价的所有元素组成的集合称为由 a 产生的等价类，记作 $[a]$. 即

$$[a] = \{b\in A|a\sim b\}$$

等价类具有以下性质

1° 同一个等价类的任两个元素等价；

2° 两个不等价的元素所在的类不相交，两个等价的元素属于同一个等价类；

3°集合 A 的每个元素属于且仅属于一个等价类.

(4) 商集

设 A 是非空集合，～是 A 的一个等价关系，由～决定的等价类为 $[a]$，$[b]$，$[c]$，…，则以这些等价类为元素的集合称为 A 关于～的商集，记作 $A/\sim$.

3. 顺序关系

1) 偏序集、偏序关系

设 R 是非空集合 A 上的二元关系，x、$y\in A$，如果每当 xRy 并且 yRx 时，就有 $x=y$，则称 R 满足反对称性。

如果 A 上的二元关系 R 满足自反性，反对称性和传递性，则称 R 为 A 上的一个偏序关系，记作$\preceq$. 为方便起见，记作$\leqslant$. 具有偏序关系的集合 A 称为偏序集，记作 $\{A, \leqslant\}$

2) 全序集、全序关系

设 A 为任意集合，$\leqslant$是 A 上的一个偏序关系。如果对于任意 x，$y\in A$，都有

$$x\leqslant y \quad 或\ y\leqslant x$$

则称$\leqslant$为 A 上的一个全序关系，并称 $\{A, \leqslant\}$ 为一个全序集，也称有序集。

六 代数运算

1. 代数运算与代数体系的概念

1） 代数运算

设 A 为非空集合，则 $A\times A$ 到 A 的映射 θ 称为 A 的代数运算. 也就是说对于任意的 $a, b\in A$，存在唯一的 $c\in A$，使得 $\theta(a, b) = c$，通常记作 $a\theta b=c$.

2） 代数体系、子代数体系

设 A 为非空集合，θ 为 A 的一个代数运算。将 A 与 θ 作为一个整体，记作 $\{A; \theta\}$，则称 $\{A; \theta\}$ 为具有一个代数运算的代数体系.

如果 A 有两个代数运算 θ_1，θ_2，则构成具有两个代数运算的代数体系 $\{A; \theta_1, \theta_2\}$.

设 $\{A; \theta\}$ 是一个代数体系，B 是 A 的一个非空子集，如果 A 的代数运算 θ 在 B 中是封闭的，即 B 关于代数运算 θ 也构成一个代数体系 $\{B; \theta\}$，则称 $\{B; \theta\}$ 为 $\{A; \theta\}$ 的一个子代数体系.

2 常见的运算律

1） 结合律

设 A 为一非空集合，$\circ$ 是 A 的一个代数运算，如果对任意的 a、b、$c\in A$，都有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c),$$

则称代数运算 $\circ$ 满足结合律.

2） 交换律

如果对任意的 a、$b\in A$，都有

$$a\circ b=b\circ a,$$

则称代数运算 $\circ$ 满足交换律.

3） 分配律

设 $\oplus$ 和 $\odot$ 是 A 上的两个代数运算，如果对任意的 a、b、$c\in A$，都有

$$a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c),$$