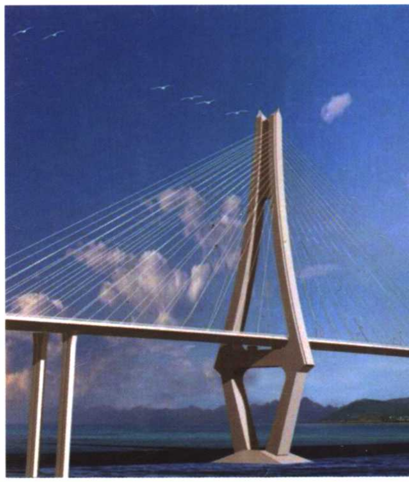
TANSUXING LIXUE

中国地质大学（武汉）研究生系列教材

弹塑性力学

李同林　殷绥域　编著



中国地质大学（武汉）研究生教材建设基金资助

CUGP 中国地质大学出版社

中国地质大学(武汉)研究生系列教材

弹塑性力学

李同林　殷绥域　编著

中国地质大学出版社

内 容 简 介

本书系统阐述了弹塑性力学的基本概念和理论，并介绍了弹塑性力学各类问题的求解方法和应用。

全书共分十二章编写，内容包括：绪论、应力理论、应变理论、弹性本构方程、塑性本构方程和基本解题方法、平面问题的直角坐标和极坐标解答等基础理论；柱体的扭转、空间轴对称问题、加载曲面、塑性势能理论、弹性力学变分法及近似解法、塑性力学极限分析理论、平面应变问题的滑移线场理论解等较为深入的理论。与本教材教学内容相配套编写的《弹塑性力学习题集》另行出版。

本书可作为土木、机械、材料、水利、安全、地质等工程专业研究生教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学/李同林，殷绥域编著．—武汉：中国地质大学出版社，2006.9
ISBN 7-5625-2121-2

Ⅰ.弹…
Ⅱ.①李…②殷…
Ⅲ.①弹性力学②塑性力学
Ⅳ.O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 083391 号

弹塑性力学　　李同林　殷绥域　编著

责任编辑：方　莉　　责任校对：戴　莹

出版发行：中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)　　邮政编码：430074
电话：(027)87482760　传真：87481537　E-mail：cbb@cug.edu.cn
经　销：全国新华书店　http://www.cugp.cn

开本：787 毫米×1092 毫米 1/16　　字数：450 千字　印张：17.625
版次：2006 年 9 月第 1 版　　印次：2006 年 9 月第 1 次印刷
印刷：湖北地矿印业有限公司　　印数：1—1 000 册

ISBN 7-5625-2121-2/O·76　　定价：35.00 元

前　言

本书是为高等学校工程类专业(非力学专业)研究生开设弹塑性力学课程的需要而编写。弹塑性力学是工科工程类专业的一门十分重要的技术基础课程。它的理论同许多工程技术问题都有着十分密切的联系,并为设计工程结构和机械构件提供可靠的理论依据。因此,它受到各工程类专业的重视。

本书的内容大体可分为两部分:第一～六章为基础理论部分,可供土木、机械、建筑、水利、钻探、材料、地质、石油等工程类专业教学使用;第七～十二章为进一步研究和加深的理论,可供土木、建筑、机械、水利、钻探等工程专业做深层次教学使用。

本书是在中国地质大学力学教研室教师多年教学实践和改革的基础上,根据各工程专业的教学基本要求,为适应国家教育部“面向21世纪高等工程教育教学内容和课程体系改革计划”的新情况编写而成。本书针对弹塑性力学内容抽象、公式繁多、教学难度和信息量大等特点,并根据教学对象的数理基础实际情况,在教材的撰写过程中注意了以下几点:

(1)考虑到非力学类专业学生的数理基础,在教材撰写过程中,做到对基本概念和基本理论的阐述与交代深入浅出,循序渐进,简明扼要,脉络清晰,透彻讲解。教材语言通俗流畅,图文并茂,便于自学。

(2)为兼顾各工程专业的教学需求,教材对岩土材料的变形模型与强度准则做了适当的介绍。并且本着教师讲授“少而精”、学生自学有材料的原则,教材还编入了一些带“*”号的内容,教师可酌情掌握,以求达到在传授知识的同时,培养和提高学生自学和分析解决问题的能力。

(3)为适应力学理论发展的趋势,提高学生阅读和撰写科技文献的能力,并考虑到学生实际的数理基础,教材对弹塑性理论公式的表述,采用了常规表述和张量描述两种形式,对力学变分理论做了较深入系统的讨论,并给出了数学张量分析和变分法简介两个附录。本书通过多届的教学实践,教学效果良好。

(4)为了有效地解决学生在学习弹塑性力学及解题过程中的困难，本教材编入了适量的例题，并配合教材内容编有习题集和参考提示，以利于学生的学习理解和能力的培养。

本书由李同林教授和殷绥域教授合编，具体分工如下：第一、二、三、十二章及附录一由李同林撰写，第四、五、六、七、八、九、十、十一章及附录二是以殷绥域编写的《弹塑性力学》(1988年版，中国地质大学出版社)为初稿，具体的修编工作由李同林执笔完成。全书由李同林统一修订定稿。

由于成稿时间较仓促以及作者水平所限，教材内容中一定存在有不妥和值得商榷之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

作　者

2006年6月于武汉

目 录

第一章 绪 论 …… (1)
§1-1 弹塑性力学的研究对象、研究方法和基本任务 …… (1)
§1-2 弹塑性力学的基本假设 …… (2)
§1-3 弹塑性力学的发展概况 …… (4)
第二章 应力理论·应变理论 …… (5)
§2-1 应力的概念·应力状态的概念 …… (5)
§2-2 一点应力状态的应力分量转换方程 …… (6)
§2-3 一点应力状态的主应力·应力主方向·应力张量不变量 …… (10)
§2-4 最大(最小)剪应力·空间应力圆·应力椭球 …… (14)
§2-5 应力张量的分解——球应力张量与偏应力张量 …… (17)
§2-6 主偏应力·应力偏量不变量 …… (19)
§2-7 八面体应力·等效应力 …… (20)
§2-8 平衡(或运动)微分方程 …… (21)
§2-9 静力边界条件 …… (23)
§2-10 位移·应变的概念·几何方程·转角方程 …… (25)
§2-11 位移边界条件 …… (33)
§2-12 一点应变状态的应变分量转换方程 …… (34)
§2-13 一点应变状态的主应变·应变主方向·最大(最小)剪应变 …… (35)
§2-14 应变张量的分解·应变偏量不变量·等效应变 …… (37)
§2-15 变形连续性条件(应变协调方程) …… (39)
§2-16 应变速率·应变增量·应变莫尔圆 …… (41)
第三章 弹性变形·塑性变形·本构方程 …… (43)
§3-1 概 述 …… (43)
§3-2 弹性变形与塑性变形特点·塑性力学的附加假设 …… (43)
§3-3 弹塑性力学中常用的简化力学模型 …… (46)
§3-4 广义虎克定律·弹性应变能函数·弹性常数间的关系 …… (49)
§3-5 应力张量与应变张量分解的物理意义 …… (58)
§3-6 弹性势能公式·弹性势能的分解 …… (59)
§3-7 塑性应力偏量状态·Lode 应力参数 …… (61)
§3-8 屈服函数·主应力空间·常用屈服条件 …… (62)
§3-9 加载准则·加载曲面·加载方式 …… (72)
§3-10 弹塑性应变增量与应变偏量增量间的关系 …… (75)
§3-11 塑性变形本构方程——增量理论(流动理论) …… (76)

§3-12* 薄壁圆筒受拉伸与扭转的增量理论解……(80)
§3-13 塑性变形本构方程——全量理论(形变理论)……(83)
§3-14* 简单加载定理……(86)
§3-15* 薄壁圆筒受拉伸与扭转的全量理论解……(87)
§3-16* 卸载定理……(87)
§3-17 岩土材料的变形模型与强度准则……(90)
§3-18 本章小结·关于余能的概念……(96)
第四章 弹塑性力学基础理论的建立及基本解法 ……(100)
§4-1 弹塑性力学基础理论的建立……(100)
§4-2 弹塑性力学问题的提法……(102)
§4-3 弹塑性力学问题的基本解法……(103)
§4-4 弹塑性力学的基本定理与原理……(104)
§4-5 弹性力学的最简单问题·求解弹性力学问题简例……(106)
§4-6 塑性力学的最简单问题·求解塑性力学问题桁架实例·塑性分析的概念 …(108)
第五章 平面问题直角坐标解答 ……(112)
§5-1 弹塑性力学平面问题及其基本方程……(112)
§5-2 平面问题的应力法求解……(114)
§5-3 应力函数·双调和方程……(116)
§5-4 平面问题的多项式解答……(118)
§5-5 梁的弹性平面弯曲……(120)
§5-6* 三角形截面重力坝的弹性计算……(126)
§5-7* 用三角级数解弹性平面问题简介……(127)
§5-8 弹性平面问题应力函数的选择小结……(128)
§5-9 梁的弹塑性弯曲问题的求解……(129)
第六章 平面问题极坐标解答……(133)
§6-1 平面问题基本方程的极坐标表示……(133)
§6-2 平面问题的极坐标解法·极坐标轴对称问题……(137)
§6-3 厚壁圆筒问题的弹性解……(139)
§6-4 厚壁圆筒问题的弹塑性解……(141)
§6-5 半无限平面体问题……(143)
§6-6 圆孔孔边应力集中……(147)
第七章 柱体的扭转 ……(151)
§7-1 任意等截面直杆的自由扭转……(151)
§7-2 椭圆截面柱体的扭转……(155)
§7-3* 矩形截面柱体的扭转……(157)
§7-4 薄膜比拟法……(160)
§7-5* 开口薄壁杆件的自由扭转……(163)
§7-6* 闭口薄壁杆自由扭转·剪应力环流公式……(165)
§7-7 柱体的弹塑性扭转……(168)

第八章 弹性力学问题一般解·空间轴对称问题 …………………………………… (174)
§8-1 弹性力学问题的一般解 …………………………………… (174)
§8-2* 任意等截面悬臂梁的弯曲 …………………………………… (178)
§8-3 空间轴对称问题的基本方程 …………………………………… (181)
§8-4 半空间体在边界上受法向集中力——Boussinesq 问题 …………………………………… (183)
§8-5* 半无限体表面圆形区域内受均匀分布压力作用 …………………………………… (185)
§8-6* 两球体间的接触压力 …………………………………… (188)
§8-7 力学分析方法概述 …………………………………… (191)
第九章* 加载曲面·材料稳定性假设·塑性势能理论 …………………………………… (193)
§9-1 加载曲面 …………………………………… (193)
§9-2 材料稳定性假设(Drucker 假设) …………………………………… (195)
§9-3 塑性势能函数·塑性势能理论 …………………………………… (198)
§9-4 小结·例题 …………………………………… (201)
第十章 弹性力学变分法及近似解法 …………………………………… (204)
§10-1 概 述 …………………………………… (204)
§10-2 力学变分原理的基本概念 …………………………………… (204)
§10-3 虚功原理(虚位移原理) …………………………………… (206)
§10-4 最小(总)势能原理·卡氏第一定理 …………………………………… (208)
§10-5 余虚功原理(虚应力原理) …………………………………… (212)
§10-6 关于实与虚的功与余功、应变能与余应变能的概念 …………………………………… (214)
§10-7 最小(总)余能原理 …………………………………… (216)
§10-8 最小功原理·卡氏第二定理 …………………………………… (217)
§10-9* 广义变分原理 …………………………………… (218)
§10-10* 各变分原理之间的关系 …………………………………… (222)
§10-11 基于变分原理的近似解法 …………………………………… (223)
第十一章* 塑性力学极限分析理论 …………………………………… (232)
§11-1 概 述 …………………………………… (232)
§11-2 虚功率原理与最大耗散能原理 …………………………………… (233)
§11-3 极限分析定理 …………………………………… (236)
§11-4 静力法·机动法 …………………………………… (239)
第十二章* 平面应变问题的滑移线场理论解 …………………………………… (244)
§12-1 概述·基本方程 …………………………………… (244)
§12-2 滑移线及其性质 …………………………………… (245)
§12-3 边界条件 …………………………………… (252)
§12-4 应力不连续线 …………………………………… (253)
§12-5 单边受均布压力作用的楔 …………………………………… (254)
§12-6 平头冲模压入 …………………………………… (257)
§12-7 厚壁圆筒轴对称滑移线场 …………………………………… (258)

§12－8　双边切口和中心切口的拉伸试件 …………………………………… (260)
附录Ⅰ　张量概念及其基本运算·下标记号法·求和约定 ……………………… (262)
附录Ⅱ　变分法简介 ………………………………………………………… (267)
参考文献 ……………………………………………………………………… (274)

注:“*”表示为选学内容。

第一章 绪 论

§1-1 弹塑性力学的研究对象、研究方法和基本任务

弹塑性力学是变形固体力学的一个重要分支，是研究可变形固体受到外载荷、温度变化等因素的影响而发生的应力、应变和位移及其分布规律的一门科学。

在长期的生产斗争和科学试验中，人们认识到几乎所有的可变形固体材料（以下简称固体）都不同程度地具有弹性和塑性的性能。固体当受外力（或由于温度的影响）作用时，一定会产生变形（弹性变形和塑性变形）。根据变形的特点，固体在受载过程中通常呈现出两种不同而又连续的变形阶段：前者称为**弹性变形阶段**；紧接的后者称为**弹塑性变形阶段**，若从后者中忽略弹性变形时，亦可称为**塑性变形阶段**。当作用于物体的外力小于某一数值时，在卸去外载后，变形即行消失，物体完全恢复其原来的形状，这种能自动恢复的变形称为**弹性变形**。固体只产生弹性变形的阶段称为弹性阶段。当外力增加到超过某一限度时，这时再卸去外载，则固体不能完全恢复其原有的形状而产生一部分不能消失的永久变形，这种不能恢复的变形称为**塑性变形**。图 1-1 所示的是低碳钢金属材料在单轴拉伸试验中的应力应变曲线，OB 段为弹性阶段、BG 段为弹塑性阶段（或称为塑性阶段）。图中 σ_p 为**比例极限**，σ_e 为**弹性极限**，σ_s 为屈服极限，σ_b 为**强度极限**。弹塑性力学就是研究固体在这两个紧密相连的变形阶段内的力学响应的一门科学。

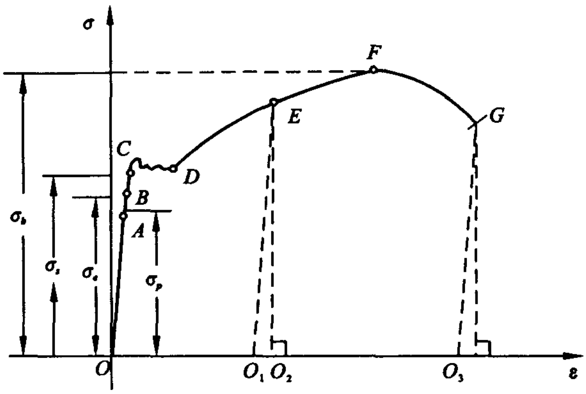


图 1-1

一般弹塑性力学是分为弹性力学与塑性力学两门课程来分别研究固体在上述弹性与塑性两个阶段的力学问题。弹性力学与塑性力学已有近两个世纪的发展历史，随着近代电算技术的发展及现代工程技术的需要，弹性力学和塑性力学仍然是富有生命力的学科。综合这两门课程而开设弹塑性力学课程，这样讲授既在于这两门课程自身的内在联系，更重要的是使读者能对固体材料变形的全过程有一个完整且较深刻的认识。

弹塑性力学和材料力学都是固体力学的分支学科。因此，它们在分析问题、研究问题时的最基本思路是相同的，即对于一个静不定问题的求解，一般都要经过三个方面的分析。这三个方面分别为：① **受力分析**；② **几何变形协调条件分析**；③ **力与变形间关系的分析**。从而获得三类基本方程，联立求解即可使静不定问题得到解决。虽然，它们分析解决问题的基本思路相同，但是，这两门课程各自在研究对象和研究方法上却有着明显的差异和区别。

在研究对象上，材料力学的研究对象基本上是各种杆件，即物体的长度远大于其厚度和宽度的所谓一维空间问题。弹塑性力学除了更精确地研究材料力学一维构件问题外，还能研究和解决二维或三维物体的更广泛的弹塑性力学问题。

在研究方法上，弹塑性力学以其解答问题的严密性和普遍性为特点，与材料力学有根本的区别。例如，在材料力学中是以平面截面假设为基本前提，经简化计算得出工程上实用但较为近似的解答；而在弹塑性力学中，则是采用首先从受力物体中一点处，利用截面法截取出一个单元体(无限小微元体)来作为研究对象，再以其分析解决问题的基本思路，从上述三个方面研究一点单元体的受力、变形和受力与变形间的关系，建立起普遍适用的基本方法和理论，然后从整个物体的具体情况出发，满足具体问题的不同边界条件，从而求得整个物体内的应力、应变和位移的分布变化规律。

此外，材料力学是以危险截面最大应力为根据的传统许用应力设计观点，而弹塑性力学则采用极限分析理论。这是因为大多数塑性材料的杆件或结构部分地达到塑性变形时并没有破坏，随塑性屈服过程的发展，应力将重新分配，它将还有能力继续工作，所以设计时可以把杆件或结构按部分达到塑性、部分保持弹性状态，使塑性变形限制在弹性变形的量级内，从而提高了经济效益。

另外，有些工程问题(例如，非圆截面杆件的扭转、孔边应力集中、深梁受载的应力分析、危险截面的传统许用应力设计观点的局限等问题)用材料力学和结构力学的理论无法求解，或无法给出精确的、可靠的结论及本身理论的误差，或不能充分发挥材料的潜在能力，提高经济效益。而应用弹塑性力学的理论和方法，上述问题都能得到满意或精确的解答和评价。

总之，弹塑性力学与材料力学虽同属固体力学的学科范畴，就其求解问题的根本思路基本上是相同的，但就其研究对象，特别是研究方法上是有明显区别的。无疑，弹塑性力学的研究对象更广泛，分析问题的方法更严谨，建立起来的基本方程和理论更普遍适用，得到的结果也更精确。

综上所述，大体上可将弹塑性力学的基本研究任务归纳为以下几点：

(1) 建立求解固体的应力、应变和位移分布规律的基本方程和理论；

(2)给出初等理论无法求解的问题的理论和方法，以及初等理论可靠性与精确度的度量；

(3)确定和充分发挥一般工程结构物的承载能力，提高经济效益；

(4)为进一步研究工程结构物的强度、振动、稳定性和断裂理论等力学问题，奠定必要的理论基础。

§1－2　弹塑性力学的基本假设

固体材料一般分为晶体和非晶体两大类，绝大部分固体都是由晶体集合而成的。从微观结构看，晶体是由许多微粒(原子、分子或离子)有规则地周期性地排列成一定的结晶格子(晶格)构成的。因此，晶体具有远程有序性，是**各向异性材料**，也就是说晶体的物理性质(包括力学性质)具有一定的方向性。例如，岩盐、冰洲石、石英、金属等。但是，从宏观尺度上看，许多固体材料都是由众多晶粒方位杂乱地组合起来的，这时整个固体材料的物理力学性质宏观上表现为各向同性，因此可视为**各向同性材料**。例如，钢材、铝材、闪长岩、砂岩块等。有些固体材料即便是从宏观尺度上看也具有明显的各向异性，例如木材、煤岩、砂岩岩层等，这时则应考虑材料物性的方向性。此外，关于固体组成材料分布的均匀性，以及固体中常存在的一些缺陷

(如孔洞、微裂纹等)等问题,固体力学也主要是从宏观尺度去加以分析和处理的。因此,在固体力学中,对于固体物性的方向性、组成材料的均匀性以及结构上的连续性等问题,是从较宏观的尺度,根据具体研究对象的性质,并联系求解问题的范围,慎重地加以分析和研究,尽量忽略那些次要的局部的对所研究问题的实质影响不大的因素,使问题得以简化。因此,弹塑性力学对其研究对象可变形固体的物理和几何性质加以抽象,提出如下基本假设。

一、物理假设

1. 连续性假设

假定物质充满了物体所占有的全部空间,不留下任何空隙。这样,物体内部的一些物理量,例如应力、应变、位移等才可能是连续的,因而可用坐标的连续函数来描述它们的变化规律。虽然这种假设与物质结构的微观理论相矛盾,但对于一门研究宏观现象的学科是可以采纳的。

2. 均匀性与各向同性的假设

假定物体内部各点处以及每一点处各个方向上的物理性质相同。这样,物体的弹性常数(弹性模量、泊松系数等)和塑性常数将不随坐标的位置和方向而变化。虽然金属材料的晶体结构呈各向异性,但通常上述物理量是指某种统计平均值,所以金属材料一般不违背这个假设。对于木材、岩土材料等则要考虑限制条件。

3. 力学模型的简化假设

(1) 完全弹性假设:假定除去引起物体变形的外力后,物体能够完全恢复原状,而不留下任何残余变形,并假定材料服从虎克定律,即应力与应变呈线性关系,加载与卸载规律相同,这就保证了应力与应变的一一对应关系,这就是材料力学与线性弹性力学(以下我们所学习的弹性力学)中所采用的完全弹性体力学模型。

(2) 弹塑性假设:当物体除去外载而产生永久变形,不能恢复原状,此时材料呈塑性状态,加载与卸载的规律不一样,同时应力应变关系曲线是非线性的。由于上述问题的复杂性,在塑性力学中将分别作各种理想化的弹塑性模型假设,关于这方面的假设以及塑性力学中的附加假设将在专门章节中再给予介绍。

二、几何假设——小变形条件

假定物体在受力以后,体内的位移和变形是微小的,即体内各点位移都远远小于物体的原始尺寸,而且应变(包括线应变与角应变)均远远小于1。这一假定,使在建立弹塑性体变形以后的平衡方程时,可以不考虑力作用方向的改变;在研究变形和位移时可以略去应变的高阶微量,即略去二次及二次以上的幂次项,从而使得平衡条件与几何变形线性化。需要说明的是:一般工程设计中塑性变形的产生应限制在弹性变形的相同量级,因此上述小变形条件在塑性力学中依然是有效的。

物体的变形如果是完全弹性的,但不服从虎克定律,即物理非线性;或者不服从小变形条件,所谓大变形几何非线性问题,统属于非线性弹性力学研究的范畴。其中物理非线性问题与塑性力学稍有联系,但均不属于本课程的学习内容。

§1-3 弹塑性力学的发展概况

可以认为，关于弹塑性力学的研究是由英国科学家虎克(R. Hooke)于1678年提出的固体材料的弹性变形和所受外力成正比的虎克定律开始的。

19世纪20年代，法国科学家纳维叶(C. L. M. H. Navier)、柯西(A. L. Cauchy)和圣文南(A. J. C. B. Saint Venant)等建立了数学弹性理论，他们正确地给出了应变、应变分量和应力、应力分量的概念，建立了变形体的平衡微分方程、几何变形方程、变形协调方程，以及各向同性材料和各向异性材料的弹性应力应变关系(即广义虎克定律)，从而奠定了弹性力学的理论基础。

关于固体材料塑性变形的研究是法国科学家库伦(C. A. Corlomb)于1773年研究土力学中土壤的剪断裂时，提出了最大剪应力理论开始的。屈雷斯卡(H. Tresca)又把最大剪应力理论引用到了金属的塑性变形研究中，并于1864年提出了最大剪应力屈服条件。但塑性力学的理论基础则是由圣文南和莱维(M. Levy)在一个多世纪前所奠定的。圣文南认为在材料的塑性变形中，最大剪应力和最大剪应变增量方向应当一致。基于这一认识，莱维于1871年将塑性应力应变关系由二维推广到了三维情况。波兰力学家胡勃(M. T. Houber)在1904年提出了材料的形状改变比能理论，米塞斯(R. Von Mises)于1913年进一步提出了应变能屈服条件，并独立地提出了和莱维相同的塑性应变增量与应力关系的表达式。此后，1924年普朗特(L. Prandtl)和1930年罗伊斯(A. Reuss)提出了包括弹性应变增量部分的三维塑性应变增量和应力关系的表达式。这就是塑性力学中的增量理论。尤其值得重视的是：在这个时期内进行了复杂应力状态下塑性变形规律的第一批系统的实验研究，此外，塑性力学也开始有成效地应用到工程技术中去了。在此同时，享奇(H. Hencky)、纳戴(A. L. Nadai)和伊留申(A. A. Ииьющин)等建立和发展了塑性力学应力应变关系的形变理论，即全量理论。至此，弹塑性力学的基本理论框架得以确立，并被广泛地应用于解决工程实际问题，在实际应用的过程中，弹塑性力学在理论方面建立了许多重要概念、法则和原理，给出了求解问题的方法，并得到了进一步的发展。

第二章　应力理论·应变理论

§2-1　应力的概念·应力状态的概念

若一物体受到外力 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的作用，它必然产生变形，也即其形状或尺寸会发生变化，同时物体内各部分之间将产生相互平衡的内力（附加内力）。现假想用一个平面 K，将物体截开分成两部分，如图 2-1 所示。显然，这两部分将通过 K 截面有分布内力的相互作用。

一般情况下，物体通过不同截面所传递的内力是不同的，即使在同一截面（如 K 截面）上，各点处所传递的内力也是不相同的。换句话说，就是在同一截面上各点处的分布内力有强弱之分和方向之别。

现考察位于 K 截面上的一点 C，由于已假定物体内部的每一处都被材料所充满，故可在 C 点处周围附近取一微小面积 ΔA，并以 ΔF 表示通过 ΔA 面积传递的内力合力，则内力在 ΔA 面积上的平均集度为 $\Delta F/\Delta A$。如令 ΔA 无限缩小而趋于零，则得

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} = p \qquad (2-1)$$

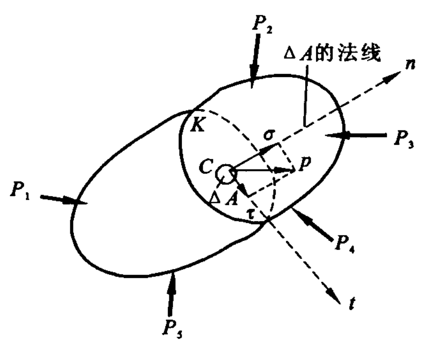


图 2-1

这个极限矢量 p 就是物体在 K 截面上 C 点处的应力。它反映了物体 K 截面上分布内力在 C 点处的集中程度。由于 ΔA 为标量，故 p 的方向与 ΔF 的极限方向一致。

应力 p 通常称为受力物体某截面上某点处的**全应力**（也称**合应力**）。应力的产生同物体的变形密切相关，为了将应力同物体的变形和材料的强度直接相关，我们总是将全应力 p 在该点该截面上分解为一个与截面外法线相平行的法向分量和一个与截面相切的切向分量。我们将指向与外法线相平行的应力分量称为**正应力**，用希腊字母 σ 来表示；而将指向与截面相平行的应力分量称为**剪应力**，用希腊字母 τ 来表示。若将 K 截面上 C 点处微小面积 ΔA 的内力合力 ΔF 分解为法向分量 ΔF_n 和切向分量 ΔF_t（为了图件的清晰，在图 2-1 中未标明），则同样道理，我们可将 C 点处 K 截面上的正应力分量 σ 和剪应力分量 τ 分别表示为

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA} = \sigma_n \\ \tau &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA} = \tau_{nt} \end{aligned}\right\} \qquad (2-2)$$

综上所述，当我们谈及一个应力时，不仅要说明该应力分量是受力物体内哪一点处的应力，而且还要表明该应力是作用在该点的哪一个截面上，其指向又同那个方向平行的。为了表明以上情况，我们给应力分量符号两个下角标字母记号，第一个字母表明该应力作用截面的外法线方向同哪一个坐标轴相平行，第二个字母表明该应力的指向同哪个坐标轴相平行。由于

表示正应力分量符号的两个下角标字母总是相同的，故缩记为一个字母表明这两层含义。如图 2-1 和式(2-2)中的 σ_n 和 τ_{nt} 就分别表示受力物体内 C 点处外法线为 n 的 dA 微截面上的、且指向与外法线 n 相平行的正应力分量和指向与 t 方向相平行的剪应力分量。

在上述讨论中，过 C 点的 K 微截面是任选的。显然，过 C 点我们还可以截取无限多个不同方位的这样的 K 平截面，或者说过 C 点有无限多个连续变化的 n 方向。过受力物体内同一点处不同微截面上的应力是不同的，但它们都反映表征的是同一点处的受力状态。我们定义，**受力物体内某点处所取无限多截面上的应力情况的总和，就显示和表明了该点的应力状态。**

此外，应力及其分量的量纲为[力][长度]$^{-2}$，当采用国际单位制(SI 制)时，其单位为牛(顿)/平方米(N/m^2)，称为帕斯卡(Pascal)，简称为帕(Pa)。工程上常用兆帕(MPa)和吉帕(GPa)表示应力的大小。

§2-2 一点应力状态的应力分量转换方程

一、一点的应力状态和应力张量

为了表示和研究受力物体内任一点 P 处的应力状态，我们建立 $Oxyz$ 坐标系，在 P 点处参照 x、y、z 轴截取一微小的正交平行六面体，其六个截面的外法线方向分别平行于 x、y、z 轴，由于该六面体各棱边长分别取为无限小量 dx、dy、dz，因此该六面体单元(也称单元体)就反映和代表了 P 点。只要 dx、dy、dz 尺寸取得足够小，就可近似地认为单元体各截面上的应力是均匀分布的，且相互平行的两截面上的应力近似相同。于是各截面上的应力便可用在各截面中心的一个全应力矢量来表示。而每个面上的全应力矢量又可参照 x、y、z 轴方向分解为一个正应力分量和两个剪应力分量，如图 2-2 所示。例如 P 点单元体的与 y 轴垂直的右端平面上有应力分量 σ_y、τ_{yx}、τ_{yz}。

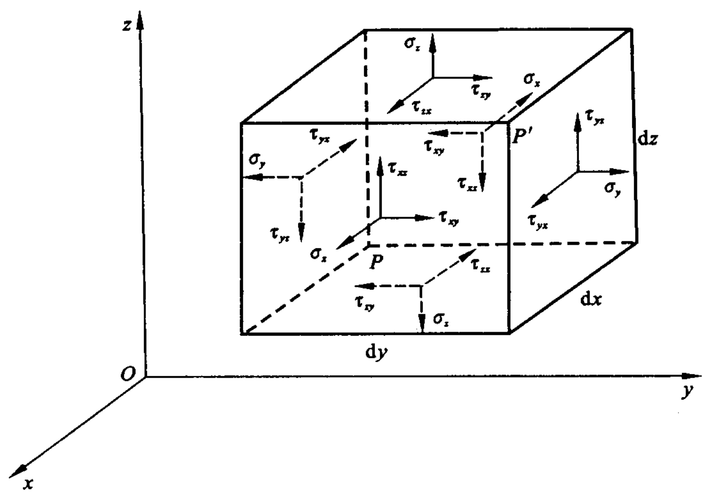


图 2-2

为了以后研究方便，对应力分量的正负号特做如下规定：单元体截面外法线的指向与坐标

轴正方向一致的截面称为正截面，与坐标轴负向一致的截面称为负截面。正截面上应力分量指向同坐标轴正方向一致者为正，反之为负；负截面上应力分量指向同坐标轴负方向一致者为正，反之为负。按此规定，图 2-2 中单元体所有各截面上所标明的应力分量都为正。

由图 2-2 可知，表明 P 点的应力状态只需一组应力分量，即三个正应力 σ_x、σ_y、σ_z 和六个剪应力 σ_{xy}、σ_{yx}、τ_{yz}、τ_{zy}、τ_{zx}、τ_{xz}（根据剪应力互等定理知：$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$），于是表示一点应力状态只需六个独立的应力分量。但若再参照另一坐标系 $Ox'y'z'$ 围绕 P 点截取另一方位不同的微小六面体单元表示该点，则该点的应力状态也可用另一组六个独立应力分量来表示，即 $\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$、$\sigma_{z'}$、$\tau_{x'y'}=\tau_{y'x'}$、$\tau_{y'z'}=\tau_{z'y'}$、$\tau_{z'x'}=\tau_{x'z'}$。因此，我们认识到，物体内任一点的应力状态，可用一组九个应力分量来表示，在给定受力情况下，各应力分量的大小与坐标轴方位的选择有关，但它们作为一组应力分量这样一个整体，用来表示一点的应力状态这一物理量，则与坐标的选择无关。**数学上，在坐标变换时，服从一定坐标变换式的九个数所定义的量，叫做二阶张量。根据这一定义，物体内一点处的应力状态可用二阶张量的形式来表示，并称为应力张量，而各应力分量即为应力张量的元素，且由剪应力等定理知，应力张量应是一个对称的二阶张量。应力张量通常表示为 σ_{ij} 或 $\sigma_{i'j'}$，即**

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \quad 或 \quad \sigma_{i'j'}=\begin{bmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'}\end{bmatrix} \tag{2-3}$$

式(2-3)中有 i、$j=x, y, z$ 和 i'、$j'=x', y', z'$。显然，当应力张量 σ_{ij} 和 $\sigma_{i'j'}$ 表征的是同一点的同一应力状态时，σ_{ij} 和 $\sigma_{i'j'}$ 之间就必然有一种客观存在的联系。一旦这一关系确定了，我们就能利用这一关系由已知的一组应力分量 σ_{ij} 去求出另一组应力分量 $\sigma_{i'j'}$。因此，我们可以毫不夸张地说，当已知一点应力状态的六个独立的应力分量时，该点的应力状态就完全被确定了。

二、应力分量转换方程

1. 任意斜截面上的应力

设 O 为受力物体内任意一点，且已知该点的一组六个独立应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。为了求过 O 点外法线为 n 的任一斜截面上的应力，我们在 O 点处截取一个微小的四面体单元，如图 2-3 所示。其中 OAB、OBC、OCA 三截面的外法线分别与 z、x、y 轴相平行。而 ABC 斜截面是与外法线为 n 的斜截面相平行，且是与 O 点间距无限小的平面，则当 ABC 面趋近于 O 点时，ABC 面上的应力就近似等于过 O 点外法线为 n 的斜截面上的应力，也就是说，该斜截面上的应力可用已知应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 来表示。

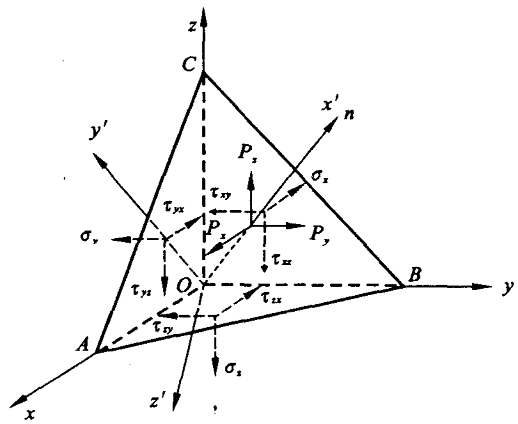


图 2-3

假定不计体力，且斜截面外法线 n 的方向余弦分别为

$$\cos(\widehat{n,x})=l_1;\cos(\widehat{n,y})=l_2;\cos(\widehat{n,z})=l_3 \tag{a}$$

若令斜截面 ABC 的面积为单位 1，则三角形截面 OBC、OAC、OAB 的面积分别为

$$1\times\cos(\widehat{n,x})=l_1;\quad 1\times\cos(\widehat{n,y})=l_2;\quad 1\times\cos(\widehat{n,z})=l_3 \tag{b}$$

如 ABC 面上的面合力为 P，其沿坐标轴方向的分量分别用 P_x、P_y、P_z 表示。于是由微小四面体单元的平衡条件 $\sum F_x=0,\sum F_y=0,\sum F_z=0$，得

$$\left.\begin{aligned}P_x&=\sigma_x l_1+\tau_{xy}l_2+\tau_{xz}l_3\\P_y&=\tau_{yx}l_1+\sigma_y l_2+\tau_{yz}l_3\\P_z&=\tau_{zx}l_1+\tau_{zy}l_2+\sigma_z l_3\end{aligned}\right\}\tag{2-4}$$

上式如按下标记号法和求和约定（详见附录Ⅰ）可缩记为

$$P_i=\sigma_{ij}n_j\quad(i,j=x,y,z)\tag{2-5}$$

式中 n_j 为斜截面 ABC 的外法线 n 与 j 轴间夹角的方向余弦 $\cos(\widehat{n,j})$，则有 $n_x=l_1,n_y=l_2,n_z=l_3$。

从式(2-5)可见，张量符号与下标记号法和求和约定，使冗长的弹塑性力学公式变得简明醒目。这种表示方法在科技文献中已被广泛采用，因此，我们应当熟悉这种标记法。

根据式(2-4)可分别求得微斜截面 ABC 上的正应力 σ_n 和剪应力 τ_n

$$\sigma_n=\sigma_{x'}=P_x l_1+P_y l_2+P_z l_3\tag{2-6}$$

$$\tau_n=(P_x^2+P_y^2+P_z^2-\sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}=(P^2-\sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}\tag{2-7}$$

而式(2-7)中的 P 为全应力，即

$$P^2=P_x^2+P_y^2+P_z^2\tag{2-8}$$

2. 应力分量转换方程

以上讨论的是已知 σ_{ij} 的六个独立应力分量，如何确定过该点外法线为 n 的任意斜截面上的正应力 σ_n 和剪应力 τ_n。如果我们参照另一坐标系 $Ox'y'z'$ 过该点截出一单元体，则得应力张量 $\sigma_{i'j'}$。现在的问题是已知 σ_{ij} 如何求出 $\sigma_{i'j'}$。为此，我们另设立一个新的坐标系 $Ox'y'z'$，如图 2-3 所示。其中 x' 轴与外法线 n 相平行，y'、z' 轴与 n 相垂直，并用表 2-1 所示符号表示三个新坐标轴对于原坐标的方向余弦。

表 2-1

坐标轴	x	y	z
x'	$l_{11}=\cos(\widehat{x',x})$	$l_{12}=\cos(\widehat{x',y})$	$l_{13}=\cos(\widehat{x',z})$
y'	$l_{21}=\cos(\widehat{y',x})$	$l_{22}=\cos(\widehat{y',y})$	$l_{23}=\cos(\widehat{y',z})$
z'	$l_{31}=\cos(\widehat{z',x})$	$l_{32}=\cos(\widehat{z',y})$	$l_{33}=\cos(\widehat{z',z})$

把式(2-4)或式(2-5)中的 $P_i(i=x,y,z)$ 再分别沿 $x'y'z'$ 轴分解，并根据该四面体单元的平衡条件 $\sum F_x=0,\sum F_y=0,\sum F_z=0$ 和剪应力互等定理，得斜截面 ABC 上的正应力 $\sigma_{x'}$、剪应力 $\tau_{x'y'}$ 和 $\tau_{x'z'}$ 分别为

$$\begin{aligned}\sigma_{x'}&=P_x l_{11}+P_y l_{12}+P_z l_{13}\\&=\sigma_x l_{11}l_{11}+\tau_{xy}l_{11}l_{12}+\tau_{xz}l_{11}l_{13}+\tau_{yx}l_{12}l_{11}+\sigma_y l_{12}l_{12}+\tau_{yz}l_{12}l_{13}+\tau_{zx}l_{13}l_{11}\\&\quad+\tau_{zy}l_{13}l_{12}+\sigma_z l_{13}l_{13}\\&=\sigma_x l_{11}^2+\sigma_y l_{12}^2+\sigma_z l_{13}^2+2\tau_{xy}l_{11}l_{12}+2\tau_{yz}l_{12}l_{13}+2\tau_{zx}l_{13}l_{11}\end{aligned}\tag{c}$$

$$\tau_{x'y'}=P_x l_{21}+P_y l_{22}+P_z l_{23}$$