

示范性职业技术学院建设项目系列教材

# 高职数学导学 及习题详解

初等数学部分

## 数学

总主编 冯素芬 赵光耀  
本册主编 冯素芬

煤炭工业出版社

PDG

北京工业职业技术学院

## 教材编审委员会名单

主 任 陈建民

副主编 吕一中

委 员 胡喜平 胡定军 任凤国 冯海明

沈 杰 王 强 王怀群 苗耀华

贾书申

# 出 版 说 明

我院 1994 年被原国家教委确定为全国十所试办五年制高等职业教育学校之一, 1999 年开始试办三年制高等职业教育, 2000 年被教育部确定为全国首批示范性职业技术学院建设单位。

高职教育是培养生产、建设、管理、服务第一线技术应用性人才的教育, 教材建设更要重视针对性和实用性, 要能够及时反映生产现场的技术发展要求。为此, 我院把高职教材建设作为示范性职业技术学院建设重点建设项目之一。根据教育部有关高职高专教材建设精神, 结合我院《示范性职业技术学院建设方案》和《示范性职业技术学院建设管理办法》, 在总结我院近 10 年来出版自编高职教材的基础上, 组织学术水平高、实践能力强、熟悉生产实际、教学经验丰富的教师, 通过推荐、遴选, 针对我院重点建设专业和主要建设专业的专业课程, 编写了本套示范性职业技术学院建设项目系列教材。

本系列教材注意吸收新的教学改革成果, 吸收生产现场的新工艺、新技术; 在尽可能保证学科体系的前提下, 突出实用性和岗位针对性, 力求充分体现高职特色。

由于我们的水平有限, 本系列教材在编审和出版中可能存在许多缺点和不足, 希望使用教材的教师和广大读者提出宝贵意见, 使我们不断提高教材的编写、出版质量, 共同为高职教材建设做出贡献。

北京工业职业技术学院教材编审委员会  
2002 年 5 月

# 前 言

为了适应我国高等职业教育的迅猛发展,满足高职在校学生的学习以及参加自学考试、成人高考和专升本考试的需要,我们以自考、成考和专升本考试大纲为指导,将全体数学教师多年的教学实践中的体会进行了全面的归纳和总结,编写了这套《高职数学导学及习题详解》,以便于学生自主学习,启发思维,掌握认知规律,形成数学能力。

本套教材紧扣高职培养目标,结合学生学习实际,以教会知识、形成能力为目的;重视基础,细而不繁,做到实处;重点面向全体,难点要求适中,因材施教重实际。本套教材分为三个分册,即《初等数学分册》《高等数学分册》和《工程数学分册》;内容分为教学要求、知识梳理、练习题和习题详解四个板块。本教材对于初中五年制和高中三年制、二年制的在校生均可使用。

《高职数学导学及习题详解》初等数学分册内容包括:集合·逻辑关系、函数、幂函数·指数函数·对数函数、任意角的三角函数、加法定理及其推论、反三角函数和简单三角方程、平面向量、复数、空间图形、直线册、二次曲线、极坐标与参数方程等。

《高职数学导学习题详解》高等数学分册内容包括:函数、极限、连续、导数与微分、中值定理、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、多元函数微分学、无穷级数等。

《高职数学导学习题详解》工程数学分册内容为线性代数和概率论与数理统计两部分。线性代数包括:行列式、矩阵、线性方程、相似矩阵与二次型;概率论与数理统计包括:概率论的基本概念、随机变量及其分布、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、常用的几种统计方法等。

本套教材由冯素芬、赵光耀任总主编;总策划冯素芬,并负责组织实施,赵光耀主审。初等数学分册由冯素芬任主编,孙静、彭淑梅任副主编,参加编写的人员:李世芳(第一章、第二章、第三章),孙静(第四章、第五章、第六章、第七章),彭淑梅(第八章、第九章),冯素芬(第十章、第十一章、第十二章),刘红梅(第十三章、第十四章);高等数学分册由赵光耀任主编,魏树国、郭振海任副主编,参加编写的人员有:赵光耀(第一章、第二章、第三章),魏树国(第四章、第五章、第六章),郭振海(第七章、第八章);工程数学分册由塔怀锁任主编,吴翠兰、叶承汾任副主编,参加编写的人员有:吴翠兰(第一章、第二章、第三章),塔怀锁(第五章、第六章、第七章),叶承汾(第八章、第九章),林硕蕾(第四章、第十章)。

在本套教材的编写过程中,得到了全国五年制高职教育公共课开发指导委员会吕一中主任的热情指导,得到了北京工业职业技术学院领导和基础部主任苗耀华、教学质量监控中心主任任凤国等部门领导及专家的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

由于水平有限,错误和不当之处在所难免,恳请读者批评指正!

编 者  
2005年12月

## 目 录

|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| <b>第一章 集合·逻辑关系</b> .....       | (1)   |
| 教学要求 .....                     | (1)   |
| 知识梳理 .....                     | (1)   |
| 练习题 .....                      | (4)   |
| 习题详解 .....                     | (7)   |
| <b>第二章 函数</b> .....            | (16)  |
| 教学要求 .....                     | (16)  |
| 知识梳理 .....                     | (16)  |
| 练习题 .....                      | (18)  |
| 习题详解 .....                     | (21)  |
| <b>第三章 幂函数·指数函数·对数函数</b> ..... | (32)  |
| 教学要求 .....                     | (32)  |
| 知识梳理 .....                     | (32)  |
| 练习题 .....                      | (34)  |
| 习题详解 .....                     | (37)  |
| <b>第四章 任意角的三角函数</b> .....      | (48)  |
| 教学要求 .....                     | (48)  |
| 知识梳理 .....                     | (48)  |
| 练习题 .....                      | (52)  |
| 习题详解 .....                     | (56)  |
| <b>第五章 加法定理及其推论</b> .....      | (68)  |
| 教学要求 .....                     | (68)  |
| 知识梳理 .....                     | (68)  |
| 练习题 .....                      | (70)  |
| 习题详解 .....                     | (73)  |
| <b>第六章 反三角函数和简单三角方程</b> .....  | (86)  |
| 教学要求 .....                     | (86)  |
| 知识梳理 .....                     | (86)  |
| 练习题 .....                      | (88)  |
| 习题详解 .....                     | (92)  |
| <b>第七章 平面向量</b> .....          | (104) |
| 教学要求.....                      | (104) |
| 知识梳理.....                      | (104) |

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 练习题·····                      | (106) |
| 习题详解·····                     | (108) |
| <b>第八章 复数</b> ·····           | (114) |
| 教学要求·····                     | (114) |
| 知识梳理·····                     | (114) |
| 练习题·····                      | (116) |
| 习题详解·····                     | (118) |
| <b>第九章 空间图形</b> ·····         | (127) |
| 教学要求·····                     | (127) |
| 知识梳理·····                     | (127) |
| 练习题·····                      | (131) |
| 习题详解·····                     | (138) |
| <b>第十章 直线</b> ·····           | (159) |
| 教学要求·····                     | (159) |
| 知识梳理·····                     | (159) |
| 练习题·····                      | (162) |
| 习题详解·····                     | (166) |
| <b>第十一章 二次曲线</b> ·····        | (181) |
| 教学要求·····                     | (181) |
| 知识梳理·····                     | (181) |
| 练习题·····                      | (187) |
| 习题详解·····                     | (190) |
| <b>第十二章 极坐标与参数方程</b> ·····    | (204) |
| 教学要求·····                     | (204) |
| 知识梳理·····                     | (204) |
| 练习题·····                      | (208) |
| 习题详解·····                     | (210) |
| <b>第十三章 排列、组合、二项式定理</b> ····· | (221) |
| 教学要求·····                     | (221) |
| 知识梳理·····                     | (221) |
| 练习题·····                      | (223) |
| 习题详解·····                     | (227) |
| <b>第十四章 数列</b> ·····          | (238) |
| 教学要求·····                     | (238) |
| 知识梳理·····                     | (239) |
| 练习题·····                      | (242) |
| 习题详解·····                     | (247) |
| <b>参考文献</b> ·····             | (265) |

# 第一章 集合·逻辑关系



## 教学要求

### 一、集合

- (1) 理解集合的概念.
- (2) 理解元素与集合间的“属于”关系.
- (3) 理解有限集、无限集、空集的概念.
- (4) 理解子集、全集、补集的概念.
- (5) 能运用子集、全集、补集的概念解决问题.
- (6) 掌握交集、并集的概念,并能运用这两个概念解决问题.
- (7) 掌握交集和并集的基本性质,并能运用这些性质解决问题.

### 二、绝对值不等式与一元二次不等式

- (1) 掌握绝对值的概念、性质及其应用.
- (2) 掌握绝对值不等式的概念、性质及其应用.
- (3) 掌握一元二次不等式的解法.
- (4) 了解含有参数的一元二次不等式的解法.

### 三、逻辑关系

- (1) 掌握命题的概念和逻辑联结词.
- (2) 掌握简单命题、复合命题的概念并能判定和应用.
- (3) 掌握四种命题的概念和四种命题间的关系.
- (4) 理解并掌握充分条件、必要条件和充分且必要条件的概念.
- (5) 掌握充分条件、必要条件和充分且必要条件的应用.



## 知识梳理

### 一、集合

#### 1. 集合的基本概念

- (1) 集合:集合是具有某种特定属性的对象的全体.
- (2) 元素:集合里的各个对象叫做集合的元素.
- (3) 元素与集合的关系:

$a \in A$ :表示  $a$  是集合  $A$  的元素,读作“ $a$  属于  $A$ ”.

$a \notin A$ :表示  $a$  不是集合  $A$  的元素,读作“ $a$  不属于  $A$ ”.

不含有任何元素的集合叫做空集,记作“ $\emptyset$ ”.

(4) 集合中的元素具有特性:确定性、互异性、无序性.

2. 常见的几种数集

$N = \{\text{全体自然数}\}$  (注意  $0 \in N$ ).

$Z = \{\text{全体整数}\}$ .

$N^+ = \{\text{全体正整数}\}$ .

$Q = \{\text{全体有理数}\}$ .

$R = \{\text{全体实数}\}$ .

3. 区间的概念

(1) 有限区间:设实数  $a$  和  $b$ , 且  $a < b$ , 则

$\{x | a < x < b\}$  称为开区间, 记作  $(a, b)$ ;  $\{x | a \leq x \leq b\}$  称为闭区间, 记作  $[a, b]$ ;

$\{x | a \leq x < b\}$  称为半开区间, 记作  $[a, b)$ ;  $\{x | a < x \leq b\}$  称为半开区间, 记作  $(a, b]$ .

(2) 无限区间:

$\{x | x \geq a\}$  记作  $[a, +\infty)$ ,  $\{x | x > a\}$  记作  $(a, +\infty)$ ;

$\{x | x \leq b\}$  记作  $(-\infty, b]$ ,  $\{x | x < b\}$  记作  $(-\infty, b)$ ,  $R$  记作  $(-\infty, +\infty)$ .

4. 集合的表示方法

列举法、描述法、图示法.

5. 集合与集合的关系

(1) 集合相等:如果  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则称集合  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

(2) 交集:  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ .

(3) 并集:  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ .

## 二、绝对值不等式与一元二次不等式

1. 绝对值的概念和性质

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

性质:

(1)  $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$ ;

(2)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ;

(3)  $|x| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a$ ;

(4)  $|x| > a (a > 0) \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a$ .

2. 含有绝对值不等式的基本类型

(1)  $|f(x)| < |g(x)|$ ;

(2)  $|f(x)| < g(x)$ ;

(3)  $|f(x)| > g(x)$ ;

(4)  $|f(x)| \pm |g(x)| < h(x)$ .

3. 含有绝对值不等式的解法

含有绝对值不等式的解法关键是去绝对值符号. 去绝对值符号一般有三种方法:平方  
法、性质法、讨论法. 难点是正确的逻辑推理, 利用解集的去与并得到原不等式的解集.



4. 一元二次不等式  $ax^2 + bx + c \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} (a > 0)$  的解集

(1) 当  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  时,

$ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $\left\{ x \mid x > \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ 或 } x < \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$ ;

$ax^2 + bx + c < 0$  的解集是  $\left\{ x \mid \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < x < \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$ .

(2) 当  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  时,

$ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $\left\{ x \mid x \neq \frac{-b}{2a} \right\}$ ;

$ax^2 + bx + c < 0$  的解集是  $\emptyset$ .

(3) 当  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  时,

$ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $\mathbf{R}$ ,  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集是  $\emptyset$ .

5. 化分式不等式

可化为一元二次不等式的分式不等式, 即

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \Leftrightarrow (ax+b)(cx+d) > 0$$

6. 恒成立的条件

(1)  $ax^2 + bx + c > 0$  恒成立的条件:

$$\begin{cases} a > 0, \\ b^2 - 4ac < 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c > 0. \end{cases}$$

(2)  $ax^2 + bx + c < 0$  恒成立的条件:

$$\begin{cases} a < 0, \\ b^2 - 4ac < 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c < 0. \end{cases}$$

7. 化二次项系数为正数

对一元二次不等式, 均可将二次项系数化为正数后, 形成:  $ax^2 + bx + c > 0$  或  $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$  的类型.

### 三、逻辑关系

#### 1. 命题

可以判断真假的语句叫做命题.

(1) 真、假命题: 正确的命题称为真命题; 不正确的命题称为假命题.

(2) 逻辑联结词: 且( $\wedge$ )、或( $\vee$ )、非( $\neg$ ).

(3) 简单命题与复合命题: 不含逻辑联结词的命题, 称为简单命题. 由简单命题和逻辑联结词构成的命题, 称为复合命题.

(4) 常见的三种复合命题: 用大写的拉丁字母  $P, Q, R, S, \dots$  来表示命题, 常见的三种复合命题是:

$P$  且  $Q$  (记作  $P \wedge Q$ );  $P$  或  $Q$  (记作  $P \vee Q$ ); 非  $P$  (记作  $\neg P$ ).

(5) 复合命题判断真假, 其真假判断如图 1-1 所示.

| $P$ | $P$ | $Q \wedge Q$ | $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P$ | $\neg P$ |
|-----|-----|--------------|-----|-----|------------|-----|----------|
| 1   | 1   | 1            | 1   | 1   | 1          | 1   | 0        |
| 1   | 0   | 0            | 1   | 0   | 1          | 0   | 1        |
| 0   | 1   | 0            | 0   | 1   | 1          | 1   | 0        |
| 0   | 0   | 0            | 0   | 0   | 0          | 0   | 1        |

图 1-1

(6) 命题的否定:

①  $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ ; ②  $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ ; ③  $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ .

(7) 四种命题:

① 原命题:“若  $P$  则  $Q$ ”(即  $P \Rightarrow Q$ ); ② 逆命题:“若  $Q$  则  $P$ ”(即  $Q \Rightarrow P$ );

③ 否命题:“若非  $P$  则非  $Q$ ”(即  $\neg P \Rightarrow \neg Q$ ); ④ 逆否命题:“若非  $Q$  则非  $P$ ”(即  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ).

注意:  $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$ ;  $Q \Rightarrow P \Leftrightarrow \neg P \Rightarrow \neg Q$ . 即原命题与逆否命题是等价命题.

2. 充要条件

(1) 如果  $P$  成立,那么  $Q$  成立,即  $P \Rightarrow Q$ ,则称  $P$  是  $Q$  的充分条件, $Q$  是  $P$  的必要条件.

(2) 如果  $P$  是  $Q$  的充分条件,又是  $Q$  的必要条件,即  $P \Leftrightarrow Q$ ,则称  $P$  是  $Q$  成立的充分且必要条件.

(3) 如果  $P \not\Rightarrow Q$  且  $Q \not\Rightarrow P$ ,则称  $P$  既不是  $Q$  的充分条件,也不是  $Q$  的必要条件.



## 练习题

### 一、判断题

- 空集是任何集合的子集. ( )
- 绝对值很小的数的全体是一个集合. ( )
- $1 \in \{1, 2\}$  且是方程  $x^2 + 2x - 3 = 0$  的一个根. ( )
- 不等式  $|x - 1| < 1$  的解集是  $\{x | 0 < x < 2\}$ . ( )
- 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $A = \emptyset$  或  $B = \emptyset$ . ( )
- “ $a > b$ ”是“ $a + c > b + c$ ”的充分非必要条件. ( )
- “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的必要不充分条件. ( )
- 原命题与其否命题同真同假. ( )
- 命题“ $x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$ ”的真值是 0. ( )
- 设  $A = \{x | x^2 > 4\}$ ,  $B = \{x | x < 3\}$ , 则  $A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$ . ( )

### 二、填空题

- 不等式  $x^2 + 3x - 10 \leq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 已知全集  $\Omega = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | |x| \leq 5\}$ ,  $B = \{x | -6 \leq x < 0\}$ , 那么,  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

$$A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}, \bar{A} = \underline{\hspace{2cm}}, \bar{A} \cup \bar{B} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 集合  $\{1, 2, 3\}$  的真子集个数是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4. “ $x^2 - 4 = 0$ ”是“ $x + 2 = 0$ ”的  $\underline{\hspace{2cm}}$  条件.

5. 已知集合  $A = \{1, a\}$ , 集合  $B = \{2, a^2\}$  且  $A \cap B = \{1\}$ , 则实数  $a$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

6. “ $a, b$  同为偶数”是“ $a + b$  是偶数”的  $\underline{\hspace{2cm}}$  条件.

7. 不等式  $|x - 2| > -2$  的解集是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

8.  $a^2 + b^2 + c^2 = 0 (a, b, c \in \mathbf{R})$  的充要条件是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 已知命题  $P$ : “ $a, b$  都是零”, 写出命题  $\neg P$ :  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 方程  $(x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$  的解集是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 判断命题真假: “ $1 \leq 2$ ”是  $\underline{\hspace{2cm}}$  命题.

12. 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  无实数根的充要条件是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 不等式  $\frac{x+1}{2x-3} \leq 0$  的解集是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 若集合  $A = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}$  则  $A \cap B =$

15. 不等式  $|2x - 3| \leq 1$  的整数解集是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 如果不论  $x$  取何值, 二次三项式  $x^2 - 2x + m$  的值恒大于零, 则  $m$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

17. 已知集合  $A$  有 10 个元素, 集合  $B$  有 8 个元素, 集合  $A \cap B$  有 4 个元素, 则集合  $A \cup B$  有  $\underline{\hspace{2cm}}$  个元素.

18. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图像在  $x$  轴上方的充要条件是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

19. 已知集合  $A = \{y | y = x^2 - 2x - 1\}$ ,  $B = \{y | y = -x^2 + 2x + 5\}$ , 则  $A \cap B$  等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

20. 若集合  $A = \{x | -2 < x < 4\}$ ,  $B = \{x | x - a < 0\}$ , 若  $A \subset B$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、单项选择题

1. 若  $A = \{x | x = 0\}$ , 则下列各式中正确的是( ).

- A.  $A = 0$                       B.  $A = \emptyset$                       C.  $\{0\} \subseteq A$                       D.  $\emptyset \in A$

2. 方程  $(x - 2)(x^2 + x - 2) = 0$  的解集是( ).

- A.  $\{-2, -1, 2\}$                       B.  $\{-2, 1, 2\}$                       C.  $\{-2, 1\}$                       D.  $\{-1, 2\}$

3. 设集合  $M = \{x | |x| < 2\}$ ,  $P = \{x | |x - 2| < 1\}$ , 则  $M \cap P =$  ( ).

- A.  $|x| - 2 < x < 10\}$                       B.  $\{x | 1 < x < 2\}$   
C.  $\{x | -1 < x < 3\}$                       D.  $\{x | 1 < x < 3\}$

4. 以下说法正确的是( ).

- A. 任何集合都可用列举法表示                      B. 任何一个命题不真便假  
C. 原命题与否命题同真同假                      D.  $|x| > 2$  是  $x > 2$  的充分条件

5. 以下命题为真命题的是( ).

- A. 等腰三角形的面积都相等                      B. 集合  $\{1, 2\}$  的真子集只有两个  
C. 如果  $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$ , 那么  $a + b > 0$                       D.  $3 \geq 3$

6. 下列各命题中,正确的是( ).

A. “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件

B. “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的必要条件

C. “ $a > b$ ”是“ $ac > bc$ ”的充分条件

D. “ $a > b$ ”是“ $a + c > b + c$ ”的充要条件

7. 若集合  $A = \{y | y = x^2 - 2x + 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y | y = x^2 + 2x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则下列各式中正确的是( ).

A.  $A \subset B$

B.  $B \subset A$

C.  $A = B$

D.  $A \cap B = B$

8. 以下命题为真命题的是( ).

A. “ $x = 0$ ”是“ $x^2 - x = 0$ ”的必要条件

B.  $\sqrt{4} = \pm 2$

C. 若  $a \cdot b = 0$ , 则  $a = 0$

D. 若  $A \cup B = A$ , 则  $B \subseteq A$

9. 命题  $P$ : “ $3 > 2$ ”, 命题  $Q$ : “ $3 = 2$ ”, 则( ).

A.  $P \wedge Q$  是真命题

B.  $P \vee Q$  是真命题

C.  $\neg P \wedge Q$  是真命题

D.  $\neg P \wedge \neg Q$  是真命题

10. “ $x^2 = y^2$ ”是“ $x = y$ ”的( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

11. 以下命题为假命题的是( ).

A. 对于任意实数对  $(x, y)$ , 都有  $y = x^2 + 1$

B. 存在实数  $x$ , 使  $x^2 - x - 2 = 0$

C. 对于任意实数  $x$ , 都有  $x^2 - 2x + 2 > 0$

D. 存在实数  $x$ , 使  $x + 2 = 0$

12. 下列各式中正确的是( ).

A.  $a \subset \{a, b\}$

B.  $\{a, c\} \cap \{b, d\} = \{0\}$

C.  $\{a, b\} \cap \{a, c\} = a$

D.  $\{b, a\} \subseteq \{a, b\}$

13. 设  $A = \{x | -2 < x < 4\}$ ,  $B = \{x | x \geq a\}$ , 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $a$  的取值范围是( ).

A.  $a \geq -2$

B.  $a > -2$

C.  $a > 4$

D.  $a \geq 4$

14. 设  $A = \{x | x \leq \sqrt{33}\}$ ,  $a = 4\sqrt{2}$ , 则下列关系中正确的是( ).

A.  $a \subset A$

B.  $a \in A$

C.  $a \notin A$

D.  $\{a\} \in A$

15. 以下命题为真命题的是( ).

A.  $5 > 4$  且  $-3 < 0$

B.  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $B = \emptyset$

C. 方程  $(x-1)^2 + |y+1| = 0$  的解是  $x = 1$  或  $y = -1$

D. 存在实数  $x$ , 使  $x^2 + 1 = 0$

16. 不等式  $|3 - x| < 2$  的解集是( ).

A.  $\{x | x > 5 \text{ 或 } x < 1\}$

B.  $\{x | 1 < x < 5\}$

C.  $\{x | -5 < x < -1\}$

D.  $\{x | x > 1\}$

17. 不等式  $x^2 - 3ax + 2a^2 < 0 (a < 0)$  的解集是( ).

A.  $\{x | a < x < 2a\}$

B.  $\{x | 2a < x < a\}$

C.  $\{x | x < a \text{ 或 } x > 2a\}$

D.  $\{x | x < 2a \text{ 或 } x > a\}$

18. 设全集  $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$ , 集合  $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$ ,  $N = \{(x, y) | y = x$

$+1, x, y \in \mathbf{R}$ }, 则  $\overline{M} \cap N$  是( ).

- A.  $\emptyset$                       B.  $\{(2, 3)\}$                       C.  $(2, 3)$                       D.  $N$

19. 设集合  $A = \{x | 1 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | x < a\}$ ,  $A \subset B$ , 则  $a$  的取值范围是( ).

- A.  $\{a | a \geq 2\}$                       B.  $\{a | a \leq 1\}$                       C.  $\{a | a \geq 1\}$                       D.  $\{a | a \leq 2\}$

20. 已知  $a < b < 0$ , 则下列关系中不能成立的是( ).

- A.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$                       B.  $|a| > |b|$                       C.  $a^2 > b^2$                       D.  $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$

#### 四、解答题

1. 解下列不等式:

(1)  $|3x + 2| < 4$ ;                      (2)  $\left| \frac{1}{2}x - 3 \right| \geq 2$ .

2. 不等式  $ax^2 + abx + b > 0$  的解集是  $A = \{x | 2 < x < 3\}$ , 试求实数  $a, b$  的值.

3. 设集合  $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$ ,  $B = \{a - 5, 1 - a, 9\}$ , 已知  $A \cap B = \{9\}$ , 求  $a$  的值.

4. 若已知  $\{1, 2\} \subseteq A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , 求集合  $A$ .

5. 设集合  $A = \{x | x^2 - 2x - 15 < 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 4x - 21 > 0\}$ , 求:

- (1)  $A \cap B$ ;                      (2)  $A \cup B$ .

6. 分别指出由下列命题构成的“ $P$  或  $Q$ ”, “ $P$  且  $Q$ ” “非  $P$ ” 形式复合命题的真假.

(1)  $P: x^2 \geq 0$ ;  $Q: 2 > 7$ .

(2)  $P: 4$  是 127 的约数;  $Q: 1$  是  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的解.

(3)  $P: x^2 - x + 1 \geq 0$ ;  $Q: |x| - a < 0 (a > 0)$  的解集为:  $\{x | -a < x < a\}$ .

(4)  $P$ : 梯形的两组对边分别平行;  $Q$ : 梯形的两组对边分别相等.

7. 求证: 关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有一根为 1 的充要条件是  $a + b + c = 0$ .

8. 设集合  $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$ ,  $B = \{2y, -4, x + 4\}$ ,  $C = \{-1, 7\}$ , 且  $A \cap B = C$ , 求  $x, y$  的值.

9. 设集合  $A = \{x | \sqrt{x-1} \leq 3-x\}$ ,  $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a < 0\}$ .

(1) 若  $A \supset B$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $A \cap B = \emptyset$ , 求实数  $a$  的取值范围.

10. 若  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 且  $a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}$ ,  $b = y^2 - 2z + \frac{\pi}{3}$ ,  $c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$ , 求证:  $a, b, c$  中至少有一个大于 0.



### 习题详解

#### 一、判断题

1. 空集是任何集合的子集.

答案: 正确.

2. 绝对值很小的数的全体是一个集合.

答案: 错误.

解析: 绝对值很小的数是一个模糊的概念, 而不是一个确定的概念.

3.  $1 \in \{1, 2\}$  且是方程  $x^2 + 2x - 3 = 0$  的一个根.

答案:正确.

解析:方程  $x^2+2x-3=0$  的两个根是  $x_1=-3, x_2=1$ .

4. 不等式  $|x-1|<1$  的解集是  $|x|0<x<2$ .

答案:正确.

解析: $|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<2$ .

5. 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则  $A = \emptyset$  或  $B = \emptyset$ .

答案:错误.

解析:举反例说明,设  $A = \{0\}, B = \{1\}$ , 但  $A \cap B = \emptyset$ .

6. “ $a>b$ ”是“ $a+c>b+c$ ”的充分非必要条件.

答案:错误.

解析: $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$ , 故“ $a>b$ ”是“ $a+c>b+c$ ”的充分且必要条件.

7. “ $a>b$ ”是“ $a^2>b^2$ ”的必要非充分条件.

答案:错误.

解析:举反例说明,设  $a=-5, b=1$ . 则  $a^2>b^2$ , 但  $a<b$ .

8. 原命题与其否命题同真同假.

答案:错误.

解析:举反例说明,原命题:对顶角相等;否命题:不是对顶角的角不相等. 原命题真,而否命题假.

9. 命题“ $x \in \mathbf{R}, x^2+1<0$ ”的真值是0.

答案:正确.

解析:当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $x^2+1 \geq 1$ , 故命题“ $x \in \mathbf{R}$  时,  $x^2+1<0$ ”假.

10. 设  $A = \{x|x^2>4\}, B = \{x|x<3\}$ , 那末  $A \cap B = \{x|2<x<3\}$ .

答案:错误

解析: $A = \{x|x^2>4\} = \{x|x<-2 \text{ 或 } x>2\}$ , 而  $A \cap B = \{x|x<-2 \text{ 或 } 2<x<3\}$ .

## 二、填空题

1. 不等式  $x^2+3x-10 \leq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

答案: $\{x|-5 \leq x \leq 2\}$ .

解析: $\because \Delta > 0$ , 方程  $x^2+3x-10=0$  的根是  $x_1=-5, x_2=2$ .

$\therefore$  不等式的解集是  $|x|-5 \leq x \leq 2$ .

2. 已知全集  $\Omega = \mathbf{R}, A = \{x||x| \leq 5\}, B = \{x|-6 \leq x < 0\}$ , 那么,  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_,  $A \cup B =$ \_\_\_\_\_,  $\bar{A} =$ \_\_\_\_\_,  $\bar{A} \cup \bar{B} =$ \_\_\_\_\_.

答案: $\{x|-5 \leq x < 0\}, \{x|-6 \leq x \leq 5\}, \{x|x < -5 \text{ 或 } x > 5\}, \{x|x < -5 \text{ 或 } x \geq 0\}$ .

解析: $\because A = \{x|-5 \leq x \leq 5\}$ ,

$\therefore A \cap B = \{x|-5 \leq x < 0\}$

$A \cup B = \{x|-6 \leq x \leq 5\}$ .

$\therefore \bar{A} = \{x|x < -5 \text{ 或 } x > 5\}$ ,

$\bar{B} = \{x|x < -6 \text{ 或 } x \geq 0\}$ ,

$\therefore \bar{A} \cup \bar{B} = \{x|x < -5 \text{ 或 } x \geq 0\}$

3. 集合  $\{1, 2, 3\}$  的真子集个数是\_\_\_\_\_.

答案:7个.

解析:7个真子集为 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \emptyset$ .

4. “ $x^2-4=0$ ”是“ $x+2=0$ ”的\_\_\_\_\_条件.

答案:“ $x^2-4=0$ ”是“ $x+2=0$ ”的必要非充分条件.

解析: $x+2=0 \Rightarrow x^2-4=0$ , 但  $x^2-4=0$  推不出  $x+2=0$ .

5. 已知集合  $A = \{1, a\}$ , 集合  $B = \{2, a^2\}$  且  $A \cap B = \{1\}$ , 则实数  $a$  的值是\_\_\_\_\_.

答案: $a = -1$ .

解析: $A \cap B = \{1\}$ ,  $\therefore 1 \in B$ , 若  $a^2 = 1$ , 则  $a = \pm 1$ , 而  $a = 1$  时, 则

$A = \{1, 1\}$  与集合中元素的互异性矛盾,  $\therefore a = -1$ .

6. “ $a, b$  同为偶数”是“ $a+b$  是偶数”的\_\_\_\_\_条件.

答案:充分非必要条件.

7. 不等式  $|x-2| > -2$  的解集是\_\_\_\_\_.

答案:解集是  $\mathbf{R}$ .

解析: $\because$  当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $|x-2| \geq 0$ .

8.  $a^2 + b^2 + c^2 = 0 (a, b, c \in \mathbf{R})$  的充要条件是\_\_\_\_\_.

答案:充要条件是  $a = b = c = 0$ .

解析: $\because a^2 + b^2 + c^2 = 0 (a, b, c \in \mathbf{R}) \Rightarrow a = b = c = 0$  且

$a = b = c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0 (a, b, c \in \mathbf{R})$ .

9. 已知命题  $P$ : “ $a, b$  都是零”, 写出命题  $\neg P$ :\_\_\_\_\_.

答案: $\neg P$ : “ $a, b$  不都是零”.

10. 方程  $(x+1)(x^2+x-2) = 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

答案: $\{-2, -1, 1\}$

解析: $\because (x+1)(x^2+x-2) = 0 \therefore x+1=0$  或  $x^2+x-2=0$ ,

$\therefore x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 1$ .

11. 判断命题真假: “ $1 \leq 2$ ”是\_\_\_\_\_命题.

答案:是真命题.

12. 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  无实数根的充要条件是\_\_\_\_\_.

答案:充要条件是  $b^2 - 4ac < 0$ .

13. 不等式  $\frac{x+1}{2x-3} \leq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

答案:  $\left\{ x \mid -1 \leq x < \frac{3}{2} \right\}$

解析:  $\frac{x+1}{2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases}$ , 两个不等式组的解集分别为  $\emptyset$  和

$\left\{ x \mid -1 \leq x < \frac{3}{2} \right\}$ . 所以, 不等式  $\frac{x+1}{2x-3} \leq 0$  的解集是  $\left\{ x \mid -1 \leq x < \frac{3}{2} \right\}$ .

14. 若集合  $A = \{y \mid y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) \mid y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}$  则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

答案:  $A \cap B = \emptyset$ .

解析: 因为两个集合里的元素类型不同, 集合  $A$  里的元素是抛物线  $y = x^2 - 1$  上的点的

纵坐标,而集合  $B$  里的元素是直线  $y = x - 1$  上的点的坐标.

15. 不等式  $|2x - 3| \leq 1$  的整数解集是\_\_\_\_\_.

答案:  $\{1, 2\}$

解析:  $\because |2x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ ,

$\therefore$  不等式  $|2x - 3| \leq 1$  的整数解集是  $\{1, 2\}$ .

16. 如果不论  $x$  取何值,二次三项式  $x^2 - 2x + m$  的值恒大于零,则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案:  $m > 1$ .

解析:  $\because \Delta = 4 - 4m < 0, \therefore m > 1$ .

17. 已知集合  $A$  有 10 个元素,集合  $B$  有 8 个元素,则集合  $A \cap B$  有 4 个元素,则集合  $A \cup B$  有\_\_\_\_\_个元素.

答案: 14 个.

解析: 只属于集合  $A$  的元素有 6 个,只属于集合  $B$  的元素有 4 个,同时属于  $A$  和  $B$  的元素有 4 个.

18. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图像在  $x$  轴上方的充要条件是\_\_\_\_\_.

答案:  $a > 0$  且  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

19. 已知集合  $A = \{y | y = x^2 - 2x - 1\}, B = \{y | y = -x^2 + 2x + 5\}$ , 则  $A \cap B$  等于\_\_\_\_\_.

答案:  $\{2\}$ .

解析: 方程组  $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 5 \end{cases}$  的解是  $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ .

20. 若集合  $A = \{x | -2 < x < 4\}, B = \{x | x - a < 0\}$ , 若  $A \subset B$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案:  $a \geq 4$ .

解析:  $\because B = \{x | x < a\}$  且  $A \subset B, \therefore a \geq 4$ .

### 三、单项选择题

1. 若  $A = \{x | x = 0\}$ , 则下列各式中正确的是( ).

- A.  $A = 0$       B.  $A = \emptyset$       C.  $\{0\} \subseteq A$       D.  $\emptyset \in A$ .

答案: C.

解析: 根据子集的定义.

2. 方程  $(x - 2)(x^2 + x - 2) = 0$  的解集是( ).

- A.  $\{-2, -1, 2\}$       B.  $\{-2, 1, 2\}$       C.  $\{-2, 1\}$       D.  $\{-1, 2\}$

答案: B.

解析:  $\because (x - 2)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$  或  $x^2 + x - 2 = 0$ ,

$\therefore x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$ .

3. 设集合  $M = \{x | |x| < 2\}, P = \{x | |x - 2| < 1\}$ , 则  $M \cap P = ( )$ .

- A.  $\{x | -2 < x < 10\}$       B.  $\{x | 1 < x < 2\}$   
C.  $\{x | -1 < x < 3\}$       D.  $\{x | 1 < x < 3\}$

答案: B



解析:  $\because M = \{x | -2 < x < 2\}$ ,

$$P = \{x | |x-2| < 1\} = \{x | -1 < x-2 < 1\} = \{x | 1 < x < 3\},$$

$$\therefore M \cap P = \{x | 1 < x < 2\}.$$

4. 以下说法正确的是( ).

A. 任何集合都可用列举法表示

B. 任何一个命题不真便假

C. 原命题与否命题同真同假

D.  $|x| > 2$  是  $x > 2$  的充分条件

答案:B.

5. 以下命题为真命题的是( ).

A. 等腰三角形的面积都相等

B. 集合  $\{1, 2\}$  的真子集只有两个

C. 如果  $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$ , 那么  $a+b > 0$

D.  $3 \geq 3$

答案:D.

6. 下列各命题中, 正确的是( ).

A. “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件

B. “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的必要条件

C. “ $a > b$ ”是“ $ac > bc$ ”的充分条件

D. “ $a > b$ ”是“ $a+c > b+c$ ”的充要条件

答案:D.

解析:  $a > b \Rightarrow a+c > b+c$  且  $a+c > b+c \Rightarrow a > b$ .

7. 若集合  $A = \{y | y = x^2 - 2x + 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y | y = x^2 + 2x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则下列各式中正确的是( ).

A.  $A \subset B$

B.  $B \subset A$

C.  $A = B$

D.  $A \cap B = B$

答案:A.

解析:  $\because A = \{y | y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$

$$B = \{y | y = x^2 + 2x, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y = (x+1)^2 - 1 \geq -1, x \in \mathbf{R}\}$$

$$\text{即 } A = \{y | y \geq 0\}, B = \{y | y \geq -1\}, \therefore A \subset B.$$

8. 以下命题为真命题的是( ).

A. “ $x=0$ ”是“ $x^2-x=0$ ”的必要条件

B.  $\sqrt{4} = \pm 2$

C. 若  $a, b=0$ , 则  $a=0$

D. 若  $A \cup B = A$ , 则  $B \subseteq A$

答案:D.

解析: 根据子集的定义.

9. 命题  $P$ : “ $3 > 2$ ”, 命题  $Q$ : “ $3 = 2$ ”, 则( ).

A.  $P \wedge Q$  是真命题

B.  $P \vee Q$  是真命题

C.  $\neg P \wedge Q$  是真命题

D.  $\neg P \wedge \neg Q$  是真命题

答案:B.

解析:  $P$  是真命题,  $Q$  是假命题, 所以  $P \vee Q$  是真命题.

10. “ $x^2 = y^2$ ”是“ $x = y$ ”的( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分且必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案:B.

解析:  $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ , 但  $x^2 = y^2$  推不出  $x = y$ .

11. 以下命题为假命题的是( ).