湖南省普通高校成人教育系列教材

概率论与数理统计

■湖南省教育科学研究院
■湖南省高教学会成教研究专业委员会 组编 审定

◎夏学文 主编
◎吴宗其 主审

GAILULUNYUSHULITONGJI

湖南人民出版社

湖南省普通高校成人教育系列教材

概率论与数理统计

■湖 南 省 教 育 科 学 研 究 院 组编 审定
■湖南省高教学会成教研究专业委员会

◎ 夏学文 主编
◎ 吴宗其 主审

GAILULUNYUSHULITONGJI

湖 南 人 民 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/夏学文主编. —长沙:湖南人民出版社,2005.12

ISBN 7-5438-4242-4

Ⅰ.概... Ⅱ.夏... Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 155297 号

责任编辑:李 茜

装帧设计:卜艳冰

概率论与数理统计

夏学文 主编

*

湖南人民出版社出版、发行

(长沙市营盘东路 3 号 邮编:410005)

湖南省新华书店经销 湖南汇龙印务有限公司印刷

2005 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:7.75

字数:164,000 印数:1-10,000

ISBN7-5438-4242-4

G·1011 定价:10.80 元

前　言

根据教育部加强教材建设和管理的文件精神，在省教育厅的直接领导和支持下，湖南省教育科学研究院和湖南省普通高等成教研究专业委员会共同组织编写了湖南省普通高校成人教育系列教材，并于2004年成立了湖南省普通高校成人教育教材编写指导委员会和湖南省普通高校成人教育教材编审委员会。在对我省普通高等学校成人教育所用教材进行充分调查的基础上，研究制定了组织编写出版成人教育系列教材的实施计划。经全省普通高校学校申请推荐、专家评审、教材编写指导委员会审定，实行主编负责制。2005年3月首期编写出版了《计算机应用基础教程》《英语基础语法》《学士学位英语考试指南》等4本教材，本期编写出版《大学语文》《管理学》《高等数学》《线性代数》《概率论与数理统计》等6本教材。

湖南省普通高等学校成人教育系列教材充分考虑了成人教育的多学科多层次和学员在职学习的特点，本着为成人教育服务的目的，在保证教材科学性的前提下，力求教材适应成人学员自学，注重加强教材的应用性。该系列教材作为普通高等学校成人教育的本科和专科层次的教材，在教材内容上保持了一定广度，理论上保持了一定深度，各校在教学中，可根据教学计划和学员的情况进行教材内容的选用。

本书在编写出版过程中得到了各级领导、各高等学校的大力支持，整套教材凝聚了众多教授、科研人员和工作人员的集体智慧，谨在此对本书付出辛勤劳动的全体人员表示衷心感谢！

本册为《概率论与数理统计》，全书共10章，第1～5章由夏学文编写，第6～10章由蒋劲松编写。

由于编写和出版时间仓促，书中难免存在错误，请各学校将使用过程中发现的问题及时反馈给我们，以便再版时修正、完善。

湖南省教育科学研究院
湖南省普通高校成教研究专业委员会
2005年10月15日

目 录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

一、事件

通常,人们观察到的现象可归结为两类:一类是可以事前预言的,这一类现象称为确定性现象或必然现象.例如重物在高处总是垂直落到地面;在一个大气压下,水在100℃时会沸腾等.另一类现象是事前不可预言的,这一类现象称为偶然现象或随机现象.例如抛掷一个均匀对称的硬币,结果可能是正面向上或背面向上;新生的婴儿可能是男或女.

是不是这些随机现象都没有什么规律可寻呢?人们通过反复观察和实践发现,在相同条件下进行大量观测时,随机现象可呈现某种规律,因而是可以预言的.也即随机现象具有统计规律性.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

我们把对自然现象进行观察或进行一次科学试验,统称为一个试验.如果这个试验在相同条件下可以重复进行,而且每次试验的结果事前不可预言,但事先可以知道试验的一切可能的结果,就称它为一个随机试验.

在随机试验中,可能出现、也可能不出现的结果称为随机事件,简称为事件.一般用字母 $A,B,C\cdots$ 表示事件.

例1,在 $0,1,2\cdots9$ 十个数字中任意选取一个,可有10种不同的结果:$A=\{$取得一个数是0$\}\cdots B=\{$取得一个数是9$\}$.

但还有其他可能的结果:$C=\{$取得一个数是奇数$\}$,$D=\{$取得一个大于4的数$\}$,$E=\{$取得一个数是3的倍数$\}$.

我们把不可能再分的事件称为基本事件.在例1中,A、B 都是基本事件.

由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.例如,E 是一个复合事件,它由“取得一个数是3”、“取得一个数是6”、“取得一个数是9”三个基本事件组合而成.

二、事件的关系与运算

进行一个试验,有这样或那样的事件发生,它们有不同的特性,彼此之间有一定的关系.

1. 在一定条件下必然发生的事件称为必然事件(用 Ω 表示).在一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件(用 Φ 表示).

我们把必然事件与不可能事件也作为随机事件.

2. 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 互不相容.

例如 Ω 与 Φ 是互不相容的,例 1 中的 A 与 B 是互不相容的.如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的,则称 $A_1,A_2\cdots A_n$ 互不相容.

3. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记为 $A\subset B$.

例如在例 1 中,{取得一数为 4 的倍数}$\subset${取得一数为偶数}.

显然,对任一事件 A,有 $\Phi\subset A\subset\Omega$.

$A\subset B$ 也可说成:如果事件 B 不发生则事件 A 必然不发生.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

4. 事件 A 与 B 的并(和)$A\cup B(A+B)$表示"事件 A 与 B 中至少有一个发生".

例如,{取出一数为 1}$\cup${取出一数为 2} = {取出一数为 1 或 2}.

5. 事件 A 与 B 的积 $A\cap B(AB)$表示"事件 A 与 B 同时发生".

例如,{取得一数为 2 或 8}$\cap${取得一数为 2} = {取得一数为 2}.

易知,有

(1)对任一事件 A,有 $A\cap\Omega=A$, $A\cap\Phi=\Phi$;

(2)若 A_1 与 A_2 互不相容,则 $A_1\cap A_2=\Phi$.

6. 事件 A 与 B 之差 $A-B$ 表示"事件 A 发生而事件 B 不发生".

例如,{取得一个数为 2 或 4} − {取得一个数为 2} = {取得一个数为 4}.

显然,对任意事件 A 有

$$A-A=\Phi;A-\Phi=A;A-\Omega=\Phi.$$

7. Ω 与 A 之差 $\Omega-A$ 称为 A 的逆事件,记为 $\overline{A}$,它表示"A 不发生"这一事件.

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个的情况.

即

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2\cdots A_n$ 中至少有一事件发生";

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"$B_1,B_2\cdots B_n$ 同时发生".

可以验证如下关系成立:

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$\qquad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$\qquad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4)$A-B=A\cap\overline{B}$;

(5)对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(6)对有限个或可列无穷个 A_i,有

$$A\cap(\overset{i}{\cup}A_i)=\overset{i}{\cup}(A\cap A_i),A\overset{i}{\cup}(A_i)=\overset{i}{\cap}(A\cup A_i),$$

$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A}_i$，$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A}_i$.

三、样本空间

对于每一随机试验的每一基本事件，用一个只包含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示，由若干基本事件组成的复合事件，则用包含若干个元素的集合表示，由所有基本事件对应的全部元素组成的集合，称为样本空间.

由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，因此，样本空间是必然事件.样本空间仍以 Ω 表示.**样本**空间中的每一个元素称为**样本**点.

这样，集合论的知识也可用于解释事件，列于表 1－1.

表 1－1

符号	集合论	概率论
Ω	空间	样本空间；必然事件
Φ	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的点(或称元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 含于事件 B
$A=B$	集合 A 与 B 相等(或等价)	事件 A 与 B 相等(或等价)
$A\cup B$	集合 A 与 B 之和(或并)	事件 A 与 B 至少有一个发生(事件 A 与 B 之和或并)
$A\cap B$	集合 A 与 B 之交	事件 A 与 B 同时发生(事件 A 与 B 之积或交)
$\overline{A}$	集合 A 之余集	事件 A 的逆事件
$A-B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与 B 之差)
$A\cap B=\Phi$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

我们以平面上的矩形表示样本空间，矩形内的每一点表示样本点，则事件的运算可用平面上图形表示，如图 1－1，用两个小圆形表示事件 A 与 B，则阴影部分表示 A 与 B 的各种关系及运算.

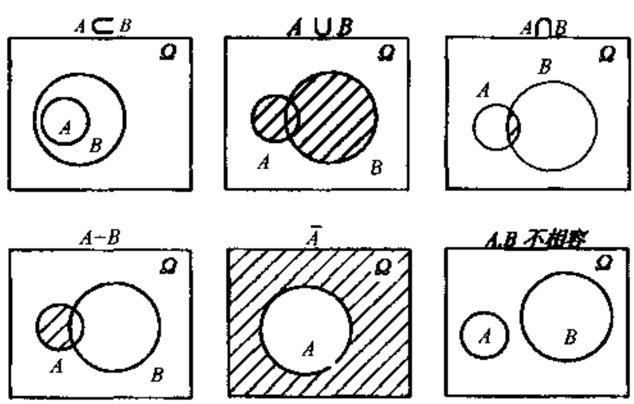

图 1－1

例 1　同时抛掷两枚硬币，其基本事件为：

$A_1=\{\omega_1\}$，$A_2=\{\omega_2\}$，$A_3=\{\omega_3\}$，$A_4=\{\omega_4\}$，其中 $\omega_1=$(正面，正面)，$\omega_2=$(正面，背

面)，$\omega_3=$(背面，正面)，$\omega_4=$(背面，背面)，这时有

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.

例2 计算某电话站总机在$[0,t]$内的呼叫次数，则基本事件为 $A_o=\{\omega_o\}$，$A_1=\{\omega_1\},\cdots,A_n=\{\omega_n\}$，其中 $\omega_k=$(k 次呼叫)($k=0,1,2,\cdots$)，则

$\Omega=\{\omega_k:k=0,1,2\cdots\}$.

例3 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数：

$A=\{$奇数点$\}$，$B=\{$点数小于5$\}$，$C=\{$小于5的偶数点$\}$. 用集合列举法表示下列事件：$\Omega,A,B,C,A+B,A-B,AB,AC,C-A,\bar{A}+B$.

解 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$；

$C=\{2,4\}$；

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$；

$A-B=\{5\}$，$AB=\{1,3\}$；

$C-A=\{2,4\}$，$AC=\Phi$；

$\bar{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$.

例4 事件 A_k 表示第 k 次取到合格品($k=1,2,3$)，试用符号表示下列事件：(1)三次都取到了合格品；(2)三次中至少有一次取到合格品；(3)三次中恰有两次取到合格品；(4)三次中最多有一次取到合格品.

解 (1)$A_1A_2A_3$；

(2)$A_1\cup A_2\cup A_3$；

(3)$(A_1A_2\bar{A}_3)\cup(A_1\bar{A}_2A_3)\cup(\bar{A}_1A_2A_3)$；

(4)$(\bar{A}_1\bar{A}_2)\cup(\bar{A}_1\bar{A}_3)\cup(\bar{A}_2\bar{A}_3)$或 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

例5 向指定的目标射三枪，以 A_1、A_2、A_3 分别表示事件“第一枪击中目标”、“第二枪击中目标”、“第三枪击中目标”. 试用 A_1、A_2、A_3 表达以下事件：

(1)只击中第一枪；(2)只击中一枪；(3)三枪都未击中；(4)至少击中一枪.

解 (1)$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$：即第二枪不中，第三枪也不中；

(2)$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$；

(3)$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$；

(4)$A_1\cup A_2\cup A_3$ 或者 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

例6 如果 x 表示一个沿数轴随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系.

$A=\{x:x\leqslant 20\}$，$B=\{x:x>3\}$，$C=\{x:x<9\}$，$D=\{x:x<-5\}$，$E=\{x:x\geqslant 9\}$.

解 在数轴上作出对应于事件的图，即可推知

(1)$A\supset C\supset D$，$B\supset E$；

(2)D 与 B、D 与 E 互不相容；

(3)C 与 E 为对立事件；

(4)B 与 C、B 与 A、E 与 A 相容.

§1.2 概　　率

概率论研究的是随机现象量的规律性.因此,仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的,还必须对事件发生的情况进行量的描述,例如事件发生的可能性大小的问题.

我们把刻画事件发生可能性大小的数量指标叫做事件的概率.事件 A 的概率以 $P(A)$表示,并且规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

一、古典概率

对于某一随机试验,如果它的全体基本事件 $E_1,E_2\cdots E_n$ 是有限的,且具有等可能性,则对任意事件 A,对应的概率 $P(A)$由下式计算:

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}(k)}{\text{基本事件总数}(n)}$$

我们把它称作古典概率.

例 1　设电话号码由 0、1、2……9 十个数字中任意五个数字组成,某一户的电话号码是 51710,问当不知道这个电话号码时,一次拨号就能拨对该电话号码的概率为多少?

解　全部电话号码有 10^5 个,当不知道电话号码时,拨 10^5 个电话中的任一电话号码的可能性是相同的.

设 $A=\{$一次拨号就能拨对该用户号码$\}$,则全部基本事件数 $n=10^5$,而 A 只含一个基本事件,即 $k=1$,因此,$P(A)=\frac{1}{10^5}=0.00001$.

例 2　袋中有 5 个白球,3 个黑球.从中任取 2 球,求取出的 2 球都为白球的概率.

解　基本事件总数为 $n=C_{5+3}^2=C_8^2$,令 $A=\{$取到两个白球$\}$,则 A 中的基本事件数 $k=C_5^2$,故有 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}=0.357$.

例 3　一批产品共 200 个,有 6 个废品.

求:(1)这批产品的废品率;

(2)任取三个恰有一个是废品的概率;

(3)任取三个全非废品的概率.

解　设 $P(A)$、$P(A_1)$、$P(A_o)$分别表示(1)、(2)、(3)中所求的概率,则有

(1)$P(A)=\frac{6}{200}=0.03$;

(2)$P(A_1)=\frac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}=0.0855$;

(3)$P(A_o)=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}=0.9122$.

例 4　两封信随机地向四个邮筒投寄,求:(1)第二个邮筒恰好投入一封信的概率;(2)前两个邮筒各有一封信的概率.

解　(1)设 $A=\{$第二个邮筒只投入一封信$\}$,两封信投入四个邮筒的投法有 $4^2=16$ 种,构成事件 A 的不同投法有 $C_2^1C_3^1=6$ 种,故有

$$P(A)=\frac{C_2^1C_3^1}{4^2}=\frac{3}{8}.$$

(2)同理,前两个邮筒各有一封信的概率 $P(B)$为

$$P(B)=\frac{C_2^1}{4^2}=\frac{1}{8}.$$

例5 10个号码装于一袋中,从其中任取3个,问大小在中间的号码恰为5号的概率为多少?

解 基本事件总数为 C_{10}^3,要大小在中间的号码为5号,必须一个小于5,一个等于5,一个大于5,其取法有 $C_4^1C_1^1C_5^1$ 种,故概率

$$P=\frac{C_4^1C_1^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

二、统计概率

我们先看两个具体问题:

例6 考虑某种子的发芽率,从一大批种子中抽取10批种子做发芽试验,其结果列于表1-2.

表1-2

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表1-2中可看出,发芽率在0.9附近摆动.

例7 考虑抛掷硬币的试验,其结果列于表1-3.

表1-3

抛掷次数	正面出现次数	正面出现频率
2048	1061	0.518
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005
30000	14994	0.4998

由表1-3可知,出现正面的频率接近0.5,并且抛的次数越多,频率越接近0.5.

从上面例子可以看到,它们具有如下特点:当考虑事件 A 发生的可能性大小时,只要在同一条件组下做大量的重复试验,事件 A 发生的次数与试验的总次数之比(即 A 发生的频率)呈现某种稳定现象.当试验的次数增加时,A 发生的频率总是稳定于某一数附近,即频率具有稳定性.

设在同一条件组下进行了 n 次试验,事件 A 发生了 m 次,则事件 A 发生的频率 $f(A)$定义为

$$f(A)=\frac{A\text{ 出现的次数 }m}{\text{试验的总次数 }n}.$$

我们称 $f(A)$的稳定中心 $P(A)$为事件 A 的统计概率.

例如,一个射手射击1000次,中靶600次,就说他中靶的概率为0.6;新生儿10000人中死亡2人,就说其死亡的概率为万分之二.

从概率的两个定义,可以得到:

(1)任何事件 A 的概率不大于1,不小于零,即: $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2)必然事件的概率等于1,即 $P(\Omega)=1$;

(3)不可能事件的概率等于零,即 $P(\Phi)=0$.

§1.3 概率的加法定理

一、加法法则

为了计算复杂事件的概率,也为了揭露概率的本质,我们来证明下面的定理.

定理1 两个互不相容事件 A 与 B 的和构成的事件的概率,等于事件 A 与事件 B 的概率之和,即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

证 以古典概率定义为例,设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$, $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\cdots,\omega_{k_r}\}$, $B=\{\omega_{l_1},\omega_{l_2},\cdots,\omega_{l_s}\}$,则

$$P(A)=\frac{r}{n},P(B)=\frac{s}{n}.$$

由已知条件 A 与 B 没有公共元素,所以

$$A+B=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\cdots,\omega_{k_r},\omega_{l_1},\omega_{l_2},\cdots,\omega_{l_s}\},$$

从面有 $P(A+B)=\dfrac{r+s}{n}$

$$P(A+B)=\frac{r+s}{n}=\frac{r}{n}+\frac{s}{n}=P(A)+P(B).$$

例1 100件产品中有60件一等品,30件二等品,10件废品.规定一、二等品都为合格品.设事件 A、B 分别表示产品为一等品和二等品.显然,A 与 B 互不相容,因此,合格品的概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{60}{100}+\frac{30}{100}=0.9.$$

定理1可推广到有很多个的情形.

推论1 如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

推论2 对立事件概率之和等于1,即

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

证 因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$, $A\cap\overline{A}=\Phi$

故 $1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$.

推论3 若 $A\supset B$,则事件 A 的概率不小于事件 B 的概率,即 $P(A)\geqslant P(B)$.

证 由于 $A\supset B$,故 $A=B\cup A\overline{B}$.又 B 与 $A\overline{B}$ 互不相容,因此有

$$P(A)=P(B\cup A\overline{B})=P(B)+P(A\overline{B})\geqslant P(B).$$

例 2　某班有 40 名学生,其中 35 名男生,5 名女生.任选 3 名代表参加另一班级的新年晚会,求代表中有女生的概率.

解 1　设 $A_i=\{$代表中恰有 i 名女同学$\}$, $i=1、2、3$, $A=\{$代表中有女同学$\}$,

可知, A_1、A_2、A_3 两两互不相容,且 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$.

又 $P(A_1)=\dfrac{C_5^1C_{35}^2}{C_{40}^3}\approx 0.3011$,

$$P(A_2)=\frac{C_5^2C_{35}^1}{C_{40}^3}\approx 0.0354,$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{40}^3}\approx 0.0010,$$

因此有

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\approx 0.3375.$$

解 2　$\overline{A}=\{$代表中无女同学$\}$,则

$$P(\overline{A})=\frac{C_{35}^3}{C_{40}^3}\approx 0.6625.$$

故 $P(A)=1-P(\overline{A})\approx 0.3375$.

定理 2　若 A 与 B 为任意两事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

这个定理称为概率的一般加法定理.当 $AB=\Phi$ 时,即变成了定理 1.

概率的一般加法定理可推广到 n 个事件的情形.

例如,当 $n=3$ 时,有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_3A_1)+P(A_1A_2A_3).$$

例 3　在 1,2,…,1000 这 1000 个自然数中任取一个数,求它能被 2 或 3 整除的概率.

解　设 $A=\{$取得的数能被 2 整除$\}$, $B=\{$取得的数能被 3 整除$\}$,则

$A\cap B=\{$取得的数能被 6 整除$\}$,

$A\cup B=\{$取得的数能被 2 或 3 整除$\}$.

在这 1000 个数中,有 500 个数能被 2 整除,有 333 个数能被 3 整除,有 166 个数能被 6 整除,因此

$$P(A)=\frac{500}{1000}=0.5,\ P(B)=\frac{333}{1000}\doteq 0.333,$$

$$P(AB)=\frac{166}{1000}=0.166,$$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.667$.

§1.4 条件概率与乘法定理

一、条件概率

定义 在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 A 在给定 B 下的条件概率，或称为 A 关于 B 的条件概率. 记为 $P(A/B)$.

条件概率 $P(A/B)$ 与相应的无条件概率 $P(A)$，虽然都是同一个事件的概率，但是，在一般情况下它们的值是不相等的.

例 1 市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂产品的合格率是 80%. 若用事件 A、$\bar{A}$ 分别表示甲、乙两厂的产品，B 表示产品为合格品，可知有

$$P(A)=70, P(\bar{A})=30\%, P(B/A)=95\%,$$

$$P(B/\bar{A})=80\%, P(\bar{B}/A)=5\%, P(\bar{B}/\bar{A})=20\%.$$

二、乘法定理

定理 若 A 与 B 为任意两个事件，则它们之积的概率等于其中一事件的概率与另一事件关于前一事件的条件概率的乘积，即

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

证 就古典概率情形加以证明. 设试验的基本事件总数为 n，事件 A、B 与 AB 分别包含 m_1、m_2 与 k 个基本事件，则

$$P(A)=\frac{m_1}{n}, P(B)=\frac{m_2}{n}, P(AB)=\frac{k}{n}.$$

若 A 已发生，则 A 包含的 m_1 个基本事件中必有一个出现. 在 A 发生的条件下计算 B 发生的概率，其"基本事件总数"只有 m_1 个，其中 B 所包含的基本事件只有积事件 AB 包含的 k 个，于是，当 $P(A)>0$ 时，有

$$P(B/A)=\frac{k}{m_1}=\frac{k/n}{m_1/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

同理，当 $P(B)>0$ 时，有

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

上述定理可推广到 $n(n\geqslant 3)$ 个事件的情形. 当 $n=3$ 时，有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$$

从而有

推论 对任何正整数 $n>2$，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 2 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随意拨号；

(1)求第三次拨号才接通电话的概率；

(2)求拨号不超过三次而接通电话的概率.

解 (1)设 $A_i=\{$第 i 次拨号时接通电话$\}$，$i=1、2、3$，

显然