hzhbooks.com 華章图书 碧海书道 BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

数学分析
辅导与习题精解

配高教(华东师大)第三版

滕加俊　主编

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

hzhbooks.com 華章图书 碧海书道 BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

数学分析
辅导与习题精解

配高教(华东师大)第三版

滕加俊　主编

滕兴虎　许扬灵　滕加俊　吴　红　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析辅导与习题精解(配高教(华东师大)第三版) / 滕加俊主编. —大连:大连理工大学出版社,2006.9
ISBN 7-5611-3354-5

Ⅰ.数… Ⅱ.滕… Ⅲ.数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105292 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm　　印张:23　　字数:872 千字
2006 年 9 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:邱明霞　吴孝东　　　责任校对:碧　海
封面设计:宋　蕾

定　价:26.00 元

前言

数学分析是数学学科中一门最重要的基础课，也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目。学习数学分析既可以为后续专业课奠定必备的数学基础，同时也是提高自身数学修养的必经途径。

数学分析中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统。这个系统内容丰富，结构严密，无懈可击，作为数学专业学生进入大学阶段学习的第一门基础课程，许多同学在学习过程中感到数学分析抽象难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时缺乏思路，难以下手。为了帮助广大同学更好地掌握数学分析的基本概念和基本理论，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们根据华东师范大学数学系编写的《数学分析》第三版（高等教育出版社出版）编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

导读 列出相应各章应掌握的知识点以及重点、难点内容。

知识点考点精要 列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握和理解的核心内容以及考查的核心知识。

释疑解惑 对本章重点、难点内容以及难以理解的问题给以详细剖析。

习题全解 教材中课后习题数量大、层次多，基础性问题可从多个角度帮助同学们理解基本概念和基本理论，层次较高的问题则有助于广大

读者进一步地提高和应用，不少问题具有独特的解题思路和方法。因此，对教材课后大多数习题给出了详细解答。由于数学分析解题方法千变万化，部分习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。（书中标有教材页码，可方便读者查阅。）

本书由滕兴虎、许扬灵、滕加俊、吴红等编写，全书由滕加俊教授统稿。由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

2006 年 9 月 5 日

目 录

第一章　实数集与函数

导读

本章讨论了实数集和函数。函数表示的是变量之间的依赖关系。函数是数学分析的主要研究对象之一。本章除了复习中学数学中已学过的内容外，还根据今后的需要，作了必要的补充。

一、基本要求

1. 了解实数的概念，掌握实数集的稠密性。记住几个重要的不等式：三角形不等式，均值不等式和伯努利不等式；

2. 理解有界集、确界的概念，掌握确界原理；

3. 掌握函数的有关概念，理解复合函数、反函数和初等函数的定义；

4. 熟练掌握有界函数、单调函数、奇函数、偶函数和周期函数的定义。

二、重　点

确界和确界原理。

三、难　点

有关确界的证明题。

知识点考点精要

一、主要定义

1. 有理数、无理数和实数

有理数是形如$\frac{p}{q}$(p,q为整数，$q\neq 0$)的数。无限不循环小数称为无理数。有理数和无理数统称为实数。

2. 邻域

点 a 的 δ 邻域定义为 $U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$；

点 a 的空心 δ 邻域定义为 $U^{\circ}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$；

点 a 的 δ 左邻域定义为 $U_{-}(a;\delta)=(a-\delta,a]$；

点 a 的 δ 右邻域定义为 $U_{+}(a;\delta)=[a,a+\delta)$；

点 a 的空心 δ 左邻域定义为 $U^{\circ}_{-}(a;\delta)=(a-\delta,a)$；

点 a 的空心 δ 右邻域定义为 $U^{\circ}_{+}(a;\delta)=(a,a+\delta)$；

∞ 邻域定义为 $U(\infty)=\{x \mid |x|>M\}$；

$+\infty$ 邻域定义为 $U(+\infty)=\{x \mid x>M\}$；

$-\infty$ 邻域定义为 $U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$。

其中，M 为充分大的正数。

3. 有界集

设 $S\subseteq \mathbf{R}$，若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$，则称 S 为有上界(下界)的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界)。若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集。若 S 不是有界集，则称 S 为无界集。

4. 确界

设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若数 ξ 满足：

(1) 对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界；

(2) 对任何 $\beta>\xi$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$，即 ξ 又是 S 的最大下界，则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\xi=\inf S$。

5. 复合函数

设有两个函数 $y=f(u),u\in D,u=g(x),x\in E$，记 $E^{*}=\{x \mid g(x)\in D\}\cap E$。若 $E^{*}\neq\varnothing$，则对每一个 $x\in E^{*}$，可通过函数 g 对应 D 内惟一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应惟一的一个值 y。这就确定了一个定义在 E^{*} 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记作 $y=f(g(x)),x\in E^{*}$，或 $y=(f\circ g)(x),x\in E^{*}$，称为函数 f 和 g 的复合函数。并称 f 为外函数，g 为内函数，u 称为中间变量。

6. 反函数

设函数 $y=f(x),x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y，D 中有且仅有一个值 x 使得 $f(x)=y$，则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 f 的反函数，记作 $f^{-1}:f(D)\to D,y\mapsto x$ 或 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$。

7. 基本初等函数

常量函数　$y=c$　(c 是常数)；

幂函数　$y=x^{\alpha}$　(α 为实数)；

指数函数　$y=a^{x}$　($a>0,a\neq 1$)；

对数函数　$y=\log_a x$　($a>0,a\neq 1$)；

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$；

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$。

8. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为初等函数。

二、主要结论与公式

1. 实数集的稠密性

任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数。

2. 三角不等式

对于任何 $a,b\in\mathbf{R}$，有如下的三角不等式：

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

3. 平均值不等式

对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，记

$$M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\text{（算术平均值）},\quad G=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\text{（几何平均值）}$$

$$H=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\text{（调和平均值）}$$

则 $H\leqslant G\leqslant M$，等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

4. 伯努利不等式

当 $x>-1, n\in\mathbf{N}$ 时，有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$。

5. 确界原理

设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界。

6. 严格单调函数的反函数

设 $y=f(x), x\in D$ 为严格增（减）函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增（减）函数。

释疑解惑

1. 无理数的出现

无理数是希腊人于公元前五世纪发现的。这一发现是以毕达哥拉斯定理（即勾股定理）为基础的。两直角边都为 1 的直角三角形的斜边 x 满足方程 $x^2=2$。容易证明，任何有理数都不是这个方程的解。一个几何上存在的量却不能用一个数（指有理数）来表示。在实际应用中，人们把无理数当作有理数一样来进行运算，必要时取无理数的近似值。直到 1500 年前后，人们对于无理数是否确实是数仍有争论。而严格的无理

论理论到 19 世纪后半叶才建立起来。康托尔把无理数看作是有理数的柯西列，而戴德金把无理数定义为有理数集 Q 的一个划分(A_1, A_2)，它满足 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，$A_1 \cup A_2 = Q$，并且 A_1 中的数都小于 A_2 中的数。康托尔的方法容易推广到其他场合，而戴德金的方法不依赖于极限。

2. 函数的概念

最早的函数是从对物体运动的研究中产生的。伽利略(1564 ~ 1642) 在他的力学研究中，是用文字和比例的语言来表达函数关系的。例如，"从静止状态开始以定常加速度下降的物体，其经过的距离与所用时间的平方成正比。"这句话包含变量，表达了变量之间的依赖关系。笛卡尔于 17 世纪初创立了解析几何。此后，函数被当作曲线来研究。那时，函数等同于一个有限的解析表达式。微积分的出现，使函数概念得到新的发展。欧拉(1707 ~ 1788) 在他的《引论》中把函数定义为由一个变量与一些常量，通过任何方法形成的解析表达式。他还定义了多元函数，引入了某些用积分表达的函数。现在的函数定义出现于 19 世纪初，傅里叶(1837 年) 给出的(单值) 函数的定义为：如果对于给定区间上的每一个 x 的值，有惟一的一个 y 值与它对应，那么 y 就是 x 的一个函数。至于在整个区间上 y 是否按照一种或多种规律依赖于 x，或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达，那都是无关紧要的。

习题全解

§1 实数(P4)

1. 设 a 为有理数，x 为无理数。证明：

(1) $a+x$ 是无理数；　　(2) 当 $a \neq 0$ 时，ax 是无理数。

证明　(1) 用反证法。假设 $a+x$ 是有理数，那么 $(a+x)-a=x$ 也是有理数。这与 x 是无理数矛盾。故 $a+x$ 是无理数。

(2) 用反证法。假设 ax 是有理数。因为 a 是不等于零的有理数，所以 $ax/a=x$ 是有理数。这与 x 是无理数矛盾。故 ax 是无理数。

---

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1) $x(x^2-1)>0$；　　(2) $|x-1|<|x-3|$；

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1} \geqslant \sqrt{3x-2}$。

解　(1) 由原不等式得

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \tag{a}$$

或

$$\begin{cases}x<0\\x^2-1<0\end{cases}\qquad\text{(b)}$$

不等式组(a)的解是 $x>1$,不等式组(b)的解是 $-1<x<0$。故 $x(x^2-1)>0$ 的解集是 $\{x\mid -1<x<0$ 或 $x>1\}$。在数轴上表示如图 1-1 所示。

图 1-1

(2) 原不等式同解于不等式 $(x-1)^2<(x-3)^2$。由此得原不等式的解为 $x<2$。在数轴上表示如图 1-2 所示。

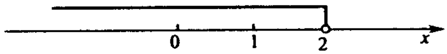

图 1-2

(3) 原不等式的解 x 必须满足不等式组

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\2x-1\geqslant 0\\3x-2\geqslant 0\end{cases}$$

解得 $x\geqslant 1$。原不等式两边平方得

$$x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\geqslant 3x-2$$

即 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$。因为当 $x\geqslant 1$ 时,$\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$ 不可能成立,所以原不等式无解。

---

3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$。证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$。

证明　用反证法。假设 $a\neq b$,那么 $a-b\neq 0$。设 $|a-b|=\eta$,则 $\eta>0$。取 $\varepsilon=\dfrac{\eta}{2}$,那么 $|a-b|<\varepsilon$ 不成立,因为 $|a-b|=\dfrac{\eta}{2}+\dfrac{\eta}{2}>\dfrac{\eta}{2}$。这与题设矛盾,故 $a=b$。

---

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立。

证明　由于 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}+2=4$。因此 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$。当且仅当 $x^2=\dfrac{1}{x^2}$,即 $x=\pm 1$ 时,原不等式中的等号成立。

---

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;　(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$。

证明 (1) 由三角不等式 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$ 可知，

$$|x-1|+|x-2|=|x-1|+|2-x|\geqslant|(x-1)+(2-x)|=1$$

(2)
$$\begin{aligned}|x-1|+|x-2|+|x-3|&\geqslant|x-1|+|x-3|=|x-1|+|3-x|\\&\geqslant|(x-1)+(3-x)|=2\end{aligned}$$

6. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$（$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合）。证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

证明 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$|-x|=|x|$，故只需对 $b\geqslant c>0$ 的情形进行证明。当 $b\geqslant c>0$ 时，原不等式化为

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\leqslant b-c$$

上式等价于

$$\sqrt{a^2+b^2}+c\leqslant\sqrt{a^2+c^2}+b$$

$$a^2+b^2+c^2+2c\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a^2+b^2+c^2+2b\sqrt{a^2+c^2}$$

即
$$c\sqrt{a^2+b^2}\leqslant b\sqrt{a^2+c^2}$$

由于 b、$c\in\mathbf{R}^+$，所以，上式等价于

$$c^2a^2+c^2b^2\leqslant b^2a^2+b^2c^2$$

即 $c^2\leqslant b^2$，当 $b\geqslant c>0$ 时，这个不等式是成立的。所以，原命题成立。

题中不等式的几何意义如图 1-3 所示，其中 $AB=a$，$BD=b$，$BC=c$。其几何意义表示 $\triangle ACD$ 的两边之差小于第三边。

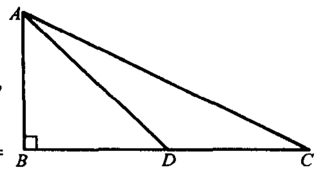

图 1-3

7. 设 $x>0$，$b>0$，$a\neq b$。证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间。

证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间的充分必要条件是 $\left(\dfrac{a+x}{b+x}-1\right)\left(\dfrac{a+x}{b+x}-\dfrac{a}{b}\right)<0$。

$$\left(\frac{a+x}{b+x}-1\right)\left(\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a-b}{b+x}\cdot\frac{bx-ax}{(b+x)b}=-\frac{x(a-b)^2}{b(b+x)^2}$$

由题设 $x>0$，$b>0$，$a\neq b$ 可知 $-\dfrac{x(a-b)^2}{b(b+x)^2}<0$。于是原命题得证。

8. 设 p 为正整数。证明：若 p 不是完全平方数，则 $\sqrt{p}$ 是无理数。

证明 反证法。假设 $\sqrt{p}$ 是有理数。由于 p 不是完全平方数，于是存在两个互质的正整数 m，n，且 $n>1$，使得 $\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$，于是 $p=\dfrac{m^2}{n^2}$，$m^2=n^2p=n(pn)$，由此得 $n\mid m^2$。由

于$n>1$,所以存在质数$r\mid n$。于是$r\mid m^2$,$r\mid m$。这与m,n互质矛盾,所以$\sqrt{p}$是无理数。

9. 设a、b为给定实数。试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

(1) $|x-a|<|x-b|$;　　(2) $|x-a|<x-b$;　　(3) $|x^2-a|<b$。

解　(1) 因为$x=b$不是原不等式的解,原不等式可化为

$\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|<1$,即$-1<\dfrac{x-a}{x-b}<1$。由此得不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{(x-a)-(x-b)}{x-b}<0\\ \dfrac{(x-a)+(x-b)}{x-b}>0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x>b\\ b-a<0\\ 2x-a-b>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x<b\\ b-a>0\\ 2x-a-b<0\end{cases}$$

故当$a>b$时,原不等式的解是$x>\dfrac{a+b}{2}$。当$a<b$时,原不等式的解是$x<\dfrac{a+b}{2}$。当$a=b$时,原不等式的解集是$\varnothing$。

(2) 原不等式可化为

$$\begin{cases}x>b\\ b-x<x-a<x-b\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x>b\\ a>b\\ x>\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$$

故当$a>b$时,原不等式的解是$x>\dfrac{a+b}{2}$。当$a\leqslant b$时,原不等式的解集是$\varnothing$。

(3) 当$b\leqslant 0$时,原不等式的解集是$\varnothing$。

当$b>0$时,原不等式可化为

$$-b<x^2-a<b$$

即

$$\begin{cases}x^2<a+b\\ x^2>a-b\end{cases}$$

(i) 当$b>0$,$a+b\leqslant 0$时,原不等式的解集是$\varnothing$。

(ii) 当$b>0$,$a+b>0$,$a-b<0$时,原不等式的解是

$$-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$$

(iii) 当$b>0$,$a+b>0$,$a-b\geqslant 0$时,原不等式的解是

$$-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}\quad\text{或}\quad\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$$

§2 数集·确界原理(P9)

1. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$；　　　　(2) $\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$；

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$(a,b,c 为常数，且 $a<b<c$)；

(4) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$。

解　(1) 原不等式可化为 $|1-x|\geqslant x$。显然，当 $x\leqslant 0$ 时，原不等式总成立。当 $x>0$ 时，原不等式可化为 $(1-x)^2\geqslant x^2$，即 $1-2x+x^2\geqslant x^2$，解得 $x\leqslant\frac{1}{2}$。综上，原不等式的解为 $x\leqslant\frac{1}{2}$，用区间表示为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

(2) 显然，当一个数是 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$ 的解时，它的相反数也是不等式的解。于是先求解不等式组

$$\begin{cases}x>0\\ x+\frac{1}{x}\leqslant 6\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x>0\\ x^2-6x+1\leqslant 0\end{cases}$$

解得 $3-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3+2\sqrt{2}$，于是原不等式的解集为 $[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$。

(3) 由于 $a<b<c$，故可将不等于 a、b、c（它们不是原不等式的解）的实数划分为 4 个部分 $(-\infty,a)$、(a,b)、(b,c)、$(c,+\infty)$。当 x 在其中任一部分中变化时，$(x-a)$、$(x-b)$、$(x-c)$ 都不变号，由此可得原不等式的解集为 $(a,b)\cup(c,+\infty)$。

(4) 由单位圆中的正弦线可得 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集是 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right]$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

---

2. 设 S 为非空数集。试对下列概念给出定义：

(1) S 无上界；　　　　(2) S 无界。

解　(1) S 无上界的定义是：设 S 为非空数集，若对任意的正数 M，总存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>M$，则称数集 S 无上界。

(2) S 无界的定义是：设 S 为非空数集，若对任意的正数 M，总存在 $x_0\in S$，使得 $|x_0|>M$，则称数集 S 无界。

---

3. 试证明由式(3)所确定的数集 S 有上界而无下界。

证明　式(3)所确定的数集 $S=(-\infty,2]$。3 是数集 S 的一个上界。S 无下界，因为对

于任意一个正数 M，令 $x_0=-(M+1)\in S$，而 $|x_0|=M+1>M$。

---

4. 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

(1) $S=\{x\mid x^2<2\}$；　　(2) $S=\{x\mid x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$；

(3) $S=\{x\mid x$ 为 $(0,1)$ 内的无理数$\}$；

(4) $S=\left\{x\mid x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$。

解　(1) $S=\{x\mid x^2<2\}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。$S$ 的上、下确界分别为 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$。这里只证明 $\sqrt{2}$ 是上确界。显然有 $\sqrt{2}$ 是集合 S 的一个上界。设 $\alpha<\sqrt{2}$，令 $\sqrt{2}-\alpha=\varepsilon$，则 $\varepsilon>0$。不妨设 $\alpha>-\sqrt{2}$，即 $\varepsilon<2\sqrt{2}$。取 $x_0=\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}=\alpha+\varepsilon-\dfrac{\varepsilon}{2}=\sqrt{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}$，可见 $x_0\in S$，并且 $x_0>\alpha$。因此，$\sqrt{2}$ 是 S 的上确界。

(2) $S=\{x\mid x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}=\{1,2,6,\cdots\}$ 的上、下确界分别为 $+\infty$ 和 1。1 是 S 的一个下界，并且任何大于 1 的数都不是 S 的下界，所以 1 是 S 的最大下界，即 1 是 S 的下确界。对任意的 $M>0$，取 $n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$，则 $x=n!\geqslant n>M$，故 S 无上界，即 S 的上确界为 $+\infty$。

(3) $S=\{x\mid x$ 为 $(0,1)$ 内的无理数$\}$ 的上、下确界分别为 1 和 0。这里只证明 1 是 S 的上确界。设 $\alpha<1$，不妨设 $\alpha>0$。由无理数的稠密性可知，存在无理数 $x_0\in(\alpha,1)$。于是 $x_0\in S$，并且 $x_0>\alpha$。因此，1 是 S 的上确界。

(4) $S=\left\{x\mid x=1-\dfrac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的上确界为 1，下确界为 $\dfrac{1}{2}$。因为 S 中的最小元素为 $\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的最大下界。即 $\dfrac{1}{2}$ 是 S 的下确界。由于 $1-\dfrac{1}{2^n}<1(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 1 是 S 的一个上界，设 $\alpha<1$，令 $1-\alpha=\varepsilon$，由于 $\varepsilon>0$，所以存在 $n_0\in\mathbf{N}_+$，使得 $\dfrac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$，于是 $x_0=1-\dfrac{1}{2^{n_0}}\in S$，满足不等式 $x_0>1-\varepsilon=\alpha$。因此，1 是 S 的上确界。

---

5. 设 S 为非空有下界数集。证明：

$$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$$

证明　必要性　设 $\inf S=\xi\in S$，因为 ξ 是 S 的下确界，所以 ξ 是 S 的一个下界。于是，对于 S 的任一元素 x，$x\geqslant\xi$。又因为 $\xi\in S$，所以 ξ 是 S 中最小的数，即 $\xi=\min S$。

充分性　设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$，并且对于 S 中的任意元素 x，$x\geqslant\xi$。即 ξ 是 S 的一个下界。对于任意 $\alpha>\xi$，取 $x_0=\xi\in S$，则 $x_0<\alpha$。所以 ξ 是 S 的下确界，即 $\inf S=\xi\in S$。

---

6. 设 S 为非空数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$。证明：

(1) $\inf S^-=-\sup S$；　　(2) $\sup S^-=-\inf S$。