总主编/蔡上鹤

特别合作 sina新浪网 中学生学习报

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

魔法数学

Magic Math

专题突破

体验征服学习考试 精彩感觉！

圆

初中版

丛书主编/严文科

请认准此防伪标识

补上你知识木桶上最短的那一块

- 最全面、最创新的素质教育
- 最科学、最优化的学习流程
- 最新颖、最独到的情境设置

著名节目主持人
魔法教辅品牌代言人 何炅

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

总主编／蔡上鹤

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

魔法数学

Magic Math

专题突破

圆

初中版

丛书主编／严文科

本册主编／张四平　龚天青

编　　委　熊正兰　张胜言　姜建华
胡光华　张扩军　龚天荣
朱矩鹏

长征出版社

CHANGZHENG PRESS

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学专题突破．初中：圆/张四平，龚天青主编．—北京：长征出版社，2004

ISBN 7-80015-814-4

Ⅰ．魔… Ⅱ．①张… ②龚… Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 044334 号

魔法数学专题突破初中版

主创设计 / 魔法教育发展研究中心

电　　话 / 010—80602977

网　　址 / http：//www.magic 365. com. cn

出　　版 / 长征出版社

（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）

行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司

（服务热线：010—80602977）

经　　销 / 全国新华书店

印　　刷 / 保定市印刷厂

开　　本 / 880×1230　　1/32

字　　数 / 4160 千字

印　　张 / 130 印张

版　　次 / 2004 年 6 月第 1 版

印　　次 / 2004 年 6 月第 1 次印刷

书　　号 / ISBN 7-80015-814-4/G・313

全套定价 / 192.00 元

Magic

魔法系列丛书

Magic

致读者

在新的世纪,国内基础教育正发生着日新月异的变化,广大教师和学生对中学教辅读物出版创新的呼声也此起彼伏:中学教辅需要精品,需要品牌,需要从更远、更新的角度重新打造!在这一大背景下,魔法英语以其独特的品质和魅力赢得了读者的尊重和认可,应接不暇的咨询电话和雪片般的订单让我们更加深刻地体会到:中国的基础教育太需要“魔法”这样卓越的图书了!

数以万计的中学教师和学生问我们:你们何时出版“魔法语文”“魔法数学”“魔法物理”“魔法化学”等其他学科的图书?

肩负着社会的责任,带着广大中学师生的期盼,我们联合了美国蒙登戈国际语言研究中心、英国剑桥国际语言研究院等国内外数十所教育研究机构,邀请了张定远、蔡上鹤、薄冰、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等十余名基础教育界权威、国内顶级教材专家,在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下,隆重推出了以《魔法英语》为龙头的《魔法语文》《魔法数学》《魔法物理》《魔法化学》《魔法生物》《魔法政治》《魔法历史》《魔法地理》系列魔法图书。

“享受学习每一刻!”是魔法系列图书最基本的理念,我们希望把魔法系列图书这一成功的理念推广到中学教育的每一个学科、每一个年级、每一个领域。

一千多位教育专家及知名特高级教师联手缔造的魔法系列图书,已经走在中学教辅图书的最前沿,成为一个全新的中学教辅品牌!一个真正由专家打造的具有国际品质的中学教辅品牌!

我们希望给中学生提供一个崭新的学习平台,为每位读者付出的时间和殷切的期待提供丰厚的回报。我们力求通过不懈的努力,让魔法系列图书解放中学生的学习,解放中学生的考试,让学习变得“轻松、快乐、高效”的思想光芒照耀每位读者!

我们与读者的心是相通的,同广大一线教师的心是相通的。现在,我们付出的每一份努力,都得到了广大教师和读者的支持和肯定。面对这些勉励和关怀,我们将会以百倍的努力来报答。未来我们会做得更好,这是我们的目标,也是我们不变的承诺。

魔法系列图书愿做中学生学习的最佳助手,最贴心的朋友!让魔法系列图书伴随着我们的幸福、快乐和回忆,一起成长!

魔法教育发展研究中心
2004.6

Magic

魔法数学

前　言

根据教育专家多年的研究发现，几乎每位学生在学习过程当中都有薄弱的学科，每一学科中都有薄弱的专题，而正是这些薄弱学科、薄弱的专题阻碍了学生的成功。“亡羊补牢，未为迟也。”为了帮助更多中学生在中考走向成功，我们组织了全国数十名有多年教学和研究经验的特高级教师、教研员，在张定远、薄冰、蔡上鹤、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等中学教育界权威、教材专家的悉心指导下，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，精心编写了本系列图书。

我们在丛书编写过程中，秉承“科学划分、高效实用”的编写理念，尊重现行教材体系，依据教学大纲与考试说明，将初中数学专题科学地设置为：《实数与代数式》《方程(组)与不等式(组)》《圆》《三角形与四边形》《相似形与解直角三角形》《综合性问题》《创新型问题》《函数及其图像》八个分册。

本书具备以下特点：

细分专题，针对性强：适合初中不同年级的学生对自己的薄弱学科、薄弱专题集中学习，不受年级、教材的限制。

内容详尽，重点突出：以大纲为面，考纲为线，所有该专题的内容全面详尽，重点难点突出。

表述灵活，直观高效：本书灵活使用图、表、眉批、旁注等多种表达方式进行内容阐述，使平常枯燥的学习过程变得直观、具体、高效。

信息敏锐，材料新颖：本书采用了大量的前沿性、趣味性、现实性资料，结合最新的中考信息和命题趋势，从最新的角度组织学习和复习，具有很强的实用性和超前性。

前　言

本丛书分为以下几个栏目：

【教考资讯】紧扣教学大纲，总结分析中学教学、教材改革的新趋势、新动向，突出最新考试信息和对未来中考命题走向的预测，增强针对性。

【知识精讲】这是本套丛书最具特色的栏目。专题在这个栏目中，下大气力，对所涉及的知识点，高度集中地作全面、详尽地分析，以利学生在有限的时间里，集中补差、补弱，系统有效地提高自己知识能力，补上自己知识木桶上最短的那一块。

【典题探究】此栏目针对综合性强的拓展题进行解析，结合最新的《考试说明》，评价每道题的命题角度和能力层级要求，分析解题过程，点拨解题技巧。

【思维跨越】对重点、难点和热点进行延伸和拓展。以提高学生综合解决问题的能力。

【中考链接】收集了与本节内容相关的近几年各省市的中考题进行详细解析，以使学生学以致用，了解中考，感受中考，为决胜中考做准备。

【魔法训练】魔法训练由三个层次组成，第一层次的基本训练，重在基础；第二层次的拓展训练，重在提高；第三层次的综合创新，重在应用。从而使知识的训练由浅入深，阶梯形提高，最终达到把握基础知识，培养和提高学生综合素质和应考能力。

本套丛书既适应应考学生的中考需要，也适合初一、初二学生的学习需要。

我们在编写过程中，本着对学生高度负责的态度，处处把关，如还有疏漏，诚请读者指正。

编　者

2004 年 6 月于北京

Magic

魔法数学

目　录

第一章　圆的有关性质

教考资讯

新课标要求

1.了解圆、弦、弧、等圆、等弧、三角形外接圆、圆内接三角形等概念.

2.掌握点和圆的位置关系、垂径定理及推论，并能应用它们进行有关的证明和计算.

3.理解不在同一直线上三点确定一个圆的定理，并掌握过不在同一直线上三点作圆的方法.

中考基本要求

1.理解圆、等圆、等弧、三角形的外心等概念及圆的对称性.

2.掌握点和圆的位置关系及垂径定理与其推论间的逻辑关系.

3.能熟练运用垂径定理及推论解决实际问题.

知识精讲

知识点1：圆的定义.

圆的定义只有两种：

(1)如图1-1，在一个平面内，线段OA绕它固定的一个端点O旋转一周，另一个点A随之旋转所形成的图形叫做圆．端点O叫圆心，线段OA叫半径.记作“$\odot O$”，读作“圆O”.

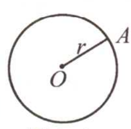

图 1-1

(2)圆是在一个平面内到定点的距离等于定长的点的集合.

知识点2：点和圆的位置关系.

点和圆的位置关系分三种：点在圆内、点在圆上和点在圆外.设$\odot O$的半径为R，点P和圆心O的距离为d，则有：

名师导学

“圆”常被人们看成是最完美的事物，圆的图形在人类进程中给每个人留下深深的烙印，它是团结、和谐、友谊的象征，也是人们对美好生活的向往．我们在学习圆时，要知道圆是由它的圆心和半径决定的，圆心决定圆的位置，半径决定圆的大小.

(1)点P在$\odot O$内 $\Leftrightarrow$ $d<R$

(2)点P在$\odot O$上 $\Leftrightarrow$ $d=R$

(3)点P在$\odot O$外 $\Leftrightarrow$ $d>R$

点和圆的位置关系和点到圆心的距离的数量关系是互相对应的.判断点与圆的位置关系时,一定要找准d与R,然后认真比较.

知识点3:与圆有关的概念.

(1)连结圆上任意两点的线段叫弦(如图1-2中的CD);经过圆心的弦叫做直径(如图1-2中的AB).

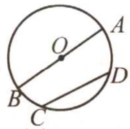

图1-2

(2)圆上任意两点间的部分叫做圆弧,简称弧.弧用符号"⌒"表示,以A、B为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$,读作"圆弧AB"或"弧AB".

要想真正理解这些概念,必须弄清它们之间的联系与区别,如直径是弦,并且是同圆中最大的弦.但弦不一定是直径;半圆是弧,弧不一定是半圆.

圆的任意一条直径的两个端点分圆为两条弧,每一条弧都叫半圆.大于半圆的弧叫做优弧(用三个字母表示,如图1-3中的$\overset{\frown}{ABC}$);小于半圆的弧叫劣弧(如图1-3中的$\overset{\frown}{AC}$).

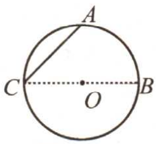

图 1-3

(3)由弦及其所对的弧组成图形叫弓形(如图1-3中弦AC与$\overset{\frown}{AC}$及$\overset{\frown}{ABC}$组成的两个不同的弓形).

强调半圆是弧,而不是弓形.要区别好半圆与弓形之间的关系.弓形也不是弧,它是由弦及所对弧组成的图形.

(4)圆心相同、半径不相等的两个圆叫做同心圆.如图1-4中半径为r_1与半径为r_2的$\odot O$是同心圆.圆心不同,半径相等的两个圆叫做等圆,如图1-5中的$\odot O_1$与$\odot O_2$的半径都等于r,它们是等圆.容易看到,同圆或等圆的半径相等.

(5)在同圆或等圆中能重合的弧叫做等弧.

同圆是指同一个圆;等圆、同心圆都是指两个圆的关系.同圆是圆心确定且半径也确定的一个圆.等圆是圆心不同而半径相等的一些圆,而同心圆指的是圆心相同的一些圆之间位置关系的特例.

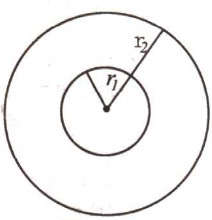

图 1-4

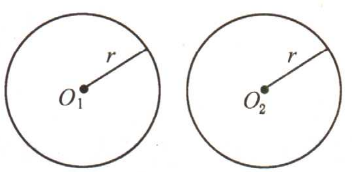

图 1-5

知识点4:过三点的圆.

(1)定理:不在同一直线上的三个点确定一个圆.

等弧是指度数相等而长度也相等的两条弧，必须在同圆或等圆中.但度数相等的弧不一定是相等的弧.

例1 过一点可作无数多个圆.

分析 如图1-6中以不同于P点的任一点都可以为圆心，以这点到点P的距离为半径的圆都满足条件.

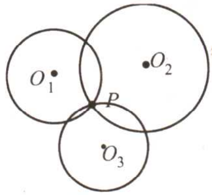

图 1-6

作圆的关键要由圆心的位置和半径的大小来确定.经过两点能作圆，而这个圆的圆心就在连结这两点线段的中垂线上.例如过AB两点的圆的圆心在线段AB的垂直平分线上.

例2 过平面上的A、B两点作无数多个圆.

分析 如图1-7，只要以线段AB的垂直平分线上任意一点为圆心，以这点到点A或点B的距离为半径就可以作圆.

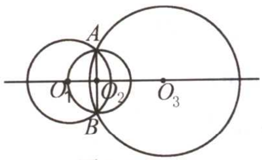

图 1-7

三角形的外心也是它外接圆的圆心，是三角形三边的垂直平分线的交点，它到三角形各顶点的距离相等.

(2)经过三角形各顶点的圆叫做三角形的外接圆，外接圆的圆心叫三角形的外心，这个三角形叫做这个圆的内接三角形.

特别要注意不是只要过三点都可以作圆，在过同一直线上的三点就不能作圆.过一点可作无数个圆，过两点也可作无数个圆.

知识点5:垂直于弦的直径.

(1)圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴，圆心是它的对称中心.

不能简单地说直径是圆的对称轴.直径是线段，而对称轴是直线，可以说成每条直径所在的直线是圆的对称轴.

(2)垂径定理:垂直于弦的直径平分这条弦并且平分弦所对的两条弧.如图1-8，垂径定理还可以表示为:

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{过圆心}O\\CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AE=BE\\\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right.$$

这个定理理解为:若有一条直线既过圆心又垂直于一条弦，则它必平分这条弦，并且平分这条弦所对的优弧(或劣弧).

(3)垂径定理的推论

推论1　①平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧.如图1-8,这个推论表示为:

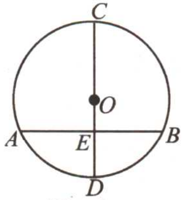
图1-8

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{过圆心}O\\ CD\text{平分}AB\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}CD\perp AB\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$$

②弦的垂直平分线经过圆心,并且平分弦所对的两条弧.如图1-8表示为:

$$\left.\begin{array}{l}CD\perp AB\\ CD\text{平分}AB\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}CD\text{过圆心}O\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$$

③平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦,并且平分弦所对的另一条弧.如图1-8表示为:

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{过圆心}\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}CD\perp AB\\ CD\text{平分}AB\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$$

$$\text{或}\left.\begin{array}{l}CD\text{过圆心}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}CD\perp AB\\ CD\text{平分}AB\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{cases}$$

推论2　圆的两条平行弦所夹的弧相等.

已知:如图1-9,在⊙O中,弦$AB\parallel CD$,

求证:$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明:作直径$EF\perp AB$.

$\because EF\perp AB\ \ AB\parallel CD\ \ \therefore EF\perp CD$

$\because EF$为直径 $\therefore \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$ $\because EF\perp AB$

EF为直径 $\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$ $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$

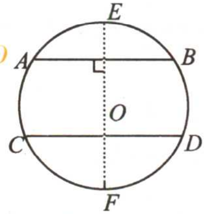
图1-9

在下列五个条件中

①CD过圆心O
②$CD\perp AB$
③CD平分AB
④$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$
⑤$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$

除条件①外,要求被平分的弦不是直径,只要给出其中两个条件就能推出另外三个条件.

垂径定理是圆中比较重要的定理之一,它沟通了线段、角与圆弧的关系,解题时常构造直角三角形,与勾股定理和解直角三角形知识相结合.在解与圆的有关题目时,常用的辅助线是过圆心向弦作垂线段,这为解题创造条件.

推论2中的弦一定要是平行弦,这样所夹的弧才相等,但它的逆命题不成立.

如图1-10,$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$,但$AB$与$CD$不平行.

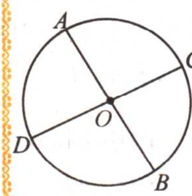
图1-10

典题探究

例 1 下面语句中正确的是 ( )

A 平分一条直径的弦必垂直于这条直径

B 经过圆心的每一条直线都是圆的对称轴

C 长度相等的弧是等弧

D 弦的垂线必经过这条弦所在圆的圆心

分析 A是错误的，平分一条直径的弦也是一条直径，两直径不一定互相垂直；B是正确的；C是错误的，等弧要求弧的长度相等，弧的度数也要相等；D是错误的，弦的垂线要平分这条弦才能过圆心.

解 选B

例 2 ⊙O的半径为5cm，弦AB=6cm，CD=8cm，且$AB//CD$，则两弦之间的距离为(C)

A 1cm　　B 7cm

C 1cm 或 7cm　　D 不能确定

解 本题有两种情形

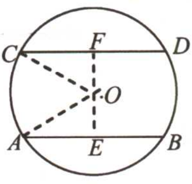

图 1-11

(1) 当AB、CD在圆心O的两侧时，(如图1-11)，过O点作直线$EF \perp AB$于E，交CD于F，连结OA，OC. ∵ AB=6cm，CD=8cm ∴AE=3cm，CF=4cm 在 Rt△OAE 与 Rt△OCF中 $OA^2=OE^2+AE^2$，$OC^2=OF^2+CF^2$，

∴ $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=$ 4cm $OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-4^2}=$ 3cm，∴ $EF=OE+OF$=4cm+3cm=7cm

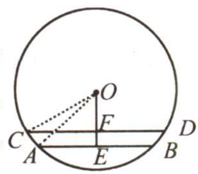

图 1-12

点拨与发散

本例是以选择题形式出现的阅读理解题，覆盖的知识点多，极易选错，要求学生准确理解数学概念.

考考你：下列语句正确的有 ( )

A 直径是圆的对称轴

B 平分弦的直径垂直于弦

C 若两条弦所夹的弧相等，则这两条弦平行

D 三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等

答案：选D

在解与圆内两条平行弦间的距离的有关问题时，应注意考虑两平行弦在圆心的同侧或异侧两种可能的情形.要特别注意：进行分类讨论.

看看下面同类拷贝题：

已知⊙O半径为15cm，弦$PQ//MN$，且PN=18cm，MN=24cm，则以两平行弦为底的梯形的面积是____.

答案：63cm² 或 441cm².(提示：(两弦PQ、MN可能在圆心两侧，也可能在圆心的同侧).

(2)当AB、CD在圆心O的同侧时(如图1-12),同理可求得AB、CD的距离为1cm.

$\therefore$ AB和CD的距离为7cm 或1cm,应选C.

例3 如图1-13,AB是$\odot O$直径,P是OA上的一点,弦MN过点P,且$AP=2$,$OP=3$,$MP=2\sqrt{2}$,那么弦心距OQ的长为　　　　(　　)

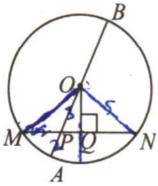

图1-13

解 连结OM $\because$ $AP=2$,$OP=3$

$\therefore$ $OA=5$, $\therefore$ $OM=OA=5$, 在 Rt$\triangle OPQ$中$PQ=\sqrt{PO^2-OQ^2}=\sqrt{3^2-OQ^2}=\sqrt{9-OQ^2}$,在Rt$\triangle OMQ$中$MQ=\sqrt{OM^2-OQ^2}=\sqrt{5^2-OQ^2}=\sqrt{25-OQ^2}$. $\because$ $MQ=MP+PQ$, $\therefore$ $\sqrt{25-OQ^2}=2\sqrt{2}+\sqrt{9-OQ^2}$.

$\therefore$ $OQ^2=7$, $\because$ $OQ\geqslant 0$. $\therefore$ $OQ=\sqrt{7}$.

例4 如图1-14,在矩形$ABCD$中,$AB=8$cm,$AD=6$cm,若以A为圆心作圆,使B、C、D三点中至少有一点在圆内,且至少有一个点在圆外,求$\odot A$的半径r的取值范围.

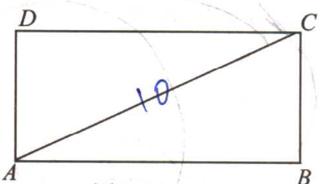

图1-14

解 在Rt$\triangle ABC$中

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$cm,

而$AB=8$cm,$AD=6$cm

$\therefore$ 点D在$\odot A$内,$r>6$cm

点C在$\odot A$外,$r<10$cm

$\therefore$ 6cm$<r<$10cm

例5 已知圆内接$\triangle ABC$中,$AB=AC$,圆心O到

利用垂径定理求半径.弦长、圆心到弦的距离及解形如Rt$\triangle OMQ$的直角三角形是近几年来中考的主要题型.

考考你:$\odot O$的半径为5,弦AB的长为6,则弦心距OC的长度为____.

答案:填上4.(提示:连结OA,构成垂径定理和直角三角形来解).

关键要计算出A离B、C、D三点的距离,离点A最近的点在圆内,与点A最远的点在圆外.考虑点和圆的位置关系,应先比较点与圆心的距离d与半径r之间的关系.

科学的探讨和研究,其本身就含有至美,其本身给人的愉快就是报酬;所以我在我的工作里面寻得了快乐.

——居里夫人

BC距离为1cm，圆的半径为4cm，求腰AB.

此题是分类讨论题，题中圆内接$\triangle ABC$可能是锐角三角形，也可能是钝角三角形，这样，三角形外接圆的圆心若是锐角三角形时，外心应在三角形内；若是钝角三角形时，外心应在三角形外.

解 此题分两种情况

(1)如图1-15(1) 圆心O在$\triangle ABC$内时，过点A作$AD\perp BC$于D，连结OB

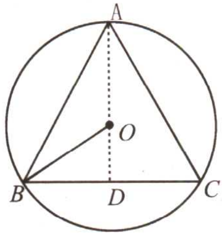

图 1-15(1)

$\because AB=AC$，

$\therefore BD=DC$，

$\therefore AD$过圆心O，

$\therefore AD=AO+OD=4+1=5\text{cm}$

在 Rt$\triangle OBD$中 $BD^2=OB^2-OD^2=4^2-1^2=15$，

在 Rt$\triangle ABD$中

$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{5^2+15}=\sqrt{25+15}=2\sqrt{10}$ cm.

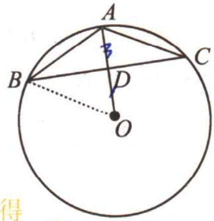

图 1-15(2)

(2)如图1-15(2) 圆心O在$\triangle ABC$外时，同理可得AD过圆心O

$\therefore AD=OA-OD=4-1=3\text{cm}$，$BD^2=15$

在Rt$\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{9+15}=2\sqrt{6}$ cm.

答：腰AB的长为$2\sqrt{10}$ cm 或$2\sqrt{6}$ cm.

注意挖掘题中存在的各种情况，进行分类讨论完善解题过程.

思维跨越

名师指路

例1 如图1-16AB，是$\odot O$的直径，CD为弦，$AB=10\text{cm}$，$CD=6\text{cm}$，求A、B到直线CD距离之差的绝对值.

过点O作CD的垂线后，可充分应用垂径定理和三角形中位线定理.

要努力把圆和直线形相结合，把圆内的问题化为直线形问题，提供新的解题思路，而在与解圆相关问题时，常用直线形的知识与方法；主要指全等与相似.

解 作$AE\perp CD$于E，$BF\perp CD$于F连结EO并延长交BF于G，

$\because AE\perp CD$，$BF\perp CD$，

$\therefore AE /\!/ BF$.

$\therefore \angle OAE=\angle OBG$，

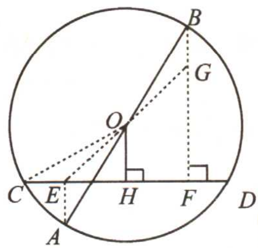

图1-16

$\angle OEA=\angle OGB$,

又 $\because$ $OA=OB$,

$\therefore$ $\triangle OAE\cong\triangle OBG$,

$\therefore$ $AE=BG$, $OE=OG$, $\therefore$ $GF=|BF-BG|=|BF-AE|$.

再过点O作$OH\perp CD$于H,连结OC

又$\because OH\perp CD$, $BF\perp CD$, $\therefore$ $OH/\!/GF$.

在Rt$\triangle OCH$中,$OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$cm.

$\therefore$ $GF=2OH=8$cm $\therefore$ $|BF-AE|=GF=8$cm.

例2　一条30米宽的河上架有一半径25米的圆弧形拱桥,请问一顶部宽6米,且高出水面4米的船能否通过此桥,并说明理由.

解　假定该船恰能通过桥时,桥的半径为r　如图1–17,AB表示能通过的拱桥,EF为船宽,CD为船顶到水面的距离,设$OC=x$,(O为圆心)

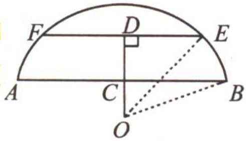

图 1–17

在Rt$\triangle OBC$中　$r^2=15^2+x^2$　①,在Rt$\triangle ODE$中 $r^2=(4+x)^2+3^2$　②,由①②求得$r=5\sqrt{34}>25$.

即船恰能通过时,桥的半径为$5\sqrt{34}$米,而桥的半径为25米,所以该船不能通过此桥.

因垂径定理涉及垂直关系就可出现与半径相关的直角三角形,因而在圆中常作弦心距或连结半径作为辅助线,然后用垂径定理来解.

例3　如图1–18　某渔船由西向东航行,在A处望见C在北偏东60°,前进6海里到B点,测得该岛在北偏东30°,已知在该岛周围6海里内有暗礁,问如果继续向东航行,有无触礁危险?请说明理由.

解　解法一:如图1–18,过C作$CD\perp AB$于D,由题意得$\angle\alpha=60°$,$\angle\beta=30°$,$\therefore\angle1=30°$,$\angle2=60°$.设$CD=x$,在Rt$\triangle CAD$,中$AD=CD\cdot\cot30°=\sqrt{3}x$,在Rt$\triangle CBD$中,

$BD=CD\cdot\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

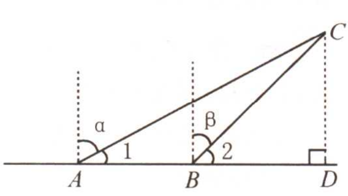

图1–18

$\because AB=AD-BD$，$\therefore \sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}x=6$，解得$x=3\sqrt{3}$，$\because x^2=27<6^2$

$\therefore 3\sqrt{3}<6$ $\therefore$ 船有触礁危险.

解法二：由题意，得$\angle\alpha=60°$ $\angle\beta=30°$，$\therefore \angle1=30°$，$\angle2=60°$，$\therefore \angle ACB=\angle\alpha-\angle\beta=60°-30°=30°$，$\therefore \angle1=\angle BCA$，$\therefore BC=AB=6$(海里)，$\therefore$ 点C到AB的距离必小于6海里，因此船有触礁危险.

例4 如图1-19，AB为$\odot O$的直径，CD是弦，$AE\perp CD$于E，$BF\perp CD$于F，交$\odot O$于G，甲(1)求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DG}$，　(2)若$\odot O$的半径为5cm，$AE$=1cm，$BF$=7cm 求$EC$的长度.

> 通过作辅助线构成直角三角形和梯形的中位线，充分应用垂径定理、在同圆中平行线所夹的弧相等.

解　(1)证明：连结AG $\because AB$是$\odot O$的直径

$\therefore \angle AGB=90°$　又 $\because BF\perp CD$

$\therefore AG /\!/ CD$　$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DG}$

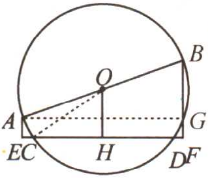

图 1-19

(2)解：$\because AG\perp BF$，$BF\perp CD$，$AE\perp CD$.$\therefore$ 四边形$AEFG$是矩形.

$\therefore AE=GF=1$cm，$EF=AG$.

又$\because BF=7cm$，　$\therefore BG=BF-GF=7-1=6$cm，

在Rt$\triangle ABG$中　$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$cm，

$\therefore EF=AG=8$cm，　又$\because OH\perp EF$　，O是AB中点

$\therefore OH$是梯形$AEFB$的中位线，

$\therefore OH=\frac{1}{2}(AE+BF)=\frac{1}{2}(1+7)=4$cm，$EH=\frac{1}{2}EF=4$cm，

在 Rt$\triangle OCH$中，$CH=\sqrt{OC^2-OH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$cm

$\therefore EC=EG-CH=4-3=1$cm

> 在解题时，要认真分析，仔细观察题目中所涉及到的知识点，抓住题中重点，联想和运用所学的知识来解决实际问题.

中考链接

例1 (2003·北京)如图 1-20，AB是$\odot O$的直径，弦$CD\perp AB$，垂足为E，如果$AB=10$，$CD=8$，那么AE的长为　　　　(　　)