贵州省高等学校民族预科教材编写委员会 编

贵州省高等学校民族预科教材

MZYKJC

SHUXUE

数学

贵州民族出版社

贵州省高等学校民族预科教材
编 写 委 员 会

前　言

高等学校民族预科是我国高等教育的特殊层次，是民族高等教育的重要组成部分。举办该层次教育是党的民族政策的具体体现。党和政府历来重视发展高等学校民族预科教育，通过这一特殊措施更多地为边远民族地区培养较高层次人才。中共贵州省委、贵州省人民政府十分关心民族教育的发展，在2000年召开的全省民族工作会议上，对发展贵州高等学校民族预科教育提出了明确要求。贵州省教育厅、贵州省民族宗教事务委员会制定了贵州省“十五”期间高等学校民族预科教育发展规划，要求加强管理，全面提高教育质量。

当前，贵州省高等学校民族预科教学中存在的一个重要问题就是教材的不适应性和滞后性。主要表现为：其一，现行教材是全国统编教材，缺乏地域和民族特点的针对性，难以切合贵州的实际需要。其二，现行教材已使用5年，其中某些章节内容已明显不适应教学的新需要。在素质教育思想引导下，各层次教育教学内容、教学方式都在进行巨大改革，贵州省高等学校民族预科教材的更新势在必行。

在2000年贵州省高等学校民族预科教育座谈会上，来自全省承担此项工作任务的各高等学校代表一致提出，应重新组织编写一套适用于贵州省高等学校民族预科教育需要的新教材。经贵州省教育厅、贵州省民族宗教事务委员会研究，决定组织编写《阅读与写作》、《数学》、《英语》三种教材，并成立了教材编写委员会，要求所编教材具有科学性、新颖性、民族性及地方性等特点，旨在提高高等学校民族预科学生的综合基础素质，适应新世纪高等学校民族预科教育的要求。

高等学校民族预科教材的编写在贵州省尚属首次，这是我们联系贵州省高等学校民族预科教育的实践，从该层次教育在民族教育及国家教育体系中的特殊重要地位和作用出发而作出的尝试，希望对贵州省高等学校民族预科教育的进一步改革和发展起到积极的推动作用。

由于编写时间匆促，加上资料、经验不足等原因，教材中难免存在缺点乃至错误，希望大家多提宝贵意见，以便今后修订，不断提高质量。

贵州省高等学校民族预科教材编写委员会

2001年8月

目　录

第一章 集合、综合除法、余式定理及部分分式

第一节 集 合

集合论是近代数学最基本的内容之一，研究的内容非常广泛，它不仅可以用字母表示数、点、图形、向量、线性变换等多种研究的对象，并将研究的各种对象联系和统一起来，还可以用字母的运算表达它们的演变，从字母代数的研究中抽出其共同规律，解决各种问题.

一、集合的概念

我们来研究下面几组对象：

(1) 1,2,3,4,5 ；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上所有的点；

(3) 所有的直角三角形；

(4) 某班级的全体同学；

(5) 组成 APC 药片的药物成分.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些人、一些物质组成的. 我们把这些对象的全体看成一个整体就构成了一个**集合**(简称**集**). 一般地，所谓集合是指具有某种特定性质的事物的全体. 组成这个集合的每个对象称为该集合的**元素**. 例如，(1)是由数 1,2,3,4,5 组成的集合，其中的对象 1,2,3,4,5 都是这个集合的元素；(5)是由 APC 药片的成分组成的集合，其中的对象阿司匹林、非那西汀、咖啡因都是这个集合的元素. 集合通常用大写的拉丁字母 A，B，M，N…表示；集合的元素用小写的拉丁字母 a，b，c，d…等表示.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**. 上面的(1)、(4)、(5)三个集合都是有限集；含有无限

个元素的集合叫做**无限集**，上面的(2)、(3)两个集合都是无限集．只含有一个元素的集合称为单元素集，如$\{a\}$．不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$．

如果a是集合A的元素，就记作$a\in A$(读作a属于A)；如果a不是集合A的元素，就记作$a\notin A$或$a\overline{\in}A$(读做a不属于A)．

例如，$A=\{a,b,c,d\}$，那么$c\in A$而$e\overline{\in}A$．

由此可见，集合和它的元素之间是从属关系，集合含有它的每一个元素，它的每一个元素都属于这个集合．

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．这就是说，对于任何一个对象，都能够确定它是不是这个给定集合的元素．例如：由所有直角三角形组成的集合，则内角分别为30°、60°、90°的三角形是这个集合中的元素，而内角分别为50°、60°、70°的三角形就不是这个集合的元素．

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．这就是说，在同一个集合里不能重复出现同一个元素，相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合里的一个元素．因此，集合中的元素是不能重复出现的．

对于一个给定的集合，集合中的元素是无顺序关系的．这就是说，集合中元素之间的顺序可以不必考虑．

表示集合的常用方法有：列举法及描述法等．有限集合主要用列举法，而无限集合常用描述法表示．所谓列举法就是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示的方法．描述法就是把集合中元素的共同属性用语言或表达式描述出来，写在大括号内表示的方法．

例如，由有限数1,2,3,4,5组成的集合用列举法可表示为$\{1,2,3,4,5\}$．由所有直角三角形组成的集合，用描述法可表示为{直角三角形}．由抛物线$y=x^2$上所有点的坐标组成的集合可表示为$\{(x,y)\mid y=x^2\}$．括号内竖线的左方写上这个集合的代表元素，竖线的右方写上这个集合元素的共同特征．再如由不等式$x-3>2$的所有解组成的集合可以表示为$\{x\mid x-3>2\}$．

列举法和描述法是两种不同的表示集合的方法，应用时要看具体问题而定．有些集合可用两种方法表示，而有的集合只能用其中的一种．如集合$\{-4,0,3,4\}$就不宜用描述法表示，而集合$\{x\mid -1<x<2\}$则不能用列举法表示．

例1　用适当的方法把下列集合表示出来：

(1) 太阳系九大行星．

解　用列举法表示为

$A=${水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星}．

(2) 不等式 $x+4>1$ 的解集.

解 用描述法表示为

$$B=\{x\mid x>-3\}.$$

(3) 由 $-1,0,0.5,2,3$ 组成的集合.

解 用列举法表示为

$$C=\{-1,0,0.5,2,3\}.$$

(4) 平面上两条不重合的平行直线的交点.

解 描述法表示为

$$M=\varnothing.$$

通常,全体自然数组成的集合简称自然数集,记作 **N**;全体整数组成的集合简称整数集,记作 **Z**;全体有理数组成的集合简称有理数集,记作 **Q**;全体实数组成的集合简称实数集,记作 **R**.

对于两个给定的集合 A 和 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 中的元素,那么,我们就说集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 包含于 B,而集合 B 不包含于 A,就说集合 A 是集合 B 的真子集,记为 $A\subset B$.

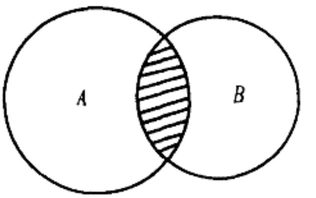
如果集合 A 与 B 有 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$ 的关系,就说集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

二、集合的交集、并集与补集

1. 交集与并集

由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A\cap B$(读作"A 交 B"),即有

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}.$$



$A\cap B$

图 1-1

图 1-1 的阴影部分表示 A 和 B 的交集.

例 2 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{a,c,e,f\}$,则 $A\cap B=\{a,c\}$.

例 3 已知 $A=\{x\mid x>-2\}$,$B=\{x\mid x<3\}$,求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid>-2\}\cap\{x\mid<3\}$

$$=\{x\mid -2<x<3\}.$$

如图 1-2.

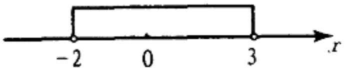


图 1-2

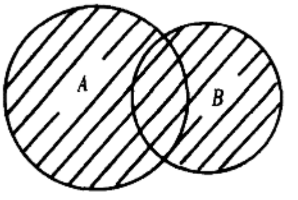
可见,$A\cap B$ 就是以这两个不等式组成的不等式组

的解集.

由所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$（读作"A 并 B"），即有

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

图 1－3 的阴影部分表示 A 和 B 的并集.



AUB

图 1－3

例 4 设 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid 1<x<3\}$ 求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}$

$=\{x\mid -1<x<3\}$.

例 5 设 $A=\{3,5,6,8\}$，$B=\{4,5,7,8\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

2、**补集**

在研究集合与集合之间的关系时，如果这些集合都是某一给定集合的子集，这个给定的集合就称为全集，用符号 I 表示. 也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素.

如果已知全集为 I，且集合 $A\subseteq I$，则 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记为 $\bar{A}$（读作"A 补"），即有

$\bar{A}=\{x\mid x\in I$，且 $x\notin A\}$，

图 1－4 的阴影部分表示集合 A 在集合中 I 的补集.

例 6 如果 $I=\{-1,1,2,3\}$，$A=\{-1,2\}$，则 $\bar{A}=\{1,3\}$.

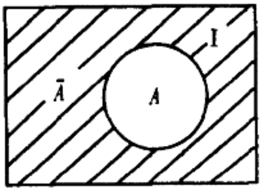


图 1－4

由交集、并集、补集的定义可知，对于任何集合 A、B，有如下性质：

$A\cap A=A$ $\quad$ $A\cap B=B\cap A$ $\quad$ $A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cup A=A$ $\quad$ $A\cup B=B\cup A$ $\quad$ $A\cup\varnothing=A$

$A\cup\bar{A}=I$ $\quad$ $A\cap\bar{A}=\varnothing$ $\quad$ $\bar{\bar{A}}=A$

其中 $\bar{\bar{A}}$ 表示 $\bar{A}$ 在 I 中的补集.

例 7 设 $A=\left\{x\mid -4<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$，$B=\{x\mid x\leqslant -4\}$

求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$

解 $A\cap B=\left\{x\mid -4<x<-\dfrac{1}{2}\right\}\cap\{x\mid x\leqslant -4\}=\varnothing$.

$$A\cup B=\left\{x\,|\,-4<x<-\frac{1}{2}\right\}\cup\{x\,|\,x\leqslant-4\}$$
$$=\left\{x\,|\,x<-\frac{1}{2}\right\}.$$

例 8 设 $I=\{实数\}$, $A=\{x\,|\,x^2+3x+2<0\}$, 求 $\bar{A}$

解 因为 $A=\{x\,|\,x^2+3x+2<0\}$
$$=\{x\,|\,-2<x<-1\}.$$

所以 $\bar{A}=\{x\,|\,x\leqslant-2\}\cup\{x\,|\,x\geqslant-1\}$
$$=\{x\,|\,x\leqslant-2 \text{ 或 } x\geqslant-1\}.$$

三、集合的运算规律

以上我们讨论了两个集合的交与并,这两个概念都可以推广到有限个集合的情形.

设有 n 个集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$,它们的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 分别定义为

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n$$
$$=\{x\,|\,对于每一个\ i\leqslant n,都有\ x\in A_i\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$$
$$=\{x\,|\,对于某个\ i\leqslant n,使\ x\in A_i\}$$

例 9 设 $A_i=\left\{x\,|\,0\leqslant x<1+\frac{1}{i}\right\}(i=1,2,3,\cdots,n)$则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x\,|\,0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\}.$$

例 10 设 $B_i=\{i,i+1\}(i=1,2,3,\cdots,n)$则

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\{1,2,3,\cdots,n+1\}.$$

由集合交、并定义,我们可以推出以下运算规律:

1. 交换律

$$A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A;$$

2. 结合律

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$

3. 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

一般有

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i),$$

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i);$$

4. 对偶律

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B},\quad \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B};$$

一般有

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

以上等式可以用两集合相等的定义来证明.

例 11 证明$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

证明 设 $x\in\overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,

因此 $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 换句话说即

$x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}$ 这就是说

$x\in(\bar{A}\cap\bar{B})$这就证明了

$$\overline{A\cup B}\subseteq(\bar{A}\cap\bar{B}). \tag{1}$$

反之,如果 $x\in\bar{A}\cap\bar{B}$,则 $x\in\bar{A}$ 且$x\in\bar{B}$.

因此 $x\notin A$ 且$x\notin B$,即 $x\notin A\cup B$.

那么 则 $x\in\overline{A\cup B}$,这就证明了

$$\overline{A\cup B}\supseteq(\bar{A}\cap\bar{B}). \tag{2}$$

由(1),(2)式,我们得到等式

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}.$$

例 12 证明 $A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$.

证明 设 $x\in A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)$,则 $x\in A$ 且$x\in\bigcup_{i=1}^{n}B_i$,由此可知

$x\in A$ 且有 $i_0\leqslant n$ 使$x\in B_{i_0}$.因而有 $x\in A\cap B_{i_0}$,从而有 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$.

因此 $$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i). \tag{1}$$

另设 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)$，则有 $i_0\leqslant n$ 使 $x\in A\cap B_{i_0}$. 从而有 $x\in A$ 且 $x\in B_{i_0}$，故有 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$，

即 $x\in A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)$.

因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A\cap B_i)\subseteq A\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i)$. (2)

由(1),(2)式，得出所证：

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i).$$

四、绝对值及其性质、区间、邻域

1. 绝对值及其性质

设 x 为一实数，x 的绝对值定义为：如果 x 是正数，那么 x 的绝对值就是本身 x；如果 x 是负数，那么 x 的绝对值就是 $-x$；零的绝对值仍然是零. x 的绝对值记为 $|x|$，即

$$|x|=\begin{cases}x & (\text{当 } x\geqslant 0)\\ -x & (\text{当 } x<0)\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义：在数轴上，$|x|$ 表示点 x 与原点 0 之间的距离. 由 x 的绝对值定义，可得出下列性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$； (2) $|x|\geqslant 0$；

(3) $|-x|=|x|$； (4) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

另外，它还具有下列等价关系

$$|x|\leqslant a\ (a>0)\text{等价于 } -a\leqslant x\leqslant a.$$

这就是说，如果 $|x|\leqslant a\ (a>0)$，就有 $-a\leqslant x\leqslant a$，反之如果 $-a\leqslant x\leqslant a$，就有 $|x|\leqslant a$.

从几何意义上看，关系是很清楚的，因为 $|x|\leqslant a$，表示数轴上点 x 与原点 0 之间的距离不超过 a，即 $|x|\leqslant a$.

绝对值具有以下运算性质：

(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. 即和的绝对值不大于各项绝对值的和.

(2) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$. 即差的绝对值不小于各项绝对值的差.

(3) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$. 即积的绝对值等于各项绝对值的乘积.

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$. 即商的绝对值等于被除数的绝对值与除数绝对值的商.

2. 区间

介于某两个实数之间的所有实数的集合叫做区间，这两个实数叫区间的端点.

如设 a,b 为实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合叫做开区间，记为 (a,b)，如图 1－5.

即　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合叫做闭区间，记为 $[a,b]$. 如图 1－6.

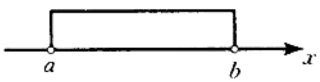


图 1－5

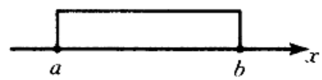


图 1－6

即　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合叫做半开半闭区间，记为 $(a,b]$ 或 $[a,b)$，如图 1－7(a)、1－7(b).

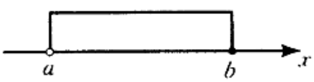


图 1－7(a)

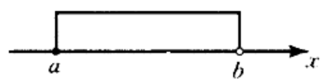


图 1－7(b)

另外还有几类无限区间，其符号和意义如下：

$(-\infty,+\infty)$ 表示所有实数的集合，即 $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<\infty\}$

$(a,+\infty)$ 表示大于 a 的所有实数的集合，即 $(a,+\infty)=\{x\mid a<x<\infty\}$

$(-\infty,a)$ 表示小于 a 所有实数的集合，即 $(-\infty,a)=\{x\mid -\infty<x<a\}$

同样还可以定义 $[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 等符号的意义.

注意：$-\infty$，$+\infty$ 分别读作“负无穷大”，“正无穷大”，不能把它们看作一个具体的数.

3. 邻域

设实数 x_0,δ，且 $\delta>0$. 在数轴上，以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的一切实数 x 的集合，称为点 x_0 的 δ 邻域，x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 如图 1－8.

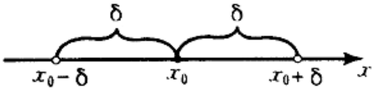


图 1－8

例 13　用不等式和开区间表示出 2 的$\frac{1}{2}$邻域.

解　不等式为$|x-2|<\frac{1}{2}$,即$-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$

则$2-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}+2$,即$1.5<x<2.5$

所以开区间为$(1.5,2.5)$.

点 x_0 的 δ 邻域内去掉 x_0,剩下的点组成的集合,叫做点 x_0 的 δ 去心邻域,可表示为

$$0<|x-x_0|<\delta$$

习　题　1-1

1. 填空题:

设集合 $M=\{a,b,c,d\}$,$N=\{c,b,e,f\}$则

$M\cup N=$__________;　　$M\cap N=$__________;

$(M\cup N)\cap N=$__________;　　$M\cup(N\cap M)=$__________;

$(M\cup N)\cup N=$__________;　　$(M\cap N)\cap M=$__________.

2. 选择题(四个答案中只有一个符合题意):

(1)设 $x=\{a,b,c\}$,$y=\{b,c,d\}$,$z=\{c,e\}$则集合是$(x\cup y)\cap z$ 是(　　).

(A)$\{a,b,c\}$　　(B)$\{d,c\}$　　(C)$\{e,c,d\}$　　(D)$\{a,b,c,d\}$

(2)设 M 为奇数集,N 为偶数集,Z 为整数集,则集合$(M\cap N)\cap Z$ 是(　　).

(A)M　　(B)N　　(C)Z　　(D)$\varnothing$

(3)设集合 $M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 10\}$,$N=\{x|x>7$ 或 $x<1\}$则 $M\cap N$ 是(　　).

(A)$\{x|7\leqslant x\leqslant 10\}$　　(B)$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$或$\{x|7<x\leqslant 10\}$

(C)$\{x|-1\leqslant x\leqslant 10\}$　　(D)$\{x|1\leqslant x\leqslant 10\}$

3. 解答题:

(1)设 $A=\{x|-2<x<1\}$,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,求 $A\cup B$.

(2)设 $A=\{x|-2<x<3\}$,$B=\{x|1<x<5\}$,求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$.

第二节　综合除法

一、综合除法

综合除法是多项式除法运算的一种简便算法,实质上是分离系数法通过变形发展的结果.

设 $f(x)$和 $g(x)$都是多项式,且 $f(x)$的次数不低于 $g(x)$的次数,而 $g(x)\neq 0$.

当 $f(x)$除以 $g(x)$得商 $q(x)$和余式 $r(x)$时,则

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}. \tag{1}$$

即

$$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x). \tag{2}$$

成立.其中 $q(x)$的次数是 $f(x)$与 $g(x)$的差,$r(x)$的次数低于 $q(x)$的次数.

显然,当 $f(x)$能够被 $q(x)$整除时,$r(x)=0$.对于多项式乘法,我们已很熟悉,采用分离系数法可使运算简便.对多项式除法我们也可采用分离系数法来进行.

注意:多项式除多项式时,被除式与除式都要按降幂排列,凡缺项都用"0"补上.

例 1　求 $f(x)=2x^4+5x^3-24x^2+15$ 除以 $g(x)=x-2$ 的商及余式.

解　将 $f(x)$按降幂排列,缺项用 0 补上,并将其系数分离出来.

$$\begin{array}{r|l}
2+5-24+0+15 & 1-2 \\ \cline{2-2}
-)\ 2-4\qquad\qquad\quad & 2+9-6-12 \\ \hline
9-24\qquad\quad & \quad\text{(商式)} \\
-)\ 9-18\qquad\quad & \\ \hline
-6+0\qquad & \\
-)\ -6+12\qquad & \\ \hline
-12+15 & \\
-)\ -12+24 & \\ \hline
-9 & \quad\text{(余式)}
\end{array}$$

因为其商的最高次幂为 3,所以

$$\frac{2x^4+5x^3-24x^2+15}{x-2}=(2x^3+9x^2-6x-12)-\frac{9}{x-2}.$$

为使除法格式书写更简单一些,我们进一步讨论被除式、除式、商以及余式间的系数关系.

设多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

除以 $x-a$ 所得的商是

$$q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0\quad(b_{n-1}\neq 0)$$

余数是 r，下面用待定系数法来确定 $q(x)$中的系数与余数 r：

由(2)得

$$f(x)=(x-a)q(x)+r,\tag{3}$$

即

$$\begin{aligned}&a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\&=(x-a)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)+r\\&=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-ab_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(b_0-ab_1)x+(r-ab_0)\end{aligned}$$

上式为恒等式，两边 x 的同次项系数相等，即

$$\begin{aligned}&a_n=b_{n-1},\\&a_{n-1}=b_{n-2}-ab_{n-1},\\&\cdots\cdots\\&a_1=b_0-ab_1,\\&a_0=r-ab_0.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&b_{n-1}=a_n,\\&b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\\&\cdots\cdots\\&b_0=a_1+ab_1,\\&r=a_0+ab_0.\end{aligned}$$

把这一计算过程列成竖式：

$$\begin{array}{cccccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a\\ +) & & ab_{n-1} & \cdots & ab_1 & ab_0 & \\ \hline & b_{n-1} & a_{n-1}+ab_{n-1} & \cdots & a_1+ab_1 & a_0+ab_0 & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & r & \end{array}\tag{4}$$

例 2　求 $f(x)=2x^4+5x^3-24x^2+15$ 除以 $x-2$ 的商及余式.