名师导学

初中数学综合讲座

吕学礼 主编
明知白 副主编

北京工业
版

名师导学

初中数学综合讲座

主　编　吕学礼
副主编　明知白

北京工业大学出版社

内容简介

本书全面、深入地讨论了初中数学中一些重要的，特别是带有综合性的问题. 对初中数学基础知识，既复习又巩固，又综合运用；对初中数学技巧方法，既说明思路，又广为举例. 本书总结了作者几十年的丰富教学经验，对一些重要问题和重要的解题方法做了详尽而深入的阐述，这是单纯按照课本顺序依次学习所不能获得的. 最后两章是综合题的解法，综合了解综合题的各种主要思路，并且介绍了一批国内各地区中考试题及其解法，对提高学生的数学能力和应试能力很有帮助. 本书是一本很好的供初中学生复习数学时使用的读物.

本书主编是著名的中学数学教材专家，参加了 1954 年至 1980 年期间历届中学数学教学大纲的起草工作，参加了 1954 年至今人民教育出版社出版的历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作. 其他编著者也都是著名教师，有丰富的教学经验和写作经验.

名师导学

初中数学综合讲座

主　编　吕学礼

副主编　明知白

*

北京工业大学出版社出版发行

各 地 新 华 书 店 经 销

世界知识印刷厂印刷

*

1993年8月第1版　1996年2月第5次印刷

787×1092毫米32开本　14.25印张　313千字

印数：68001～99000册

ISBN 7－5639－0297－X/G·156

定价：13.00元

(京)新登字 212 号

编著者简介

主　编：吕学礼

副主编：明知白

其他编著者（按笔划排序）：李浩明　张春条　陈　汶
陆　乘　郑学遐　贺信淳

吕学礼　1919年生，上海青浦人. 1942年毕业于上海交通大学数学系.

历任中学数学教员，上海交通大学数学系助教、讲师，人民教育出版社数学室编辑、编审. 参加1954年至1980年期间历届中学数学教学大纲的起草工作. 参加1954年以来历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作.

编著有《中学数学教学一得集》、《中学数学实际问题选》、《中学数学实用题解》、《初中数学应用例解》、《平面向量和空间向量》、《代数矩阵与几何变换浅说》等；合著有《分角线相等的三角形(初等几何机器证明问题)》、《初级计算机原理和使用》、《BASIC语言——电子计算机初步知识(高中数学选用教材》等；合译有《计算机程序设计Logo语言》等.

明知白　1938年生，湖南临澧人，1957年至1963年就读于北京大学数学系，毕业后在北京女二中任教近20年，后调北京东城区中学教研室，从事数学教学研究工作. 现任东城区教研科研中心教研员，北京市特级教师，中国数学奥林匹克高级教练，中国数学会普委会《中学生数学》编委.

在负责东城区的数学教学、科研与课外活动的同时，还参与了国家教委、人民教育出版社、北京市教研部、北京市数学会的多项课题研究与教材编写工作，如国家教委组织的《初中数学教学指导书》和

人教社《高中数学试验课本》的编写，北京市《高中数学总复习》与《数列与极限》、《不等式》的编写与"数学教学与思维训练"课题的研究. 先后在《数学通报》等报刊上发表文章百余篇，著书(主编或合编)十余部，如《高中数学八十讲》;《数列求和》、《高中数学精要》、《数学奥林匹克解题研究》、《初等数学概论》等.

李浩明 1933 年 10 月生，吉林省德惠县人，1959 年毕业于东北师大数学系. 曾在吉林省教师进修学院、吉林省实验中学、吉林省教育学院任教或作教研员，现任吉林省教育学院中教部主任、副教授. 东北地区、吉林省教育学会数学专业委员会副理事长；吉林省中小学教材审定委员会委员；吉林省中学高级职称评委会副主任；吉林省数学会《数学学习与研究》副主编；长春市数学会理事. 曾参与编写中学数学教学大纲和全面统编教材，起草与修改九年义务教育全日制初中数学教学大纲. 1992 年被人民教育出版社聘为义务教育四年制初级中学教科书代数(实验本)及教师用书主编之一，义务教育教材《教学指导与参考》特邀编委. 主编、合编、翻译师生用书 40 余本，写论文 20 余篇.

张春条 男，1937 年生，1962 年毕业于北京师范大学数学系. 高级教师，现任北京师大附属实验中学数学教研组组长，兼任北京西城区数学会理事，区教研员，中小学数学教学报编辑，北京市数学奥林匹克学校教练. 多年从事数学教学及数学教育研究工作，对培养学生思维能力有较系统的研究. 曾主编《数学综合题解》、《高中数学总复习与考试》、《初中数学基础知识》、《初中数学总复习指导与练习》、《小学数学竞赛辅导》等书，并参加了《中学 数学百科全书》、《高中数学学习词典》及多种指导中学生学习数学的参考读物、数学竞赛辅导读物的编写工作. 还在各种刊物上发表过多篇数学教学经验的文章.

陈　汶 女，1938 年生. 1962 年毕业于北京师范大学数学系，北

京市特级教师，现在北京师范大学附中任教．参加过《中国中学教学百科全书》、《初等数学研究》、《初中数学教学指导书》、《高中数学学习辅导》、义务教育三年制初中教材及教学参考书等十几部著作的编写，并在国际数学教学研讨会、中国教育学会数学研究会和北京市数学会组织的年会上以及《北京教育》、《河南教育》、《数学教师》等会议或杂志上发表过多篇论文．曾在北京市首届中青年教师评优课活动中获优秀课奖．

陆　乘　女，1929 年生．1952 年毕业于北京大学．在清华工农速中、北大附中任教四十余年，高级教师．曾多年在海淀区教师进修学校任兼职教研员、海淀区教科所的兼职研究员．先后在《中学生学习报》、《数学通报》、《中学生数学教与学》、《数理化通讯》、《中学生数理化》等刊物上发表过文章．并参与编写《几何教与学》、《代数教与学》、《初中数学总复习》、《初中几何练习与答案》、《初中代数 练习与答案》、《平面几何学习辅导》、《初中数学教学向导》、《中学数学教材研究与教案选》、《初中数学总复习题》、《一课一练》、《中学试题库》等二十几部著作．

郑学遐　高级教师，1937 年生于天津，1962 年毕业于北京师范学院数学系．多年来曾在许多数学杂志及刊物上发表过有关中学数学教学与学习辅导性的文章．1984 年后曾先后为科学出版社、科技文献出版社、科技大学出版社、电子工业出版社、新蕾出版社、开明出版社、农村读物出版社等出版社 编写或主持编写了《一课一练》、《应知应会手册》、《升级准备》、《达标丛书》等中学数学学习辅导书籍，这些书籍得到了广大读者的普遍好评．1990 年应邀参加了人民教育出版社出版的《高级中学数学试验课本》的编写工作，同时还以《北京百科全书》的特邀编辑的身份参加了《北京百科全

书》的编辑工作.

目前,郑学遐同志在北京一一九中学任教.

贺信淳 1935年生,浙江镇海人,1955年毕业于北京师范学院专修班,长期在中学任教,1981年起任北京市东城区教研科研中心数学教研员,1992年被评为北京市中学特级教师.1988年起,任北京市数学教学研究会理事,北京市东城区理科学会理事长.

在中学数学的教学和科研岗位上,不断地把教学、教研和科研相结合,探索教法规律.1964年起,在《数学通报》等刊物上发表了多篇论文,近年来又著有《三角》等教学法著作,参与编写《数学教学手册》、《中学数学精要》、《代数学习辅导》、《名师启迪丛书》等十几部中学数学的教学参考读物.近年来,又积极参加了教材改革实验,参加了实验教材和教学参考资料的编写,取得了一些成果.

前　言

初中学生对数学学习有的比较爱好，并且学有余力. 因此，他们按照课本顺序依次学得的数学知识和数学方法，需要得到综合整理、巩固提高.

初中数学教师在进行个别指导或小组辅导时，也需要有相应的参考资料.

为此，特约请经验丰富的数学名师，编写本书，以适应上述需要. .

本书源于课本，高于课本. 对初中数学基础知识，既复习巩固，又综合运用；对初中数学技巧方法，既说明思路，又广为举例，希望达到使读者拓宽知识、提高能力的目的.

本书为讲座集形式. 每一讲座就一个课题综合论述，并附有习题及答案. 全书包含十一个讲座，可以依次使用，也可独立使用.

作为第一个读者，我有幸拜读了全部初稿，真觉得精采纷呈. 有几讲综合说明了一类问题的解法，如三个非负数、一元二次方程、二次函数、直线形、圆、解三角形；有几讲综合说明了一些方法的应用，如代数中的换元法、配方法、待定系数法，几何中常见的辅助线的添法、几类常见问题的证法；；有几讲专门谈及综合题和它们的解法，并选列了一些省市中考题中的综合题的示范讲解.

希望本书能成为初中学生适宜的数学复习进修读物，成为初中数学教师得力的数学辅导参考资料.

对本书的缺点错误，敬请批评指正.

吕学礼

1993 年 1 月

目　　录

第一讲　三个非负数

初中阶段，我们学习了平方数，绝对值和算术根三个非负数，这三个非负数，不仅它们自身各有不同的重要意义，而且与其他数学知识都有着广泛的联系．因此，我们将就它们的意义、性质及应用分述如下：

一、三个非负数的意义

1．**平方数**　a^2　（a 是任意实数）

两个相同因数的积叫做这个数的**二次方**，又叫做这个数的**平方**，即

$$a\times a=a^2.$$

因为正数的二次方仍然是一个正数，负数的二次方也是一个正数，零的平方是零，所以任何实数的平方都不是负数，即

$$a^2\geqslant 0\quad（a\text{ 是任意实数}）$$

应该引起注意的是，在式子 $a^2\geqslant 0$ 中 a 既可以是一个实数，也可以是一个用字母表示的实数，还可以是一个代数式．只要它们是一个平方的形式，它们的值就是非负的．

例 1　比较 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 与 2 的大小（$a\neq 0$）．

分析：一般比较大小的问题，我们都先求出它们的差，然后再从差的符号判断出结果．

$$a^2+\frac{1}{a^2}-2=(a-\frac{1}{a})^2.$$

因为 $a\neq0$，而 $(a-\frac{1}{a})^2$ 是一个平方数，所以 $(a-\frac{1}{a})^2\geqslant0$，

即 $$a^2+\frac{1}{a^2}-2\geqslant0,$$

故 $$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2.$$

解：$\because$ $a^2+\frac{1}{a^2}-2=(a-\frac{1}{a})^2\quad(a\neq0)$，

而 当 $a\neq0$ 时，$(a-\frac{1}{a})^2\geqslant0$，

$\therefore$ $$a^2+\frac{1}{a^2}-2\geqslant0,$$

即 $$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2.$$

这就是说，一般情况下，$a^2\neq\frac{1}{a^2}$ 或 $a\neq\frac{1}{a}$ 时，$a^2+\frac{1}{a^2}>2$. 只有在 $a=\frac{1}{a}$，或 $a^2=\frac{1}{a^2}$ 时，$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2$ 中才取等号，即当 $a\neq\frac{1}{a}$ 时，$a^2+\frac{1}{a^2}>2$，当 $a=\frac{1}{a}$ 时，$a^2+\frac{1}{a^2}=2$.

这个例题如果用语言叙述就是一个数的平方与它的倒数的平方的和不小于 2.

例 2 如果 m 是一个任意实数，判断方程 $x^2+m^2=0$ 的解的情况.

解：因为 x^2+m^2 是两个平方数的和，它们应该是非负的，而要使 $x^2+m^2=0$，这里 x 是未知数，m 是任意实数，只有在 $x=0$，并且 $m=0$ 时，$x^2+m^2=0$ 才能成立. 因此

当 $m\neq0$ 时，方程无实数解.

当 $m=0$ 时，方程的解为零.

最后提一点注意，任何实数的偶次方是非负数，而常用的是平方数.

2. 绝对值　$|a|$　（a 是任意实数）

初一课本上对绝对值的意义是这样叙述的："一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零."这句话用代数式表示就是：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0, \\ 0, & \text{当 } a=0, \\ -a, & \text{当 } a<0. \end{cases}$$

一个数的绝对值，也可以从数轴上去理解，这就是"一个数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的距离".

不管是从课本上绝对值的意义，还是数轴上的"距离"去认识，我们都可以看到：一个数的绝对值一定不是负数，即

$$|a|\geqslant 0 \quad (a \text{ 是任何实数})$$

充分认识到：一个数的绝对值是非负数，这一点是至关重要的.

例 3　若 $|-a|=-a$，a 是一个怎样的数？

解：对于这类问题必须充分理解题意.这个题可以从下面两个角度去理解：

把 $-a$ 看作 a 的相反数，原题意就是一个数的相反数的绝对值还是这个数的相反数.

另一方面，也可以把 $-a$ 看成一个数，这就是一个数的绝对值还是它本身.

解这类题时，把注意力放在对结果的讨论上，即

$\because$　$|-a|=-a$，　　$|x+\sqrt{2}|=-\sqrt{2}-x$

$\therefore$　$-a\geqslant 0$.　（什么理由？）

故　$a\leqslant 0$.

即　a 应该是负数或零.

例 4　如果 $|x+\sqrt{2}|=-\sqrt{2}-x$，那么 x 应是怎样的

数？并把这些数表示在数轴上.

解：因为$-\sqrt{2}-x=-(x+\sqrt{2})$，所以原题就是

$$|x+\sqrt{2}|=-(x+\sqrt{2}).$$

显然，根据绝对值的意义应该有

$$-(x+\sqrt{2})\geqslant 0.$$

即 $$x+\sqrt{2}\leqslant 0,$$

$$x\leqslant-\sqrt{2}\text{（见图 1-1）}.$$

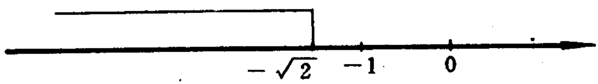

图 1-1

例 5 如果$|x-3|=3$，求x的值.

解法一：当 $x-3>0$ 时，$x-3=3$.

$$x=6.$$

当 $x-3<0$ 时，

$$-(x-3)=3,$$

$$x-3=-3,$$

$$x=0.$$

∴ 所求的 $x=6$ 或 0.

解法二：我们可以从数轴上去考虑，原题的题意是数轴上与 3 的距离等于 3 的点是哪些数，我们看图 1-2.

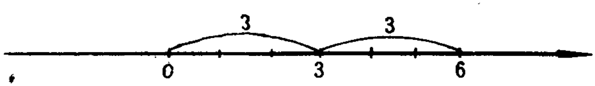

图 1-2

从图 1-2 中很明显地可以看出，在数轴上与表示 3 的点的距离等于 3 的点只有“0”和“6”两个数，因此原题的解为 x

$=6$ 或 $x=0$.

例 6 数轴上与 -7 这个点的距离等于 2 的点都是哪些数，请你用带绝对值的式子把它表示出来.

解：由题意我们可以得到图 1-3 数轴.

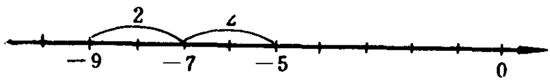

图 1-3

从数轴上，我们可以知道 -9 和 -5 这两个数在数轴上的点到 -7 这个点的距离都是 2. 我们再由绝对值的定义可以得到下式：

$$|x-(-7)|=2.$$

即 $$|x+7|=2.$$

故 $x=-9$ 或 $x=-5$.

例 7 求下列各式的值

(1) $|\log_{\frac{1}{2}}8|$； (2) $|\lg2-1|$.

解：(1) $\because\ \log_{\frac{1}{2}}8=-3$

$\therefore\ |\log_{\frac{1}{2}}8|=|-3|=3.$

(2) $\because\ \lg2<1$,

$\therefore\ \lg2-1<0.$

则 $|\lg2-1|=1-\lg2=\lg\dfrac{10}{2}=\lg5.$

例 8 化简 $|-x^2+4x-5|$

解：$\because\ -x^2+4x-5=-(x^2-4x+5)$

$\therefore\ |-x^2+4x-5|=|-(x^2-4x+5)|$

$=|x^2-4x+5|$,

而 $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1>0$,

$\therefore\ |x^2-4x+5|=x^2-4x+5.$

即 $|-x^2+4x-5|=x^2-4x+5.$

3. 一个非负数的n次算术根$\sqrt[n]{a}$ $(a\geqslant 0)$

必须牢记非负数的 n 次算术根的意义中有两个非负存在. 第一,被开方数必须是非负数;第二,这个非负数的 n 次方根也必须是非负数. 即当 $a\geqslant 0$ 时,又有$\sqrt[n]{a}\geqslant 0$,这时$\sqrt[n]{a}$叫做非负数 a 的 n **次算术根**.

在初中阶段,经常使用的是算术平方根,即$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$,这时$\sqrt{a}\geqslant 0$.

在解有关算术根的问题时,一定要注意这两个"非负"条件.

例 9 (选择题)如果$\sqrt{-a}$有意义,即么 a(　)

(A)一定是负数.　　　　(B)一定不是正数.

(C)一定是正数.　　　　(D)一定不是负数.

解: 由题意如果$\sqrt{-a}$有意义,这就是说$\sqrt{-a}$是一个算术平方根,这时必有

$$-a\geqslant 0,$$

那么,$a\leqslant 0$. 即 a 可能是负数或零,也就是说 a 一定不是正数,因此本题应该选择 B.

例 10 当 x 分别取怎样的值时下列各式有意义:

(1)$\sqrt{1-2x}$;　　　　(2)$\sqrt{3x+2}$;

(3)$\sqrt{2-|x|}$;　　　　(4)$\sqrt{|x|+1}$.

解: (1)$1-2x\geqslant 0$,

则 $\qquad x\leqslant \dfrac{1}{2}$;

(2)$3x+2\geqslant 0$,

则 $\qquad x\geqslant -\dfrac{2}{3}$;

(3)$2-|x|\geqslant 0$,

$$|x|\leqslant 2.$$
则 $$-2\leqslant x\leqslant 2;$$

(4) ∵ $|x|\geqslant 0$,

∴ $|x|+1>0$.

即 x 取任何实数时都有 $|x|+1>0$. 这时 $\sqrt{|x|+1}$ 都有意义,所以 x 可以取任何实数.

例 11 方程 $\sqrt{x}+1=0$ 有实根吗,为什么?

解:因为 $\sqrt{x}$ 表示 x 的算术根,一般情况下我们认为它是有意义的,即 $\sqrt{x}\geqslant 0$,那么 $\sqrt{x}+1$ 必然大于零,而不可能等于零,即 $\sqrt{x}\neq -1$,所以这个方程没有实数解.

例 12 (选择题)如果 $a<0$ 且 $b<0$,那么 $\sqrt{a^3b}$ 化简后得( )

(A) $a\sqrt{ab}$. (B) $a\sqrt{-ab}$.

(C) $-a\sqrt{ab}$. (D) $-a\sqrt{-ab}$.

解:∵ $a<0$ 且 $b<0$,

∴ $a^3b>0$.

那么 $\sqrt{a^3b}>0$.

而 $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot ab}=|a|\cdot\sqrt{ab}$.

又 ∵ $a<0$, ∴ $|a|=-a$.

故 $|a|\cdot\sqrt{ab}=-a\sqrt{ab}$.

因此,本题应该选择 C.

二、非负数的基本性质

非负数有下列基本性质:

1. 非负数一定有最小值,这个最小值是零.
2. 有限个非负数的和仍是非负数.

即 $$\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant 0\quad (a_i\geqslant 0,n\text{ 为有限的自然数})$$

3. 如果有限个非负数的和为零，那么必定每个非负数都同时为零.

即　当 $a_i \geqslant 0$，n 为有限个自然数时，若

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0,$$

则必有 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_i=\cdots=a_n=0$.

4. 非负数的多值性：

(1)若 $a^2=b$，则 $a=\pm\sqrt{b}$.

(2)若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$.

(3)若 $a^2=b^2$，则 $a=\pm b$.

例 13　若 $|x-2|+\sqrt{y^2-2}=0$，求 $\log_x y$ 的值.

解：由原题，根据非负数的基本性质有

$|x-2|=0$，则 $x-2=0$，$x=2$.

$\sqrt{y^2-2}=0$，则 $y^2-2=0$，$y=\pm\sqrt{2}$.

若求 $\log_x y$ 的值，则 y 必须取正数，所以 $y=-\sqrt{2}$ 要舍去，这时 $\log_x y=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$.

即　若 $|x-2|+\sqrt{y^2-2}=0$ 时，$\log_x y=\dfrac{1}{2}$.

例 14　已知　$(y+z+\dfrac{1}{27})^2+|x+z+\dfrac{5}{3}|+\sqrt{x+y+z+\dfrac{55}{27}}=0$，求 $(x+y)^z$ 的值.

解：由已知得

$$y+z+\frac{1}{27}=0,\text{则}\quad y+z=-\frac{1}{27},$$

$$x+z+\frac{5}{3}=0,\text{则}\quad x+z=-\frac{5}{3},$$

$$x+y+z+\frac{55}{27}=0,\text{则}\quad x+y+z=-\frac{55}{27}.$$

从而得方程组