《特级教师帮你复习》丛书

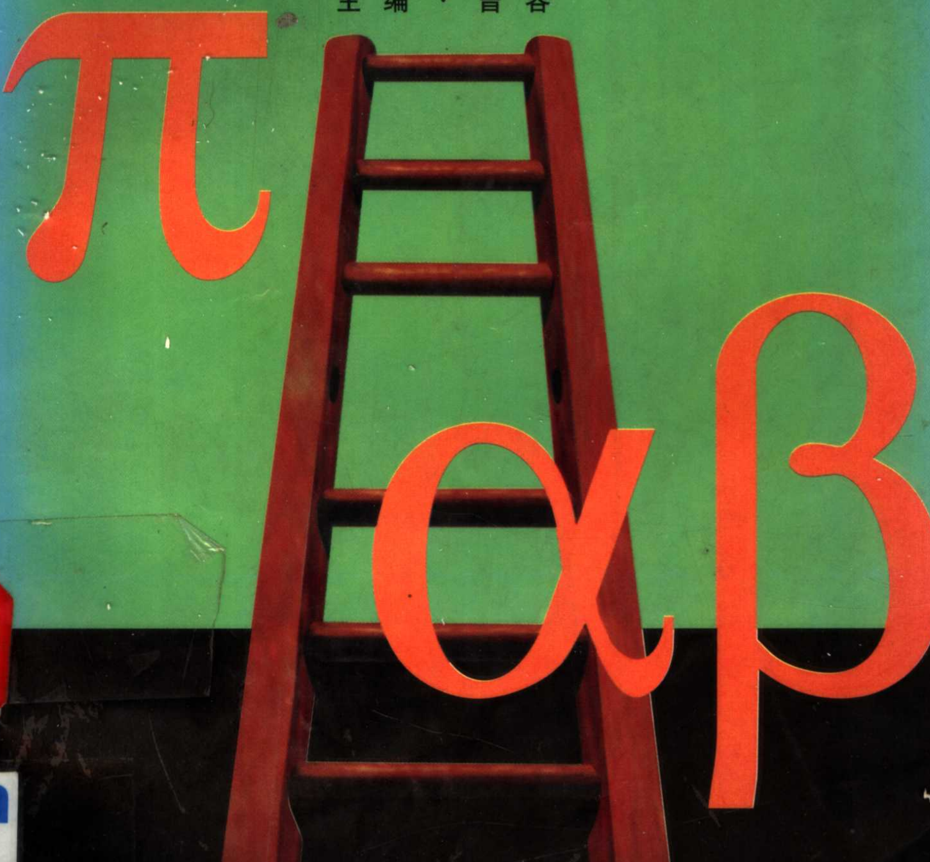
名誉主编·谷超豪　主编·陈怀良

特级教师

帮你复习

·高中数学·

主编·曾容



华东师范大学出版社

《特级教师帮你复习》丛书

名誉主编·谷超豪　主编·陈怀良

特级教师

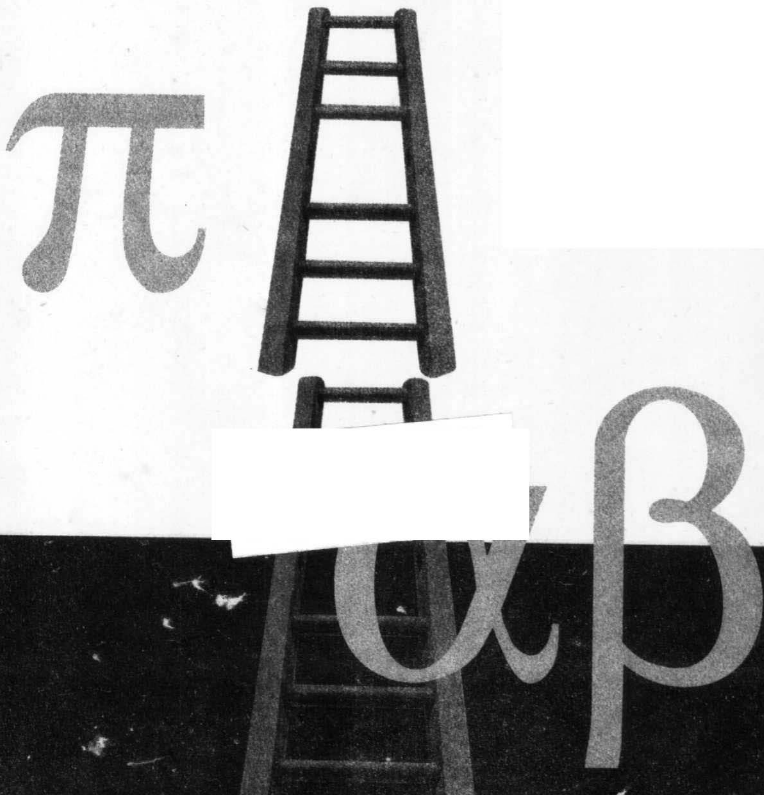
帮你复习

·高中数学

主　编·曾　容

编写者·严华祥 许三保 张裕华

刘渝瑛 许　敏



华　东　师　范　大　学　出　版　社

责任编辑　陈信漪

特级教师帮你复习
·高中数学·
主编　曾　容

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路 3663 号　邮政编码 200062）
新华书店上海发行所经销
华东师范大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 13.25　字数 330 千字
1998 年 8 月第 1 版　1998 年 11 月第 2 次印刷
印数 11.001—22.000

ISBN7－5617－1819－5/G·824
定价：13.00 元

出版说明

特级教师具有坚实的知识基础、精到的业务专长和丰富的教学经验，在长期教学过程中培育了一批又一批优秀学生。他们重视对学生学习方法的指导，注重培养学生良好的学习习惯；对基础不同、进步程度不同的学生，采用不同的教学方法来提高他们的文化知识素质，发展他们的个性特长。为了让广大中学生，无论是平时学习，还是复习迎考，都能得到特级教师的指导和点拨，使学习成绩达到自己理想的水平，能进理想的学校，“圆一个大学梦”，我们继《特级教师帮你学》丛书出版之后，又编辑出版了《特级教师帮你复习》丛书。

《特级教师帮你复习》丛书，是根据教育部有关“变应试教育为素质教育”的要求，以现行全日制中学教学大纲和中考要求、高考考纲为依据，结合人民教育出版社和各地新编的教材进行编写，普遍适用于全国各地中学生。

本丛书由上海中学、上海市三女中、市西中学、上海师大附中、向明中学、复旦大学附中、格致中学、曹杨二中等一批上海市重点中学的特级教师和高级教师，上海中学生数学奥林匹克学校的高级教练，以及师范大学的教授和副教授编写。

考试，尤其是中考和高考，中学生都极为重视。本丛书作者凭借自己参加中学教材编写以及中考、高考命题和阅卷的经验，采用全新的视角，根据中考、高考的重点及难点，将初中和高中的文化知识分别加以梳理、总括和深化，撷其实用的内容精要，选其典型范例，设计了最佳的综合能力训练题，为广大中学生提供科学的复习方法，帮助他们进行全面系统的复习，切实提高他们运用所学知

识分析问题、解决问题的实际能力。因此，全书有较高的可读性和较强的实用性。

中国科学院院士、原中国科技大学校长、复旦大学数学研究所所长、著名数学家谷超豪教授担任《特级教师帮你复习》丛书的名誉主编，并撰写了序言。谷超豪教授十分关心中学基础教育和本丛书编写工作，我们深表敬意。

书中若有不当之处，谨请专家和广大师生提出宝贵意见，以便今后修订，使这套丛书真正成为每一位中学生学习知识、复习迎考的好帮手。

华东师范大学出版社

1998年4月

序

中学生读点内容适合自己的课外读物，有助于拓宽思路，学好功课，打好文化知识基础。

“温故而知新”，复习也是学习中的一个重要环节。复习，不仅能弄懂平时还没有懂的内容，而且是一个消化、整理和记忆的过程。通过复习，还可以做到熟能生巧，进一步培养思维能力和创造能力。

华东师范大学出版社编辑出版《特级教师帮你复习》丛书，各册均由教学经验丰富的上海市特级教师负责编写。希望《特级教师帮你复习》丛书能成为广大中学生复习和准备考试的良师益友。

谷超豪

1998年2月

于上海复旦大学

前　言

本书依现行教学大纲并配合全国统编教材和各地新编教材编写，大体上与教材内容同步进行。

每章由“重点难点述要”、“范例难题解析”与“习题精编”三个部分组成。第十四章为“综合练习”，可供总复习后自测。

为配合课堂教学，加强素质教育，编写中既重视知识的系统性，又注意应用的综合性；既重视基础知识的巩固和基本技能的掌握，又注意开阔思路，培养思维方法和提高解题能力，以提高分析问题和解决问题能力，提高学习质量，并为升学复习创造条件。

作者力求全书阐析简明，条理清晰，重点突出，范例典型，使这本书能成为密切配合课堂教学，具有实效的学习复习参考指导读物。

根据教育部的“对现行普通高中数学学科教学内容的调整意见”的规定，有些教学内容不作为考试要求，本书在相关内容作了标记“※”。

书中难免有不当之处，请广大师生提出宝贵意见，以便修订。

数学特级教师　曾　容
1998 年 5 月
于上海中学生数学奥林匹克学校

目　　录

第一章　集合与函数

集合作为基本知识，用作数学的语言和工具.

函数是高中数学的主干. 它既是专门知识，又渗透在其它分支中. 在学习中，函数或作为基础概念形式出现，或结合其它知识形成综合性问题. 对函数要有较深刻的认识和理解，学会用函数的思想方法解决有关问题. 例如把方程和不等式理解为函数值的不同方面，可以更简捷地认识它们和处理它们.

【重点难点述要】

一、集合的知识.

集合的意义在于表达所研究对象的全体. 应该把握的是它的元素的确定性和可分辨性. 其次要熟悉集合的表示方法：列举法、描述法，有时也用区间和文氏图等表示.

集合概念中以下几个问题是易于混淆的. 关系$\in$和$\subset$：前者是元素与集合的关系，后者是集合与集合的关系；空集$\varnothing$和单元素集$\{\varnothing\}$：空集$\varnothing$是集合知识中为了使用方便而补充定义的，它被认为是不含任何元素的集合，而$\{\varnothing\}$是以空集$\varnothing$为元素的单元素集合，两者是不同的.

集合的下述内容是考查的重点.

子集概念：$A \subseteq B$. 定义为集合 A 的元素都属于集合 B，即若 $x \in A$ 则 $x \in B$，也可以理解为 $x \overline{\in} B$ 则 $x \overline{\in} A$. 这样理解也适合于空集是任何集合的子集这一性质.

交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$（注意逻辑联结词“且”）.

并集：$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$（注意逻辑联结词“或”）.

全集和补集：全集 I 是给定的集合，所讨论的集合都是它的子

集. 集 A 的补集 $\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\overline{\in}A\}$. 补集概念是与全集概念连在一起的.

掌握集合的知识，一要熟悉集合的各种表示方法与用途，给出集合的方法(以一个数学命题或用方程和不等式等给出集合)；再要对集合的形式与其它数学对象尤其是图形的对应，找到直觉；并要注意集合与命题的关系.

二、函数.

函数是高中数学的重点. 它生动地刻划了变量间的依赖关系；连接方程和不等式并给它们新的解释和解题方法(图解)；又通过图象，把量的相等和大小关系与形象融合一起，相互对应，相互为用. 因此，一般地有以下问题：

1. 函数概念. 这里要注意的是给定函数不只是意味着给出表达式(确切说是给出对应法则)，应该理解函数概念是包括对应法则、定义域和值域的一个整体.

2. 映射概念是函数概念的拓广，它有利于进一步理解函数概念(如反函数的存在性)，有利于理解方程与曲线的对应，排列组合问题与模型的对应.

3. 函数的图象. 定义在集合 D 上的函数 $y=f(x)$ 的图象是在直角坐标系中的点集 P. P 中的点以函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 的值作为横坐标，对应的函数值 y 为纵坐标. 这样定义，把自变量—横坐标，函数值—纵坐标连在一起，使得函数性质与图象的形象跟人的感知一致起来. 如单调增与上升、对称、周期等，应该注意函数图象与方程曲线是有区别的.

4. 反函数. 仅当函数 f 是定义域 D 到值域 C 上的一一对应时才有反函数 $f^{-1}: C\rightarrow D$. f 与 f^{-1} 互为反函数. 定义域和值域对调. 它们的图象在同一个直角坐标系中关于直线 $y=x$ 对称. 求反函数归结为解方程和确定值域和定义域的问题.

5. 函数的性质：

(1) 单调性是函数的局部性质. 例如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, +\infty)$ 上单调减，但不是定义域上的单调函数.

(2) 奇偶性是函数的全局性质. 它要求定义域关于原点对称而且在定义域上对一切 x 满足 $f(x)+f(-x)=0$ 或 $f(x)-f(-x)=0$. 奇偶性是一种特殊的对称性. 如函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，但这个函数不是偶函数.

(3) 周期性也是函数的全局性质. 是自变量增加 T 值后，函数值重复，即 $f(x+T)=f(x)$，$x\in D$，常数 $T\neq 0$.

6. 本章复习的函数主要有下列几种：

(1) 二次函数与反比例函数.

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 是高中最基本的、也是与其它知识综合应用最频繁的函数. 其应用的主要依据是它的图象的对称性（关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$）和对称轴一侧的单调性，还有它的图象与 x 轴的交点（如果存在的话）.

反比例函数. $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 是奇函数. 所有分式函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的图象都可由它经过平移和翻折得到.

(2) 函数 $y=x+\frac{\alpha}{x}=\frac{x^2+\alpha}{x}(\alpha>0)$ 的图象是双曲线，以 $x=0$ 和 $y=x$ 为渐近线（见图 1-1）. 当 α 取相反数时，得共轭双曲线.

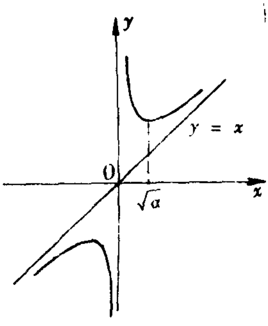


图 1-1

当 $\alpha>0$ 时，函数在 $(-\infty, -\sqrt{\alpha})$ 和 $(\sqrt{\alpha}, +\infty)$ 上单调增；在 $(-\sqrt{\alpha}, 0)$ 和 $(0, \sqrt{\alpha})$ 上单调减.

当 $\alpha<0$ 时，函数在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0,$

$+\infty)$上单调增.

函数 $y=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 的性质说明了积为定值 a 的两个同号变量的和有最值：$\pm 2\sqrt{a}\ (x=\pm\sqrt{a})$.

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 是高中最重要的两个超越函数. 它们在整个定义域上单调,且互为反函数. 其性质完全可以简单地用图象语言加以理解和记忆. 这些性质在方程、不等式中都有应用.

(4) 幂函数 $y=x^a$ 是比较复杂的初等函数簇. 对于不同的幂指数,它们的定义域和性质有很大差异. 应该掌握几个典型的幂函数的性质. 如 $y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{3}}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 等.

【范例难题解析】

例 1-1 设集合 $A=\{(x,y)|x^2+(y-1)^2=0\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$, 则 A 与 B 的关系是 …………（ ）

(A) $B\subset A$;　　　　(B) $A\subset B$;

(C) $A\in B$;　　　　(D) 以上都不对.

分析 集合 A 以描述法给出,它的元素是有序数对,(对应平面上的点),集合 B 以列举法给出,元素是数(表达数轴上点),两者没有包含和从属关系. 从集合的元素的表示形式了解它的性质,只能选(D). 否则就易于以 $x=0$, $y=1$ 是方程 $x^2+(y-1)^2=0$ 的解而误认为 $A\subset B$, 选了(B).

例 1-2 设集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{x|x\in A, x\in \mathbf{N}\}$, $C=\{x|x\subseteq A\}$, 求集合 A、B、C 之间的关系.

分析 集合 B、C 分别可以用列举法表示如下：

$$B=\{1\},\quad C=\{\varnothing,\{0\},\{1\},A\},$$

因此, $B\subset A$, $A\in C$, $B\in C$.

例 1-3 设全集 I 是实数集 $\mathbf{R}$, $M=\{x|x\leqslant 1+\sqrt{2}$, x

$\in \mathbf{R}\}$, $N=\{1, 2, 3, 4\}$, 则 $\overline{M} \cap N$ 等于 …………… (　　)

(A) $\{4\}$;　　　　(B) $\{3,4\}$;

(C) $\{2,3,4\}$;　　　　(D) $\{1,2,3,4\}$.

简解　$\overline{M}=\{x \mid x>1+\sqrt{2}, x \in \mathbf{R}\}$, $\overline{M} \cap N=\{3,4\}$, 选(B).

说明　例 1 到例 3 很基本,涉及的知识有:集合的表达形式与表达的对象,集合的元素的形式与性质,集合的关系和运算等.

例 1-4　设集合 $A=\{x \mid x=2^t, t \in \mathbf{R}\}$, $B=\{y \mid y=\frac{1}{x}, x \in A\}$, 那么 A 与 B 的关系是什么?

分析　集合 A 与 B 都是函数的值域,因此,依赖于定义域.因为 $A=(0, \infty)$, 故而 $B=(0, \infty)$, 从而 $A=B$. 这样处理问题就使我们不会以为 B 的定义函数的定义域为 A 而误认为 $B \subset A$.

例 1-5　设集合 $P=\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2}=a+1\}$, $Q=\{(x, y) \mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$. 若 $P \cap Q=\varnothing$, 求 a.

简解　由联立方程组

$$\begin{cases} y-3=(a+1)(x-2), \\ (a^2-1)x+(a-1)y=15 \end{cases}$$

消去 y,得

$$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16.$$

当 $a=\pm 1$ 时,方程组无解,即 $P \cap Q=\varnothing$.

若 $a \neq \pm 1$, 上述方程有解,但 $x=2$ 时,解得的 $(x, y) \notin P$. 因此以 $x=2$ 代入求得 $a=-4$ 和 $a=\frac{5}{2}$.

综上所述,当且仅当 $a=1, -1, -4$ 或 $\frac{5}{2}$ 时, $P \cap Q=\varnothing$.

说明　例 4 和例 5 涉及函数、方程.重在集合表达的数学对象

的实际意义(一种直觉:集合的形式与其它数学概念的沟通和互译.).例5中,P 表示缺了点(2, 3)的直线.当 $a=1$ 时,$Q=\varnothing$;$a=-1$ 时,P 与 Q 表示平行的直线;$a=-4$ 和 $\frac{5}{2}$ 时,Q 表示通过(2, 3)的直线,都与 P 无公共点.

例1-6 求下列函数的定义域 D:

(1) $y=\log_2(1+2x-3x^2)$;

(2) $y=\sqrt{\log_{0.3}\frac{x-1}{x+5}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$;

(4) $y=\sqrt{2^x-8}+\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x+4}$.

简解 (1) 由 $1+2x-3x^2>0$, $D=\left(-\frac{1}{3},1\right)$.

(2) 由 $\log_{0.3}\frac{x-1}{x+5}\geqslant 0$, 得 $0<\frac{x-1}{x+5}\leqslant 1$, $D=(1,\infty)$.

(3) 由 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 1.\end{cases}$ 故而 $D=[-2,1)\cup(1,2]$.

(4) 由 $\begin{cases}2^x-8\geqslant 0,\\ \log_{\frac{1}{2}}x+4\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ 0<x\leqslant 16,\end{cases}$ 故 $D=[3,16]$.

说明 本题涉及幂函数、指数函数、对数函数与二次函数等的定义域及不等式求解问题,基本类型有两种:一种解析式为复合函数,如(1)、(2);另一种是由运算加、减、乘、除连接的式子,如(3)、(4).前者由基本初等函数定义域写出一个不等式,后者写出一个不等式组,共同点是首先作概念处理(但不要超越步骤,写出进一步复合的要求,以防混乱;也要防止遗漏约束条件).

函数定义域在本章是一个难点,常要由实际问题的背景利用物理与几何直观,甚至求函数值域得到,参见本章例26、27、31等.

例 1-7 求下列函数的值域 V：

(1) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$；　　(2) $y=x+2\sqrt{1-x}$；

(3) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+3x+1}$；　　(4) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$. $=\dfrac{10}{10^{2x}+1}$

简解 (1) 由 $u=\dfrac{1}{2-x}$ 的值域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 及 $y=3^u$ 的单调递增性，$y=3^u$ 的值域 $V=(0, 1)\cup(1, \infty)$.

(2) $y=x+2\sqrt{1-x}$ 的第一项随 x 增，第二项随 x 减，不能利用单调性求值域，但令 $t=\sqrt{1-x}\in[0, \infty)$ 时可转为二次函数，求 $y=x+2\sqrt{1-x}=-(1-x)+2\sqrt{1-x}+1=-t^2+2t+1$ ($t\in[0, +\infty)$) 的值域，得 $V=(-\infty, 2]$.

(3) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+3x+1}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(2x+1)(x+1)}=\dfrac{x-3}{2x+1}(x\neq-1)$.

由 $\dfrac{x-3}{2x+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2(2x+1)}\neq\dfrac{1}{2}$，知 $y\neq\dfrac{1}{2}$. 而 $x=-1$ 时，$\dfrac{x-3}{2x+1}=4$，故 $y\neq4$.

综合上述，函数值域为 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)\cup(4, \infty)$.

(4) 由原来函数的反函数 $x=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{y+1}{1-y}$，其定义域为 $|y|<1$. 故原来函数值域为 $V=(-1, 1)$.

说明 本题给出了求函数值域的几种常见方法：①利用定义域和函数的单调性. 此法用于复合函数时，值域依赖于定义域，“由内向外”逐层求，如题(1)；②用换元法和二次函数的性质，如题(2)；③求反函数的定义域，如题(4)；④利用有实根的二次方程的判别式 $\Delta\geqslant0$. 但题(3)若用判别式求，很可能结果只有 $y\neq\dfrac{1}{2}$. 因为得到 $(2y-1)x^2+(3y+2)x+y+3=0$ 后，$\Delta=(y-4)^2$