

网式教辅

配人教B版

国家级教育社，打造国家级教辅品牌
独创网式教辅

丛书主编：周益新
本册主编：吴校红

课堂三级讲练

KE TANG SAN JI JIANG LIAN

高中

学好一级考本科
学好二级进重点
学好三级上名牌

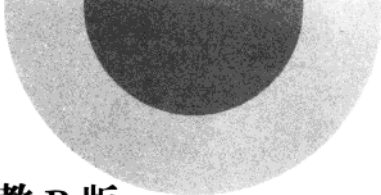
数学

必修

①



中国出版集团 现代教育出版社



配人教 B 版

网式教辅

课堂三级讲练

KE TANG SAN JI JIANG LIAN

高中

数学

必修①

本册主编
编委

吴校红
周春生
聂春林
宋 斌
姚平南
周国荣
陈晓红
李文雁
兰琴英

程宗文
熊 斌
尚厚家
柯清福
刘文益
张校东
张蒲生
巢亚丽

张奇志
龙 燕
吴茂友
张永友
郭新华
范劲松
张灿兵

高龙井
程金和
程时盛
张明灯
李慧芬
王 欣
桂创业

现代教育出版社



图书在版编目(CIP)数据

课堂三级讲练. 高中数学(B). 1; 必修; 人教版/

吴校红编. —北京: 现代教育出版社, 2005. 6

(网式教辅/周益新主编)

ISBN 7-80196-166-8

I. 课... II. 吴... III. 数学课—高中—教学参考

资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 057545 号

版权说明:

本书由现代教育出版社独家出版, 未经出版者书面许可, 任何单位和个人均不得以任何形式复制本书内容。法律代表: 吕晓光

丛 书 名: 网式教辅

书 名: 课堂三级讲练·高中数学必修·①(配人教 B 版)

总 策 划: 宋一夫

执行策划: 罗雪群 樊庆红 徐 玲

责任编辑: 田 慧

出版发行: 现代教育出版社

社 址: 北京市朝阳区安贞里 2 区 1 号金甌大厦

邮政编码: 100029

照 排: 北京世纪品峰

印 刷: 三河市科达彩色印装有限公司

开 本: 880×1230 大 16 开

印 张: 9

字 数: 260 千字

印 数: 4000 册

版 次: 2005 年 7 月第 1 版

印 次: 2005 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-80196-166-8

定 价: 9.90 元

读者购书、书店添货或发现印装问题, 请与本社发行中心联系、调换。

电 话: 010-64427380

传 真: 010-64420542

E-mail: mepechina@yahoo.com.cn

部分参与编写单位·小学

北京实验二小 北京史家胡同小学 人大附小 北京大学附小 清华大学附小 北师大附小 黄冈实验小学 东北师大附小 山东师大附小 华南师大附小 哈师大附小 西南师大附小

部分参与编写单位·中学

北京四中 北京大学附中 清华大学附中 北师大实验中学 北师大二附中 北京八中 人大附中 湖南师大附中 黄冈中学 山东师大附中 江苏启东中学 东北师大附中 河北三河一中 广州二中 哈尔滨三中 西南师大附中 重庆南开中学 杭州四中

丛书主编 周益新先生



现代教育出版社是国家级出版机构，成立于2004年4月8日。它隶属于中国出版集团，是中国出版集团以出版教育类、少儿类图书为主的出版社。

作为国家级教育出版社，现代教育出版社将以“现代”的目的与手段、形式与内容，全新的教育和文化理念，推动着中国及世界教育文化的繁荣与发展，诠释着传统文化与当代文化的真谛与精髓，展示着出版者的主体地位与作用。

现代教育出版社共设有10个部门，其中有：教材中心、教辅中心、辞书工具书中心、学术理论中心、少儿图书中心、研发中心、管理中心、财务中心、人事（党务）办公室、发行中心。

现代教育出版社企业精神为：

“我们热爱文化、更热爱出版，为了国家、为了民族、为了事业，也为了我们自己，要竭尽忠诚，全力以赴。”

中国科协教育专家委员会学术委员，全国优秀地理教师，湖北省首批骨干教师、湖北省黄冈中学文科综合课题研究组组长、湖北省黄冈市地理教学研究会理事长。

从1982年至今一直在黄冈中学任教，所带班级高考成绩特别优异。近几年，潜心研究素质教育、创新教育与学生潜能开发的方法和途径以及“3+X”高考改革模式下文科综合教学方法，在《光明日报》《中国教育报》等国家级报刊发表教研论文数十篇，其中在《中国教育报》发表的专论《走出“3+X”误区》和《近三年来文科综合能力测试命题思路的探讨》两篇文章被数百家媒体转载。各级教育行政部门邀请其作过多场文科综合专题研究报告。为全国部分省市教育行政部门命大型考试文科综合试题，试题的各项指标均达到理想水平。从1984年起，长期坚持组织学生开展地理野外综合考察等研究性学习活动，指导学生撰写的研究性学习小论文多次获湖北省科协、湖北省教研室一等奖。在2002年国家教育部基础教育司和《中国教育报》联合举办的“素质教育案例”评选活动中获奖。策划并主编《教材精析精练》《黄冈兵法》《龙门新教案》《超级讲解》等多部全国优秀系列图书。

本地区新华书店购书热线

山东省					
山东省 - 2773045	济南市 - 6091384	章丘 - 3318801	平阴 - 7871501	济阳 - 4233008	商河 - 4880047
青岛 - 5886510	胶州 - 7269671	胶南 - 6171751	即墨 - 8512717	平度 - 7364719	莱西 - 8468767
淄博 - 8659288	桓台 - 8186261	沂源 - 3241165	高青 - 6961949	枣庄 - 3317229	滕州 - 5519118
东营 - 8329712	广饶 - 6441432	垦利 - 2521749	利津 - 5621992	潍坊 - 8364907	青州 - 3284551
安丘 - 4223399	诸城 - 6186730	高密 - 2322284	寿光 - 5231430	昌邑 - 7212356	临朐 - 3219579
昌乐 - 6222240	观台 - 6655681	莱阳 - 7211873	海阳 - 3227946	蓬莱 - 5662565	福山 - 6362324
莱山 - 6903211	开发区 - 6379046	莱州 - 2265971	招远 - 8216661	龙口 - 8517292	栖霞 - 5211650
牟平 - 4256809	长岛 - 3212723	威海 - 5283538	乳山 - 6668088	荣成 - 7517078	文登 - 8985019
济宁 - 2366810	兖州 - 3413165	曲阜 - 4495696	邹城 - 5212114	汶上 - 7222010	嘉祥 - 6861716
金乡 - 8716815	泗水 - 4222512	微山 - 8221319	鱼台 - 6211524	梁山 - 7314886	泰安 - 8429380
新泰 - 7228815	肥城 - 3212109	宁阳 - 5639153	东平 - 2826840	日照 - 8220959	莒县 - 6212658
五莲 - 5213453	莱芜 - 6222163	德州 - 2623609	宁津 - 5221105	乐陵 - 6221438	庆云 - 3321041
临邑 - 4222234	陵县 - 8221864	平原 - 47211245	禹城 - 7262923	齐河 - 5331166	武城 - 6651630
夏津 - 3261152	临沂 - 8203191	苍山 - 5211097	平邑 - 4089909	莒南 - 7212341	蒙阴 - 4271582
沂水 - 2269299	郯城 - 6131007	临沭 - 6211038	沂南 - 3232300	费县 - 5222584	聊城 - 8211621
临清 - 2323046	冠县 - 5231226	阳谷 - 6261260	东阿 - 3284490	莘县 - 7329967	茌平 - 4250103
高唐 - 3980029	滨州 - 3512957	惠民 - 5331942	阳信 - 8211708	无棣 - 6333255	沾化 - 7322475
博兴 - 2321535	邹平 - 4351801	菏泽 - 5928158	曹县 - 3314562	单县 - 4665117	成武 - 8632362
定陶 - 2213023	东明 - 7212209	鄄城 - 2424584	郓城 - 6522135	巨野 - 8316998	
河南省					
河南省 6229741	直书店 5921102	图书大厦 6226448	豫新书店 5684852	郑州市 6210651	巩义市 4135216
新郑市 2693452	封丘县 8250458	新密市 9819655	登封市 2868383	中牟县 2181212	开封市 3854944
开封县 6881507	杞县 8985805	通许县 4990487	延津县 7627794	兰考县 6992331	尉氏县 7991207
洛阳市 3252389	偃师市 7785033	孟津县 7929899	汝阳县 8213952	伊川县 8333274	安阳市 5922881
洛宁县 6231057	嵩县 6322693	大宜阳县 8894278	新安县 7287612	栾川县 6822371	平顶山市 2921076
汝州市 6895703	林州市 6878763	舞钢市 8133749	宝丰县 6522484	叶城县 8053227	郟县 5151182
鲁山县 5059179	焦作市 2928440	沁阳市 5630907	安阳县 2934665	孟州市 8192371	修武县 7192648
温县 6192378	武陟县 7291224	博爱县 8611806	鹤壁市 3312956	淇县 7223532	滑县 8710139
浚县 5529319	新乡市 2657721	卫辉市 4494540	辉县市 6206317	新乡县 5598827	获嘉县 4590326
原阳县 7290466	内黄县 7711353	长垣县 8865500	汤阴县 6213893	濮阳县 4416026	濮阳县 3211653
南乐县 6230729	台前县 2211217	范县 5251344	清丰县 7237969	许昌市 2652851	禹州市 8180360
长葛市 6123283	许昌县 5123269	鄆陵县 7162280	襄城县 3584443	漯河市 2167102	郾城县 6168563
临颍县 8861106	舞阳县 7125921	三门峡 2821696	灵宝市 8661927	义马市 5832181	沁阳县 4868287
陕县 3833412	卢氏县 7872828	南阳市 3122852	河南油田 3852691	邓州市 2117105	桐柏县 8222323
方城县 7211250	淅川县 4223803	镇平县 5920180	唐河县 8922263	南召县 6913770	内乡县 5332118
新野县 6277362	社旗县 7921073	西峡县 4678507	商丘市 3258257	永城市 5111112	宁陵县 7828203
虞城县 4166554	民权县 8510977	夏邑县 6212057	柘城县 7221639	睢宁县 8161355	信阳市 6662689
周口市 4956901	新县 2987279	淮滨县 7782058	罗山县 2130887	潢川县 3593186	周口市 8276614
项城市 4301109	商水县 5453973	淮阳县 2663203	太康县 6822614	扶沟县 6221567	沈丘县 5217608
郸城县 3222718	鹿邑县 7216558	西华县 2551503	驻马店 2622203	遂平县 4922853	汝南县 8080075
确山县 7022297	新蔡县 5932488	正阳县 8922486	泌阳县 7929526	上蔡县 6900839	西平县 6230509
济源市 6625280					
安徽省					
合肥 - 2653307	长丰 - 6671213	肥东 - 7711746	肥西 - 8841212	芜湖 - 2872011	南陵 - 6823152
繁昌 - 7864391	蚌埠 - 3059555	怀远 - 8011192	五河 - 5021400	淮南 - 2683889	凤台 - 8624501
马鞍山 - 2343501	当涂 - 6713413	淮北 - 3883965	铜陵 - 2832041	安庆 - 5542078	宿松 - 7821971

现代教育出版社邮购电话:010-64427380 64423901 64421936

本地区新华书店购书热线

枞阳 - 3813040	太湖 - 4166722	怀宁 - 4821976	岳西 - 2173454	望江 - 7173476	潜山 - 8921031
黄山 - 2313054	滁州 - 3022943	明光 - 8022252	全椒 - 5011325	来安 - 5611546	凤阳 - 6721619
阜阳 - 2255501	界首 - 4812724	临泉 - 6528271	颍上 - 4429464	阜南 - 6712278	太和 - 8624837
宿州 - 3022156	萧县 - 5036027	泗县 - 7014710	杨山 - 8032706 - 8010	灵璧 - 6037260 - 8807	巢湖 - 2371413
含山 - 4313841	无为 - 6312773	庐江 - 7316363	和县 - 5327970	六安 - 3214185	亳州 - 5522394
利辛 - 8812334	涡阳 - 7212232	蒙城 - 7622647	池州 - 2022168	东至 - 7011523	石台 - 6022026
青阳 - 5030748	宣城 - 3026662	宁国 - 4027891	广德 - 6052455	郎溪 - 7021476	泾县 - 5022453
旌德 - 8021181	绩溪 - 8162923	安徽 - 2117005			
江苏省					
江苏新华 - 5462099	江外文 - 5475744	南京 - 4725336	南少儿 - 6648284	南古旧 - 4518809	南教育 523713 - 808
邳州 - 6223737	新沂 - 8922283	江浦 - 8882685	江宁 - 2187524	六合 - 7102401	溧水 - 7213044
高淳 - 7331159	太仓 - 53522308	灌云 - 8812349	赣榆 - 6226477	铜山 - 3815194	睢宁 - 8332584
沛县 - 4687078	丰县 - 4222047	连云港 - 5507046	东海 - 7228003	金湖 - 6882218	盱眙 - 8213657
灌南 - 3221348	淮安 - 3941502	楚州 - 5931256	淮阴 - 4907708	涟水 - 2326993	洪泽 - 7223107
大丰 - 3817181	建湖 - 6213768	宿迁 - 4212506	沐阳 - 3569802	泗阳 - 5229393	泗洪 - 6243942
盐城 - 8362073	东台 - 5212073	高邮 - 4645938	江都 - 6536320	响水 - 6886408	阜宁 - 7213193
射阳 - 2320286	滨海 - 4222649	扬州 - 7883807	邵江 - 7343111	靖江 - 4822863	兴化 - 3234040
仪征 - 3441412	胥浦 - 3222192	宝应 - 8222052	泰州 - 6219202	泰兴 - 7662531	姜堰 - 8213325
如东 - 4115388	镇江 - 5026655	南通 - 3587381	如皋 - 7512267	通州 - 6540168	海门 - 2213954
启东 - 3344488	海安 - 8918468	溧阳 - 7280188	无锡 - 2703276	丹阳 - 6524363	扬中 - 8323731
句容 - 7274996	常州 - 6683272	武进 - 6688875	金坛 - 2821016	昆山 - 57512072	吴江 - 63423187
江阴 - 6882887	宜兴 - 7903270	苏州 7270258 - 8509	常熟 - 52783428	张家港 - 58132840	徐州 - 7838556 - 204
浙江省					
浙外文 - 85057573	杭州 - 87924806	余杭 - 86223476	萧山 - 82652543	建德 - 64732403	富阳 - 63323605
临安 - 63721134	桐庐 - 64222115	淳安 - 64883320	宁波 - 87248987	镇海 - 82656495	北仑 - 66872941
鄞州 - 87331430	余姚 - 62651537	慈溪 - 63012028	奉化 - 88584356	宁海 - 65577788	象山 - 65732358
温州 - 88223546	瑞安 - 65633776	乐清 - 62524106	永嘉 - 67234312	洞头 - 63484722	平阳 - 63724988
苍南 - 64252266	文成 - 67862344	泰顺 - 67583591	嘉兴 - 2031101	海宁 - 7021317	平湖 - 5010459
桐乡 - 8101898	嘉善 - 4124415	海盐 - 6034356	湖州 - 2210932	长兴 - 6023578	德清 - 8076078
安吉 - 5037727	绍兴 - 5220677	诸暨 - 7013635	上虞 - 2014356	嵊州 - 3022265	绍兴 - 8331695
新昌 - 6029330	金华 - 2397603	兰溪 - 8885314	义乌 - 5311781	东阳 - 6623593	永康 - 7115308
武义 - 7628175	浦江 - 4104746	磐安 - 4661130	衢州 - 3026964	江山 - 4023569	龙游 - 7022014
常山 - 5021121	开化 - 6015771	舟山 - 2022322	普陀 - 3055456	岱山 - 4064569	嵊泗 - 5081641
台州 - 2439689	椒江 - 8223523	黄岩 - 4223275	临海 - 5381059	温岭 - 6019093	玉环 - 7222392
天台 - 3882030	仙居 - 7773677	三门 - 3335875	丽水 - 2137426	龙泉 - 7123619	缙云 - 3131273
青田 - 6838177	云和 - 5131367	遂昌 - 8122664	松阳 - 8062550	庆元 - 6122454	景宁 - 5082122

前言

先说网式教辅 这里所使用的“网式”，既是指教与学知识“一网打尽，所剩无余”的意思，又是指一旦拥有此书，无需再买同类的其他教辅图书。本书通过独特的教学方法在学生的头脑中建立起知识“网络结构”，形成培养学生能力的“网式教学模式”。学生如果真正掌握了本书的全部内容，在自己头脑中建立起网式的知识结构，便可以从容应付各种考试。

再说三级讲练 三级讲练是指由浅入深，层层建立知识网络结构；由低到高培养学生综合能力；由表及里全面开展学生潜能的课堂讲解和及时训练的教学模式。

一级讲练 突出全面透彻地解读教材，扎扎实实地将一个知识点融化在学生的脑海里。

二级讲练 强调运用新知识和以前学过的知识，从知识的角度进行整合与拓展，从思维的角度培养学生综合能力。

三级讲练 侧重对知识的课外延伸、拓展与探究，突出特色、动态、鲜活、生成和依情而设的综合实践探究活动的案例分析，使学生在掌握基础知识及知识综合运用后，进入更高层次的学习与探究阶段。

这套丛书具有以下突出特点：

权威——丛书在国家级教育出版社——现代教育出版社的组织下，在全国著名教育专家、教材专家、教辅专家的主持下，在全国最知名的首批新课改改革试验区特高级教师的精心撰写下，打造出一套代表新课标全新理念的国家级教辅图书。

独特——丛书形成了完整的知识整合与拓展的网络结构，该结构挖掘和展示了知识由基础内容向多层面的延伸、迁移，并运用独到的三级讲练形式“点对点”对应新颖的例题和习题，题题提示解题的技巧和规律，引导学生在新课标课题探究过程中开发潜能，层层升级的网式模式，实属国内独家首创。

全面——知识点分布全面，适用对象全面，从详细解读教材到综合运用知识，以培养综合能力，再到课外拓广探究，培养创造性思维能力，一网打尽，适用不同群体的学生带进课堂听课，归纳、整理课堂笔记、自测自评，全方位配套使用。

科学——从“网式”教学是新课标教学体系客观存在的基础上设置体例；从剖析教材知识点、重点、难点角度，及建立点、线、面知识体系的需要上精编例题；从培养学生思维的技巧角度上原创新题、活题，并强调对主干知识的融会贯通，突出学生学习能力的提高和方法途径上的突破。

实用——复杂的网状知识结构用简明的三级讲练突破，教学的重点、难点用典型的例题化解，深奥的思维的技巧用新颖的习题去引导，一讲一练，层层对应。16开课堂讲练与8开单元测试卷既能同时订购，也可以单独订购。每道题有详细的解题思路点拨，方便老师检测学生学习程度和批阅，方便家长督促自己子女完成当天的课堂作业和课外作业，方便学生在校组织考试之前有针对性地检测自己的学习效果。

网式教辅之《课堂三级讲练》尽管是作者几十年长期教学实践和潜心研究的心得和成果，但仍需精益求精，为此，恳请专家、读者指正。

《课堂三级讲练》丛书编委会

2005年5月

目 录

第一章 集合	1
1.1 集合与集合的表示方法	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 集合的表示方法	1
1.2 集合之间的关系与运算	6
1.2.1 集合之间的关系	6
1.2.2 集合的运算	9
第一章 测评卷	14
第二章 函数	17
2.1 函 数	17
2.1.1 函数	17
2.1.2 函数的表示方法	23
2.1.3 函数的单调性	28
2.1.4 函数的奇偶性	33
2.2 一次函数和二次函数	38
2.2.1 一次函数的性质与图象	38
2.2.2 二次函数的性质与图象	38
2.2.3 待定系数法	38
2.3 函数的应用(Ⅰ)	47
2.4 函数与方程	52
2.4.1 函数的零点	52
2.4.2 求函数零点近似解的一种计算方法——二分法	52
第二章 测评卷	59
第三章 基本初等函数(Ⅰ)	61
3.1 指数与指数函数	61
3.1.1 有理指数幂及其运算	61
3.1.2 指数函数	66
3.2 对数与对数函数	73
3.2.1 对数及其运算	73
3.2.2 对数函数	79
3.2.3 指数函数与对数函数的关系	86
3.3 幂函数	92
3.4 函数的应用(Ⅱ)	99
第三章 测评卷	105
答案及点拨	108

第一章 集合



1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1

集合的概念

1.1.2

集合的表示方法



一级讲练·教材解读



课堂讲解

● 知识点 1 集合

我们把一些对象组成的总体叫做集合(简称集).构成集合的每个对象叫做这个集合的元素.

【例 1】下列各组对象

- (1)接近于 0 的数的全体;
- (2)比较小的正整数的全体;
- (3)平面上到点 O 的距离等于 1 的点的全体;
- (4)正三角形的全体;
- (5)某学校的高一(1)班的男生的全体.

其中能构成集合的组数为

- A. 2 组 B. 3 组 C. 4 组 D. 5 组

名师导引:看一组对象能否组成一个集合,关键是看这组对象是否是确定的,即任何一个对象,要么在这一组中,要么不在这组之中,而没有第三种情况出现.

解答:“接近于 0 的数”,“比较小的正整数”标准不明确,无法判定,∴(1)、(2)不是集合;其它的可以构成集合.∴应选 B.

● 思维延伸 集合中元素的特性

1. 确定性:设 A 是一个给定的集合, x 是某一具体对象,则 x 或者是 A 的元素,或者不是 A 的元素,两种情况必有一种情况且只有一种成立.
2. 互异性:“集合中的元素必须是互异的”,就是说,“对于一个给定的集合,它的任何两个元素都是不同的.”
3. 无序性:集合中元素的排列与次序无关,如集合 {a, b, c} 与 {b, a, c} 是同一个集合.

【例 2】含有三个实数的集合可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 求 $a^{2003} + b^{2004}$ 的值. ()

名师导引:两个集合相同,必须是两个集合中的元素完全相同,后一个集合含有 0, 因而第一个集合必定含有“0”,再找 a、b 的关系,从而求得 a、b 的值.

解答:显然 $a \neq 0$. 因 $a=0$ 时 $\frac{b}{a}$ 无意义. ∴ $b=0$. 因此

两集合分别为 $\{a, 0, 1\}$ 和 $\{a^2, a, 0\}$. 由于两集合相等. 故 $a^2=1, a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时,两集合分别为 $\{1, 0, 1\}$ 和 $\{1, 1, 0\}$ 与集合有三个元素之条件不符. ∴ $a \neq 1$.

当 $a=-1$ 时,两集合均为 $\{1, 0, -1\}$ 满足条件.

∴ $a=-1, b=0$. ∴ $a^{2003} + b^{2004} = -1$.

● 知识点 2 元素与集合的关系及表示法

根据集合的特性,对于一个元素 x 和一个集合 A, x 要么是 A 的元素,要么不是 A 的元素. 若 x 是 A 的元素,记作 $x \in A$, 读作 x 属于 A; 若 x 不是 A 的元素,记作 $x \notin A$, 读作 x 不属于 A.

【例 3】下列选项中正确的有

- ① $\frac{1}{3} \in \mathbf{N}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; ③ $|- \sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$; ④ $0 \in \mathbf{N}$; ⑤ $\pi \notin \mathbf{Q}$; ⑥ $\pi \in \mathbf{R}$.

名师导引:本题主要是熟悉常用数集的名称和符号,并注意元素和集合的关系.

解答: $\frac{1}{3}$ 不是自然数, $\sqrt{2}$ 不是有理数, $|- \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ 也不是有理数, 0 是自然数, π 不是有理数但是实数, 故②、④、⑤、⑥是正确的, ①、③是错误的.

● 知识点 3 集合的分类

1. 含有有限个元素的集合叫有限集, 如世界上最高的山峰所组成的集合.
2. 含有无限个元素的集合叫无限集, 如 $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 等.
3. 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$, 如方程 $x^2 + 5 = 0$ 在实数范围内的解集就是空集.

【例 4】下列集合, 哪些是有限集? 哪些是无限集? 哪些是空集?

- ①由大于 10 的所有自然数所组成的集合.
- ②方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解的集合.
- ③平面内到一定点 O 的距离等于定长 l ($l > 0$) 的所有点 P.
- ④今天生活在火星上的地球人构成的集合.

名师导引:判定一个集合是有限集、无限集或是空集

的依据是集合的分类.

解答:①、③是无限集 ②是有限集 ④是空集

●知识点4 集合的表示方法

1. 列举法

将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

【例5】用列举法表示下列集合.

(1) x^2-4 的一次因式组成的集合.

(2){20以内的质数}.

(3)由方程 $x^2-5x+6=0$ 和方程 $x^2-x-2=0$ 的解为元素的集合.

(4) $\{(x,y)|x+y=6,x\in\mathbb{N},y\in\mathbb{N}\}$.

名师导引:求出集合中所有元素,再用列举法表示.

解答:(1) $x^2-4=(x+2)(x-2)$,故符合题意的集合为 $\{x+2,x-2\}$.

(2)20以内的质数有2,3,5,7,11,13,17,19.故{20以内的质数}= $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$.

(3)方程 $x^2-5x+6=0$ 的解为 $x_1=2,x_2=3$;方程 $x^2-x-2=0$ 的解为 $x_1=2,x_2=-1$.由于集合中元素是互异的,故集合表示为 $\{2,3,-1\}$.

(4) $x+y=6,x\in\mathbb{N},y\in\mathbb{N}$.故集合为 $\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,0)\}$.

2. 描述法

把集合元素的公共属性描述出来,写在大括号内的方法叫描述法.

描述法分为:文字描述法——用文字把元素的共同特征叙述出来,再用大括号括起来.如{三角形},{平行四边形};符号描述法——用符号把元素所具有的共同特征描述出来,再用大括号括起来,具体方法是,在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同属性(或特征),即 $\{x|P(x)\}$.如 $\{P|P$ 到两定点A,B的距离相等 $\}$.也可表示为 $\{P|PA=PB,A,B$ 为定点 $\}$.

【例6】用描述法表示下列

集合:

①数轴上离开原点的距离大于1的点的集合.

②方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解的

集合.

③ $\{1,3,5,7,9,\dots\}$.

④图1-1-1中阴影部分.

名师导引:用描述法表示集合的关键是找出集合中元素的公共属性,确定代表元素,公共属性可用文字语言叙述或用数字关系式表示,但要抓住其本质.

解答:① $\{x|x>1,x\in\mathbb{R}\}$.

②方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解的集合用描述法表示为

$$\{(x,y)|\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}\}=\{(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\}.$$

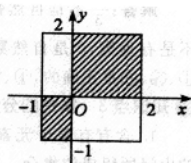


图 1-1-1

③ $\{1,3,5,7,9,\dots\}$ 用描述法表示为 $\{x|x=2k+1,k\in\mathbb{N}\}$.

④用描述法表示为 $\{(x,y)|xy\geq 0,-1\leq x\leq 2,-1\leq y\leq 2,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$.

同类变式 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解集是

A. $\{x=0,y=1\}$

B. $\{0,1\}$

C. $\{(0,1)\}$

D. $\{(x,y)|x=0$ 或 $y=1\}$

名师导引:方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$,集合表

示为 $\{(0,1)\}$ 或 $\{(x,y)|x=0,y=1\}$ 或 $\{(x,y)|\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}\}$; A集合中元素有两个式子 $x=0,y=1$,B集合表示两个元素0和1,D虽然是点集,它表示两直线 $x=0$ 或 $y=1$ 上的点的集合.以上错误均由于对集合表示方法不清,对方程组的解理解错误.

解答:C

【例7】用另一种方法表示集合.

(1){绝对值不大于3的整数}

(2){能被3整除且小于10的正数}

(3) $\{x|x=|x|,x\in\mathbb{N}$ 且 $x<5\}$;

(4) $\{x|(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0,x\in\mathbb{Z}\}$;

(5) $\{(x,y)|x+y=6,x\in\mathbb{N}_+,y\in\mathbb{N}_+\}$.

名师导引:集合的两种表示可以互译,应正确理解集合所表示的意义.

解答:(1) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

(2) $\{3,6,9\}$.

(3) $\because x=|x|,\therefore x\geq 0$. 又 $\because x\in\mathbb{Z}$ 且 $x<5,\therefore$ 表示为 $\{0,1,2,3,4\}$.

(4) $\{-2\}$ (即方程 $(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0$ 的整数解).

(5) $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.

【例8】集合 $A=\{x\in\mathbb{R}|x=a+\sqrt{2}b,a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}\}$,判断下列元素 x 与集合A之间的关系.

(1) $x=0$; (2) $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; (3) $x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

(4) $x=x_1+x_2$ (其中 $x_1\in A,x_2\in A$); (5) $x=x_1x_2$ (其中 $x_1\in A,x_2\in A$).

名师导引:先把 x 写成 $a+\sqrt{2}b$ 的形式,再观察 a,b 是否为整数,从而判定 x 是否为A中元素.

解答:(1) $\because 0=0+\sqrt{2}\times 0,\therefore 0\in A$.

(2) $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=1+1\times\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$.

(3) $\because x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,由于 $\sqrt{3}\notin A,\therefore x\notin A$.

(4) $\because x_1\in A,x_2\in A$,设 $x_1=a_1+\sqrt{2}b_1,x_2=a_2+\sqrt{2}b_2$ (a_1,a_2,b_1,b_2 均为整数),则 $x=x_1+x_2=(a_1+a_2)+\sqrt{2}(b_1+b_2)$,而 $a_1+a_2\in\mathbb{Z},b_1+b_2\in\mathbb{Z},\therefore x\in A$.

(5)设 $x_1=a_1+\sqrt{2}b_1,x_2=a_2+\sqrt{2}b_2$ (a_1,a_2,b_1,b_2 均为整数), $\therefore x=x_1\cdot x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot\sqrt{2}$,而 $a_1a_2+2b_1b_2\in\mathbb{Z},a_1b_2+a_2b_1$

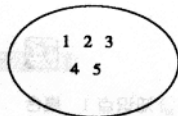


图 1-1-2

$\in \mathbf{Z}, \therefore x \in A$.

解答: (1) $x \in A$ (2) $x \in A$ (3) $x \notin A$ (4) $x \in A$
(5) $x \in A$



课后练习

- 下面所给的集合表示正确的是 ()
A. {我们班高个子的同学}
B. {数学教材上的难题}
C. 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解的集合是 $\{x=1 \text{ 或 } x=-1\}$
D. 平面直角坐标系内的第一象限内的点的集合为: $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$
- 已知 $a = \sqrt{5}, A = \{x | x \geq \sqrt{2}\}$ 则 ()
A. $a \notin A$ B. $a \in A$ C. $\{a\} \in \mathbf{R}$ D. $a \in \{a\}$
- 下列集合是有限集的是 ()
A. {能被3整除的数}
B. {正方形}
C. $\{x | 0 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$
D. {方程 $3x^2 + x = 0$ 的解}
- 给出下列关系: ① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; ③ $|-3| \notin \mathbf{N}$;

- $|-3| \in \mathbf{Q}$, 其中正确的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 由大于-3且小于11的偶数所组成的集合是 ()
A. $\{x | -3 < x < 11, x \in \mathbf{Q}\}$
B. $\{x | -3 < x < 11\}$
C. $\{x | -3 < x < 11, x = 2k, k \in \mathbf{N}\}$
D. $\{x | -3 < x < 11, x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$
- 方程组 $\begin{cases} x+y=2, \\ x-2y=-1 \end{cases}$ 的解集是 ()
A. $\{x=1; y=1\}$ B. $\{1\}$
C. $\{(1, 1)\}$ D. $\{(x, y) | (1, 1)\}$
- 集合 $M = \{\text{一条边为1, 一个角为 } 40^\circ \text{ 的等腰三角形}\}$ 中元素的个数 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 无数个
- 设 x, y 均为非0实数, 则 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{xy}{|xy|}$ 的值组成的集合用列举法表示为 _____.
- 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{y | y = x - 1, x \in A\}$, 则集合 B 用列举法表示为 _____.
- 平面直角坐标系内, 第二象限的点组成的集合为 _____.



二级讲练·综合运用



课堂讲解

【例1】下列命题中真命题的个数为

- 方程 $\sqrt{x-2} + |y+2| = 0$ 的解集为 $\{2, -2\}$;
- 集合 $\{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{y | y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}$ 的公共元素所组成的集合为 $\{0, 1\}$;
- 集合 $\{x | x - 1 < 0\}$ 与集合 $\{x | x > a, a \in \mathbf{R}\}$ 没有公共元素.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

名师导引: 要判定这些命题的真假, 就要对用来描述这些集合的语言进行转化, 以弄清集合的元素的构成.

解答: (1) 中, 方程 $\sqrt{x-2} + |y+2| = 0$, 等价于 $\begin{cases} x-2=0, \\ y+2=0, \end{cases}$ 其解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=-2. \end{cases}$

$\therefore$ 解的集合为 $\{(2, -2)\}$. 故(1)为假命题.

(2) 中, 由于集合 $\{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$ 元素为 y 且 $y = x^2 - 1 \geq -1$.

$\therefore \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq -1\}$; 而集合 $\{y | y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}$ 中元素为 y , 且 $y = x - 1 \in \mathbf{R} \therefore \{y | y = x - 1, x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$, 因此(2)也是错误的.

在(3)中, 集合 $\{x | x - 1 < 0\}$ 为不等式 $x - 1 < 0$ 的解集, 即 $x < 1$ 的解集, 而 $\{x | x > a, a \in \mathbf{R}\}$ 为不等式 $x > a$ 的解集, 显然两个集合可能有公共元素, 也可能没有公共元素, 因此(3)也是错误的.

故选 A.

【例2】若 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+4\}$, 求 a 的值, 并求此时的集合.

名师导引: 由于 -3 在集合中, 因此应分不同情况讨论.

解答: $\because -3 \in \{a-3, 2a-1, a^2+4\}$

若 $a-3 = -3$, 则 $a=0$, 此时集合 $\{-3, -1, 4\}$;

若 $2a-1 = -3$, 则 $a=-1$, 此时集合 $\{-4, -3, 5\}$;

而 $a^2+4 \neq -3$. 因此, 所求集合为 $\{-3, -1, 4\}$ 或 $\{-4, -3, 5\}$.



课后练习

- 下列表示同一集合的是 ()
A. $M = \{(2, 1), (3, 2)\}, N = \{(1, 2), (2, 3)\}$
B. $M = \{2, 1\}, N = \{1, 2\}$
C. $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}, N = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{N}\}$
D. $M = \{(x, y) | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}, N = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$
- 集合 $A = \{x | y = \frac{12}{x+3}, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$ 的元素个数为 ()
A. 4 B. 5
C. 10 D. 12

3. 已知: $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}, b=2, c=2\sqrt{2}, d=\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)$, 集合 $M = \{x | x = m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbb{Q}\}$, 其中 a, b, c, d 是集合 M 的元素的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

4. 由实数 $x, -x, \sqrt{x^2}, \sqrt[3]{x^3}, |x|$ 所组成的集合用列举法表示为_____.

5. 已知集合 $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}, B = \{y | y = x^2 - 1, x \in A\}$, 求 $B =$ _____.

6. 集合 $\{x | x = \frac{a}{b}, a+b=5, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$ 用列举法表示为_____.

7. 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x - 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$,

(1) 若 A 中有两个元素, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 A 中至多有一个元素, 求实数 a 的取值范围.



三级讲练·拓广探索



课堂讲解

【例 1】设集合 A 中元素为实数且满足以下条件:

① A 中不含 1; ② 若 $a \in A$, 则必有 $\frac{1}{1-a} \in A$. 请解答以下问题.

下问题.

1. 若 $2 \in A$, 试求 A 中其它所有元素;
2. 自己设计一个数属于 A , 然后求出 A 中其它元素;
3. 求证: 集合 A 不可能为单元素集;
4. 求证: 集合 A 中至少含有 3 个不同的元素.

名师导引: ①、②是集合的两个特性, 解题时要充分利用好这两个特性.

解答: 1. 由 $2 \in A$, 则 $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$,

则 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$, $\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$.

由于 $2, -1, \frac{1}{2}$ 以后重复出现, $\therefore A$ 中的所有元素为 $2, -1, \frac{1}{2}$.

2. 此题答案不惟一, 举例说明.

若 $3 \in A$ 则 $\frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} \in A$,

$\therefore \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \in A$, 而 $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$,

$\therefore A$ 中的所有元素: $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

3. 假设 A 为单元素集, 由于 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$,

$\therefore a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$, 方程 $a^2 - a + 1 = 0$ 无实根, 故 A 不可能为单元素集.

4. 由 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 则 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$.

由 3 知 $a \neq \frac{1}{1-a}$.

若 $a = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$ 则 $a^2 - a + 1 = 0$ 无解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$.

若 $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$ 则 $(\frac{1}{1-a})^2 - (\frac{1}{1-a}) + 1 = 0$ 无实数

解, $\therefore \frac{1}{1-a} \neq \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$.

$\therefore a, \frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$ 三个互不相等, 故 A 中至少有 3

个不同的元素.

由上面问题你悟出什么道理? 得到什么样结论? 并大胆证明你的“结论”.

解答: 由 1 知, $2 \in A$, 则 $-1 \in A, \frac{1}{2} \in A$.

由 2 知, 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A, \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = -\frac{1-a}{a} \in A$

而 $a \neq \frac{1}{1-a} \neq \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$.

故可得到以下结论: ① 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A, -\frac{1-a}{a} \in A$, 集合 A 不可能为单元素集; ② 集合 A 至少有三个不同的元素; ③ 由于 $a \cdot \frac{1}{1-a} \cdot (-\frac{1-a}{a}) = -1$, 故集合 A 中 3 个元素之积为 -1 .

课后练习

1. 设集合 $A = \{a | a = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, 集合 $B = \{b | b = k^2 - 4k + 5, k \in \mathbf{N}^*\}$, 若 $a \in A$, 试判断 a 与集合 B 的关系.

2. 已知实数集 A 满足条件: 若 $a \in A$, 则有 $\frac{1+a}{1-a} \in A$ ($a \neq 0$ 且 $a \neq \pm 1$), 则集合 A 中至少有几个元素? 并证明你的结论.

3. 集合 $A = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 6n + 3, n \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 若 $c \in C$, 求证: 必存在 $a \in A, b \in B$, 使得 $c = a + b$;

(2) 对任意的 $a \in A, b \in B$, 是否一定有 $a + b \in C$, 试证明你的结论.

4. 当正整数的集合 A 满足: “若 $x \in A$, 则 $10 - x \in A$ ”时, 则

(1) 试写出只有一个元素的集合 A ;

(2) 试写出只有两个元素的集合 A ;

(3) 这样的集合 A 至多有多少个元素?



1.2 集合之间的关系与运算

1.2.1 集合之间的关系



一级讲练·教材解读



课堂讲解

知识点1 子集

对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

【例1】以下各组是什么关系, 用适当的符号表示出来.

① 0 与 $\{0\}$; ② $\emptyset$ 与 $\{0\}$; ③ 0 与 $\emptyset$; ④ $\{0, 1\}$ 与 $\{0, 1\}$; ⑤ $\{b, a\}$ 与 $\{a, b\}$.

名师导引: 首先要分清是“元素与集合”的关系, 还是“集合与集合”的关系, 若是集合与集合, 再进一步找它们的关系.

解答: 1. 对于①, $\{0\}$ 表示只含有 0 一个元素的集合, $\therefore 0 \in \{0\}$.

2. 对于②, $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 均表示集合, $\therefore \emptyset \subseteq \{0\}$.

3. 对于③, 由于空集不含任何元素, 故 $0 \notin \emptyset$.

4. 对于④, $\{0, 1\}$ 表示含两个元素 0 和 1 的集合, 而 $\{(0, 1)\}$ 是以有序实数对 $(0, 1)$ 为元素的单元集合, $\therefore \{0, 1\} \not\subseteq \{(0, 1)\}$.

5. 对于⑤, 若 $a=b$ 时, 则 $\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 表示同一集合. 若 $a \neq b$, 则两个集合不相同, 有 $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$.

知识点2 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

【例2】填表:

集合	集合中元素的个数	子集的数目
$\{a\}$	1	
$\{a, b\}$	2	
$\{a, b, c\}$	3	
$\{a, b, c, d\}$	4	
$\{a, b, c, d, e\}$	5	
...	...	

(1) 你能找出“元素个数”与“子集数目”之间关系的规律吗?

(2) 如果一个集合有 n 个元素, 你能写出计算它的所有子集数目的公式吗(用 n 表达)? 其中真子集多少个? 非空子集多少个?

名师导引: 逐个计算归纳便可找到“元素个数”与“子集数目”之间的对应规律.

解答: (1) 表格中子集数目依次为: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ 即

$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$

(2) 由上表可归纳出, 若一个集合含有 n 个元素, 则它有 2^n 个子集, 其中真子集个数 $2^n - 1$, 非空子集为 $2^n - 1$, 非空真子集个数为 $2^n - 2$.

【例3】满足 $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 X 的个数为 ()

A. 4 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

名师导引: 由于 $\{1, 2\} \subseteq X$, 故 X 中必含有 $1, 2$ 两个元素, 除此之外, X 还可含有 $3, 4, 5$ 中的一个, 二个或三个元素, 故可分类求解.

解答: 含有 3 个元素的集合 X 有 3 个, 含有 4 个元素的集合 X 有 3 个, 含有 5 个元素的集合 X 有 1 个, 故满足条件的集合 X 共有 7 个. 故选 C.

【例4】非空集合 $A = \{x | 2a+1 \leq x \leq 3a-5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则使 $A \subseteq B$ 成立的所有 a 的集合是 ()

A. $\{a | 1 \leq a \leq 9\}$ B. $\{a | 6 \leq a \leq 9\}$
C. $\{a | a \leq 9\}$ D. $\emptyset$

名师导引: 首先应明确 A 是非空是什么意思, 然后讨论 $A \subseteq B$ 时, 可利用数轴知识来解.

解答: $\because A$ 非空, $\therefore 2a+1 \leq 3a-5$, 解得 $a \geq 6$.

由 $A \subseteq B$, 如图 1-2-1 所示

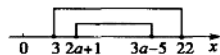


图 1-2-1

则有 $\begin{cases} 2a+1 \geq 3, \\ 3a-5 \leq 22, \end{cases} \therefore 1 \leq a \leq 9$, 综合得 $6 \leq a \leq 9$.

故选 B.

知识点3 集合的相等

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 反过来, 集合 B 的每一个元素也都是集合 A 的元素, 那么就称集合 A 等于集合 B , 记作 $A=B$.

【例5】集合 $X = \{x | x = 2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{y | y = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 试证明: $X=Y$.

名师导引: 要证明 $X=Y$, 按集合相等的定义, 应证明 $X \subseteq Y$ 且 $Y \subseteq X$.

证明: (1) 设 $x_0 \in X$, 则 $x_0 = 2n_0 + 1, n_0 \in \mathbb{Z}$.

①若 n_0 为偶数, 可设 $n_0 = 2m, m \in \mathbb{Z}$,

则 $x_0 = 4m + 1 \in Y$.

②若 n_0 为奇数, 可设 $n_0 = 2m - 1, m \in \mathbb{Z}$,

则 $x_0 = 4m - 1 \in Y$.

$\therefore$ 不论 n_0 为奇数或是偶数, 均有 $x_0 \in Y, \therefore X \subseteq Y$.

(2) 又设 $y_0 \in Y$, 则 $y_0 = 4k_0 + 1$ 或 $y_0 = 4k_0 - 1 (k_0 \in \mathbb{Z})$.

$\therefore y_0 = 4k_0 + 1 = 2(2k_0) + 1$ 或 $y_0 = 2(2k_0 - 1) + 1$, 而 $2k_0, 2k_0 - 1$ 均属于 $\mathbb{Z}$, $\therefore y_0 \in X$. $\therefore Y \subseteq X$. 由 (1)、(2) 知 $X = Y$.

【例 6】 (2001 · 北京朝阳区) 已知集合 $A = \{a, a+b, a+2b\}$, $B = \{a, ac, ac^2\}$, 若 $A = B$, 求 c 的值.

名师导引: 欲求 c 的值, 可列出关于 c 的方程组. 由两集合相等的定义及集合中元素的互异性, 有下面两种情况: (1) $a+b=ac$ 且 $a+2b=ac^2$; (2) $a+b=ac^2$ 且 $a+2b=ac$.

解答: 由于 $A=B$, 因此有以下两种情况:

$$(1) \text{ 若 } \begin{cases} a+b=ac, \\ a+2b=ac^2 \end{cases} \text{ 消去 } b \text{ 得: } a+ac^2-2ac=0.$$

若 $a=0$, 则集合 B 中的三个元素均为零, 与集合元素的互异性相矛盾, $\therefore a \neq 0$. $\therefore c^2-2c+1=0$, $\therefore c=1$, 但 $c=1$ 时, 集合 B 的三个元素均相同, $\therefore c \neq 1$. 因此, 此时无解.

$$(2) \text{ 若 } \begin{cases} a+b=ac^2, \\ a+2b=ac \end{cases} \text{ 消去 } b \text{ 得: } 2ac^2-ac-a=0.$$

由于 $a \neq 0$, $\therefore 2c^2-c-1=0$, $\therefore c=-\frac{1}{2}$ 或 $c=1$ (舍去), $\therefore c=-\frac{1}{2}$.

【例 7】 已知集合 $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{x | x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbb{Z}\}$. 则 M, N, P 满足关系 ().

- A. $M \subseteq N \subseteq P$ B. $M \subseteq N = P$
C. $M \subseteq N \subseteq P$ D. $N \subseteq P \subseteq M$

名师导引: 方法 1: 可从判断元素的共性和区别入手.

对于集合 $M = \{x | x = \frac{6m+1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$; 对于集合 $N = \{x | x = \frac{3n-2}{6} = \frac{3(n-1)+1}{6}, n \in \mathbb{Z}\}$; 对于集合 $P = \{x | x = \frac{3p+1}{6}, p \in \mathbb{Z}\}$. 由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 均表示被 3 除余数为 1 的数, 而 $6m+1$ 表示被 6 除余的数为 1 的数, 所以 $M \subseteq N = P$.

方法 2: 简单列举集合中的元素, 从而判定各集合的关系.

$M = \{\dots, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{13}{6}, \dots\}$, $N = \{\dots, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \dots\}$, $P = \{\dots, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \dots\}$. 此时不要急于判定三个集合之间的关系, 应分析集合中不同的元素. $\frac{7}{6} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \in N$, $\frac{13}{6} = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \in N$, $\therefore M \subseteq N$, 又 $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \notin M$, $\therefore M \subsetneq N$. $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \in P$, $\therefore N \subseteq P$, 又 $\frac{7}{6} \in N$, $\therefore P \subseteq N$, $\therefore N = P$ 从而 $M \subsetneq N = P$.

解答: B



课后练习

1. 给出下列四个判断

- ① $N \in \mathbb{Z}$; ② $\{x | x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^+$; ③ 空集是任何集合的真子集; ④ 子集是由原集合中部分元素组成的集合.

其中正确判断的个数是 ()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

2. 设 $A = \{x | x < 4\}$, 下列关系正确的是 ()

- A. $\{2\} \in A$ B. $2 \subseteq A$
C. $5 \in A$ D. $\{4\} \subseteq A$

3. 集合 $A = \{x | x = a^2 + 2, a \in \mathbb{N}_+\}$, $B = \{y | y = b^2 - 6b + 11, b \in \mathbb{N}_+\}$, 则下列关系式中正确的是 ()

- A. $A = B$ B. $A \subseteq B$
C. $B \subseteq A$ D. $A \supsetneq B$

4. 集合 $A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$, 且 A 中的元素中至少有一个奇数, 则这样的集合有 ()

- A. 11 个 B. 12 个
C. 15 个 D. 16 个

5. 若实数集 $\{2a, a^2 - a\}$ 有 4 个子集, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\mathbb{R}$
B. $\{a | a \neq 0, a \in \mathbb{R}\}$
C. $\{a | a \neq 3, a \in \mathbb{R}\}$
D. $\{a | a \neq 0 \text{ 且 } a \neq 3, a \in \mathbb{R}\}$

6. 已知集合 $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{x | x = a \cdot b, a, b \in A\}$, 则 B 的子集个数为 _____.

7. 已知 $\{a\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d\}$, 写出所有的集合 A _____.

8. 若集合 $A = \{3-2x, 1, 3\}$, $B = \{1, x^2\}$ 且 $B \subseteq A$. 求实数 x .

二级讲练·综合运用

课堂讲解

【例1】判定下列集合之间的关系,用适当的符号表示它们的关系.

- (1) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | x \text{ 为偶数}\}$;
 (2) $A = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$, $B = \{x | x \text{ 为正方形}\}$;
 (3) $A = \{x | x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0, 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$;
 (4) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} > 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} | y = x^2 - 5, x \in \mathbb{R}\}$;
 (5) $A = \{x | x \text{ 为奇数}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x = 4n \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$.
- 名师导引:对于用描述法给出的集合,要抓住竖线前后的代表元素及它具有的性质.

解答:(1) $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$, $\therefore A \subseteq B$;

(2) $\because$ 正方形属于平行四边形, $\therefore A \supseteq B$;

(3) A 表示方程 $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ 的解集,而 B 表示以方程 $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ 和 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ 为元素的集合,故 $A \subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$;

(4) $A = \{x | \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}\} = \{x | x \geq 3\}$, $B = \{y | y \geq -5\}$.
 $\therefore A \subseteq B$;

(5) 对于任一 B 中元素 x , 均有 $x \in A$, $\therefore B \subseteq A$. 另一方面, 对 A 中任一元素 $y = 2n - 1$ ($n \in \mathbb{Z}$).

当 n 为偶数时, 显然 $2n - 1 \in B$; 当 n 为奇数时, 如 $n = 2m + 1$, 则 $2n - 1 = 4m + 1 \in B$. 故有 $A \subseteq B$, $\therefore A = B$.

【例2】若不等式 $|x| < 1$ 成立, 不等式 $[x - (a+1)][x - (a+4)] < 0$ 也成立, 求 a 的取值范围.

名师导引: 若设不等式 $|x| < 1$ 的解集为 A , 不等式 $[x - (a+1)][x - (a+4)] < 0$ 的解集为 B , 则由条件 $x \in A$ 时, $x \in B$, 故 $A \subseteq B$, 因此可用集合间的包含关系求 a 的范围.

解答: $A = \{x | |x| < 1\} = \{x | -1 < x < 1\}$,

$B = \{x | [x - (a+1)][x - (a+4)] < 0\} = \{x | a+1 < x < a+4\}$.

依题意, $A \subseteq B$, 在数轴上作出关于包含关系的图形.

如图 1-2-2. 有 $\begin{cases} a+1 \leq -1, \\ a+4 \geq 1, \end{cases} \therefore -3 \leq a \leq -2$.

即: a 的取值的集合为 $\{a | -3 \leq a \leq -2\}$.



课后练习

1. 下列命题中正确的是 ()

A. 无限集的真子集是有限集

B. 任何一个集合至少有两个子集

C. 自然数集是整数集的真子集

D. $\{1\}$ 是质数集的真子集

2. 下列写法中正确写法的个数为

- ① $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$ ② $\emptyset \subseteq \{0, 1\}$ ③ $\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\}$
 ④ $2 \subseteq \{0, 1, 2\}$ ⑤ $\{0, 1, 2\} \subseteq \{2, 0, 1\}$ ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 满足 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 A 的个数是 ()

A. 4 B. 6 C. 7 D. 8

4. 集合 $A = \{x | x^3 - x = 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 A 与 B 的关系为 ()

A. $A \subseteq B$ B. $A = B$ C. $A \supseteq B$ D. $A \supset B$

5. 设 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x < a\}$. 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $\{a | a \geq 2\}$ B. $\{a | a \leq 1\}$ C. $\{a | a \geq 1\}$ D. $\{a | a \leq 2\}$

6. 若 $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) | y = x\}$, $B = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 1\}$, 则 A, B 关系 ()

A. $A \subseteq B$ B. $B \subseteq A$ C. $A = B$ D. $A \subseteq B$

7. 集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$, 满足 $B \subseteq A$, 则 a 的一切值的集合是 _____.

8. 集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | 2m - 1 \leq x \leq 2m + 1\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

9. 非空数集 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 S 还满足条件: 若 $a \in S$, 则 $6 - a \in S$. 符合上述条件 S 的个数是 _____.

10. 已知 $A = \{x | \frac{6}{3-x} \in \mathbb{N}_+, x \in \mathbb{Z}\}$, 用 $A =$ _____ (用列举法表示).

11. 已知 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $B = \{x | a \leq x < a + 4\}$, 若 $A \supseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

12. 已知 $A = \{-1, a^2 - 3, a^2 + 1\}$, $B = \{a - 3, a - 1, a + 1\}$. 若 $\{-2\} \subseteq A$, 且 $\{-2\} \subseteq B$, 求实数 a 组成的集合的真子集的个数.

三级讲练·拓广探索



课堂讲解

【例1】设集合 $A = \{x|x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x|x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbb{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值.

名师导引: 由于 $B \subseteq A$, 若 $B = \emptyset$, 则显然有 $B \subseteq A$, 另外还有 $B \subsetneq A$ 或 $B = A$, 故必须分类讨论.

解答: $\because A = \{0, -4\}$, 由于 $B \subseteq A$, 于是可分类讨论

(1) 若 $A = B$, $B = \{0, -4\}$, 因此 $0, -4$ 是方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 的两根,

$$\therefore \begin{cases} -2(a+1) = -4, \\ a^2 - 1 = 0, \end{cases} \therefore a = 1.$$

(2) 若 $B \subsetneq A$ 可分为

① $B = \emptyset$ 时, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, $\therefore a < -1$.

② $B \neq \emptyset$ 时, $B = \{0\}$ 或 $B = \{-4\}$, $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0$, $\therefore a = -1$ 此时方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 即为 $x^2 = 0$ 有惟一解 $x = 0$, $B = \{0\}$ 满足条件 $B \subsetneq A$.

综合得, 所求实数 a 的取值为 $a \leq -1$ 或 $a = 1$.



课后练习

1. 已知 $A = \{y|y > 0\}$, 集合 $B = \{x|(m+2)x^2 + 2mx + 1 \leq 0\}$.

试讨论是否存在实数 m , 使 $B \subseteq A$.

2. 设 A, B 是两个非空集合, 定义 A 与 B 的差集 $A - B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

(1) 试举出两个集合 A, B 求它们的差集;

(2) 差集 $A - B$ 与 $B - A$ 是否一定相等? 说明你的理由;

(3) 已知 $A = \{x|x > 4\}$, $B = \{x||x| < 6\}$, 求 $A - (A - B)$ 及 $B - (B - A)$. 由此你可以得到什么更一般的结论? (不必证明)

1.2.2 集合的运算



一级讲练·教材解读



课堂讲解

知识点1 交集

对于两个给定的集合 A, B , 由属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合, 叫做 A, B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”.

【例1】讨论图 1-2-1 中的 $A \cap B$.

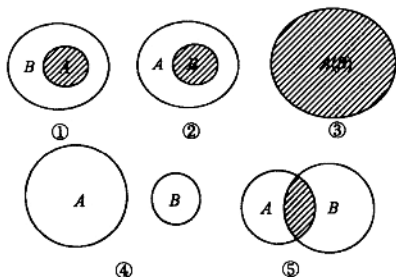


图 1-2-1

名师导引: 根据交集的定义即可得各图中的 $A \cap B$.

解答: 对于①, $A \cap B = A$; 对于②, $A \cap B = B$; 对于③, $A \cap B = A$ (或 $A \cap B = B$); 对于④, $A \cap B = \emptyset$; 对于⑤即为图中阴影部分.

【例2】已知 $M = \{x|y^2 = x + 1\}$, $P = \{x|y^2 = -2(x - 3)\}$, 则 $M \cap P =$ ()

A. $\{(x, y)|x = \frac{5}{3}, y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\}$

B. $\{x|-1 < x < 3\}$

C. $\{x|-1 \leq x \leq 3\}$

D. $\{x|x \leq 3\}$

名师导引: 识别两个集合 M, P 的性质, 弄清元素是什么, 是求 $M \cap P$ 的关键.

直接法:

$$M: x = y^2 - 1 \geq -1 \quad \text{即 } M = \{x|x \geq -1\}.$$

$$P: x = -\frac{1}{2}y^2 + 3 \leq 3 \quad \text{即 } P = \{x|x \leq 3\}.$$

$$\therefore M \cap P = \{x|-1 \leq x \leq 3\} \therefore \text{应选 C.}$$