小学数学

奥林匹克起跑线

六　年　级　分　册

编委会主任　陆明德

编委会副主任　裘宗丞　王　林　游建华　孙丽谷　李　莉　周仲武

编　　委　陆明德　裘宗丞　王　林　游建华　孙丽谷　陈双九　花仁和　盛宝良　凌国伟　朱红伟　丁锦华　杜绮兰　郭清林　方学法　骆祖瑶　卞　强　游基宏　赵吕森　孙海鹰　赵啸萍　周仲武　李　莉

主　　编　游建华　孙丽谷

副 主 编　孙海鹰　赵啸萍

编 写 者　游建华　孙丽谷　王时军　王玉莉　田爱平　沈本领　顾明珠

江　苏　少　年　儿　童　出　版　社

书　　名　奥林匹克起跑线·小学数学(六年级分册)
责任编辑　张　磊
出版发行　江苏少年儿童出版社
地　　址　南京高楼门 60 号
邮政编码　210008
经　　销　江苏省新华书店
印 刷 者　扬州广陵文化印刷厂
开　　本　787×1092　毫米　1/32
印　　张　9.75
印　　数　1—30,000 册
字　　数　156 千字
版　　次　1999 年 9 月第 1 版
　　　　　1999 年 9 月第 1 次印刷
标准书号　ISBN　7—5346—2145—3/G·1031
定　　价　9.70 元

前　言

（一）我们为什么要编写这套书。

近两年，随着小学升初中的区域性统考逐渐被取消，小学数学竞赛活动悄然升温，这是一件好事。这种升温已经不同于过去的人为炒热，也不是盲目地赶时髦，而是建立在成熟的价值取向即素质教育观基础之上的理智选择，是全面实施素质教育的必然结果。

广大师生和家长们越来越强烈地感受到，统考容易导致无意义的分数竞争，导致低水平的重复训练，使孩子不堪重负，甚至思维僵化，视野狭窄。取消统考后，小学生自主学习的天地更加广阔了，越来越多的孩子如饥似渴地从课堂之外吸取他们健康成长所需要的丰富营养。通过阅读课外书，开拓知识视野是他们吸取营养的一条重要途径。

奥林匹克运动的理想是“更高、更快、更强”，是超越自我。数学奥林匹克也有着同样的宗旨，即通过数学竞赛活动的推动，使蕴藏在广大青少年身上的各种智力的、非智力的潜能充分发挥出来，使他们的思维水平表现得更高、更快，使他们的学习意志、学习能力表现得更强。数学奥林匹克同样重在参与——不是为

了超过别人，而是为了超越昨天的自己。

体育奥林匹克在促进体育成绩提高的同时，推动着全民健身运动的普及，数学奥林匹克竞赛也大大超越了“选拔数学尖子”的简单意义，它广泛吸引着越来越多的数学爱好者，给他们智慧与美的启迪，给他们理性思维的熏陶，塑造他们热爱科学、追求真理、锲而不舍的良好品质。

所以，我们编写了这套书，并冠以书名——《奥林匹克起跑线》，希望同学们在通往奥林匹克理想的道路上迈好第一步。

（二）这套书的特色。

在构思和编写这套书的过程中，全体编著者努力追求形成一定的特色。这些特色主要有：

1. 完整。全书共分4册，其内容覆盖了小学数学竞赛可能涉及的几乎全部知识，针对小学数学竞赛指导起步早的特点，根据小学三、四、五、六年级数学爱好者的不同认知水平和不同阅读需要，每个年级分别专门编写一册，最大程度地满足了各层次读者的需要。

2. 实用。每册书中所安排的各个知识点都尽可能在现行小学数学教科书相应的知识点上延伸或拓宽，并尽可能与教科书同步。正是这种贴近课本、贴近读者的特点，决定了这套书比其他同类书更便于

自学，更适合作为奥林匹克学校和数学竞赛辅导的教材。

3. 启发性强。这套书在例题安排上是经过深思熟虑的。不仅注意到问题之间循序渐进的演变，而且以“总结与提示”的形式引导读者在分析比较中总结、提炼，在“练习与思考”中体会、回味。这些回味式、提示性的话，能够帮助读者掌握方法、形成技能，帮助他们学会举一反三、触类旁通。

4. 不是单纯的解题指导。这套书在引入话题、分析例题中注意了适当的拓宽和引伸。在每一讲的最后都设有一个小栏目——“探索与博览”，这对激发读者的学习兴趣、拓展读者的知识视野是十分有益的。有些知识可能读者一时不容易接受，但有时适当留下一点疑问恰恰能维持日后继续探索的兴趣和念头。

5. 在实验的基础上编写而成。这套书是在《小学生数学报》少年数学爱好者俱乐部教学实验的基础上编写而成的，实验证明它具有较强的可操作性，可以作为一套普及性教材推广使用。

（三）读好用好这套书。

“尽信书，则不如无书”。读者在阅读本书时，经常接触到的是题目。对这些题目，如果读者自己不首先作一番认真、全面的独立思考，那就失去了许多锻炼思维的好机会。直接去翻书上现成的解答算不上是真

正的参与。笔者在采访历届“华罗庚金杯赛”的金牌得主陆昱、姚一隽、徐开闻、戴明劼等同学时发现，他们有一条共同的经验——独立思考。徐开闻曾介绍说：“当做习题遇到困难时，我从不先去翻书上的答案，而是‘逼’自己多动脑筋。我认为，即使自己的想法不如书上的巧妙，也比不加思索就去找现成的答案好。”这种良好的习惯很值得大家学习。所以，我们建议——对本书中的每一道题，读者应尽可能独立思考，并作出解答。

不仅如此，读者还要把自己的解法同本书提供的解法进行比较，以拓宽思路，多中选优。对本书中的例题和思考题，希望读者顺着我们的提示，作一番认真的探索，尽可能不留下疑问。在阅读思考的同时，要敢于摆脱束缚，勇于挑剔，提出自己独特的见解；在分析、解题、回顾的过程中，应当把一些更有价值的心得体会总结出来。

希望广大小读者在读完这本书时，能够获得由本书引发出来的更丰富、更精辟的启迪。如果是这样，我们将感到无比欣慰。

如果这套书被选作奥校或数学课外活动的教材，那么我们希望老师们能根据不同层次学生的实际和需要，灵活地选择其中的内容、问题，因材施教。

因时间仓促，书中难免出现疏漏和错误，希望读

者多多批评指正。

本书“探索与博览”栏目中选用了《小学生数学报》上的一些优秀科普作品，谨向有关作者和编辑表示谢意！

游建华　孙丽谷

目录

第 1 讲 抽屉原理(一) …………………… (1)

第 2 讲 抽屉原理(二) …………………… (9)

第 3 讲 定义新运算 …………………… (16)

第 4 讲 逻辑推理 …………………… (23)

第 5 讲 综合推理 …………………… (36)

第 6 讲 对策问题 …………………… (47)

第 7 讲 最大最小问题(一) …………… (54)

第 8 讲 最大最小问题(二) …………… (64)

第 9 讲 最优化问题 …………………… (74)

能力测试(一) …………………………… (83)

第 10 讲 分数运算中的技巧(一) …… (86)

第 11 讲 分数运算中的技巧(二) …… (94)

第 12 讲 比较大小 …………………… (104)

第 13 讲 估值的技巧 ………………… (115)

第 14 讲 找规律 ……………………… (126)

第 15 讲　不定方程(组) …………………… (139)
第 16 讲　比的应用 ………………………… (150)
第 17 讲　分数、百分数应用题(一)
…………………………………… (160)
第 18 讲　分数、百分数应用题(二)
…………………………………… (171)
第 19 讲　分数、百分数应用题(三)
…………………………………… (181)
能力测试(二) …………………………… (190)
第 20 讲　工程问题(一) ………………… (193)
第 21 讲　工程问题(二) ………………… (203)
第 22 讲　工程问题(三) ………………… (213)
第 23 讲　有关圆的计算(一) …………… (224)
第 24 讲　有关圆的计算(二) …………… (233)
能力测试(三) …………………………… (241)
第 25 讲　综合题选讲 …………………… (244)
综合练习(一) …………………………… (258)
综合练习(二) …………………………… (260)
综合练习(三) …………………………… (262)
综合练习(四) …………………………… (265)

综合练习(五) …………………………… (267)
综合练习(六) …………………………… (270)
综合练习(七) …………………………… (272)
综合练习(八) …………………………… (275)
能力测试(四) …………………………… (278)
参考答案 ………………………………… (281)

第1讲

抽屉原理（一）

我们来完成这样一个操作：把3本书放入A、B两个抽屉，看有几种不同的放置方法。

操作的结果如下表。把表中4种不同的结果用一句话来概括就是：把3本书放入2个抽屉，无论怎么放，必定有一个抽屉里至少有2本书。

放书的方法＼抽屉	A	B
第1种	3	0
第2种	2	1
第3种	1	2
第4种	0	3

生活中这样的例子很多：

把5只苹果放入4个果盘里，那么一定有某个果盘里至少有2只苹果；

13名同学中至少有2人在同一个月出生；

如果从5双袜子中挑出6只来，那么挑出的6只袜子中

必定有 2 只是配对的；

如果把 22 个“三好学生”的名额分配给 4 个班级，那么至少有一个班级分得的名额多于 5 名；

如果把 15 名同学安排坐到 7 张长凳上，那么必有一张长凳上至少坐 3 名同学；

……

上面这些简单的事实，你可能碰见过，你也可以验证它。从这些事实中，可以概括出“抽屉原理”的两条原则。我们先学习第 1 条原则以及它的应用。

原则Ⅰ　如果把 $n+k(k\geqslant 1)$ 件东西放入 n 个抽屉，那么至少有一个抽屉中有 2 件或 2 件以上的东西。

例题与方法

例 1　某次联欢会有 100 人参加，每人在这个联欢会上至少有一个朋友。那么，这 100 人中，至少有几个人的朋友数相同？

思路点拨

“至少有一个朋友”的意思是：朋友的人数可能是 1 人，2 人，3 人……但最多是 99 人。因为共 100 人，除自己以外还有 99 人，即使这 99 人全是某个人的朋友，他最多有 99 个朋友。

【解】

参加联欢会的人的朋友数，可能有 99 种不同的情况。把这 99 种不同的情况看作 99 个抽屉，把 100 个人看作 100 件东西。根据抽屉原理原则Ⅰ，这 100 人中至少有 2 人属同一种情况，即朋友数相同。

例 2　在长度为 2 米的线段上任意点 11 个点，至少有两个点之间的距离不大于 20 厘米。为什么？

思路点拨

在20厘米长的线段上任意点两个点，如果这两点处在线段的两个端点上，则它们的距离为20厘米；如果这两点处在线段的两个端点之内，则它们的距离小于20厘米。总之，它们的距离不大于这条线段的总长。

【解】

把2米长的线段平均分为10段，每段长20厘米。把每一段看作一个抽屉，共10个抽屉。将11个点放入10个抽屉中，至少有1个抽屉中放了(点了)2个点。在同一个抽屉(同一段)中，这两点的距离一定不大于这段的总长20厘米。

例3 任意4个自然数，其中至少有两个数的差是3的倍数。这是为什么？

思路点拨

你可以先取若干组自然数，每组4个，然后看这个结论是否成立。再寻找其中差是3的两个数有什么共同点。这样，你不难发现这样一条规律：如果两个自然数除以3的余数相同，那么这两个自然数的差是3的倍数。而任何一个自然数被3除的余数，或者是0，或者是1，或者是2。根据这3种情况，可以把自然数分成3类。

【解】

把自然数按照它们被3除所得的余数分为3类，我们把这3类看作3个抽屉，把任意4个自然数看作4件东西，根据抽屉原理，必定有一个抽屉里至少有2个数。换句话说，4个自然数分成3类，至少有两个是同一类。既然是同一类，那么这两个数被3除的余数就一定相同。所以，任意4个自然数，至少有2个自然数的差是3的倍数。

想一想：例 3 中 4 改为 7，3 改为 6，结论成立吗？

例 4　(1)从 1 到 100 的自然数中，任取 52 个数，其中必有两个数的和为 102；(2)从 1 到 100 的所有奇数中，任取 27 个不同的数，其中必有两个数的和等于 102。请说明理由。

思路点拨

根据题目中的结论，可以设想所要制造的抽屉必须具备一个特点，即抽屉中的两个数相加，和必定是 102。考虑到 1 和 51 的特殊性，单独把它们分别存放在两个抽屉里为好。

【解】

(1)把(1)，(2，100)，(3，99)，(4，98)，…，(50，52)，(51)看作 51 个抽屉。任取 52 个数，放入这 51 个抽屉中，必有一个抽屉中要放入 2 个数。其中 1 号、51 号抽屉只能分别放 1 和 51，只能在 2 号～50 号的抽屉中放余下的 49 个，由这些抽屉的特点可知，这样的两个数，和必定等于 102。

如果把上面的"放入"改为"取出"，那么其中的道理更容易理解。这时，抽屉原理就可以理解为："从 n 个抽屉中取 $n+k$ 件东西，必定有一个抽屉中至少取出 2 件。"

(2)可以这样制造抽屉：(1)，(3，99)，(5，97)，…，(49，53)，(51)，共 26 个。从这些抽屉中取 27 个数，必有 2 个是从同一个抽屉中取出的(排除 1 号、26 号)，它们的和等于 102。

例 5　图 1-1 中画出了 3 行 9 列共 27 个小方格，将每一个小方格涂上红色或者蓝色。不论如何涂色，其中至少有两列的涂色方式相同。这是为什么？

图 1-1

思路点拨

根据题中结论，我们应该着眼于每列涂色的不同情况。每列有上、中、下 3 格，这 3 格中可任意涂上红、蓝两种颜色，共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$（种）不同的涂色方法。

【解】

由乘法原理，每列的涂色方法有：$2 \times 2 \times 2 = 8$（种）。把这 8 种不同的涂色方法看作 8 个抽屉，根据抽屉原理（原则 I），9 列中必有 2 列涂色方式相同。

总结与提示

理解抽屉原理，可以借助操作来试验，可以列举事例说明，也可以严格地进行证明：假设把 $n+k$ 件东西放到 n 个抽屉里，放 2 件或 2 件以上东西的抽屉一个也没有（与"必有一个抽屉放 2 件或 2 件以上的东西"相反），那么，每个抽屉最多只放 1 件东西，n 个抽屉最多有 n 件东西，与"$n+k$ 件东西"的条件矛盾。说明假设不正确，也就说明抽屉原理的结论是正确的。

运用抽屉原理的关键是"制造抽屉"，并确定抽屉的个数。通常，可采用把 n 件东西进行合理分类的方法来"制造抽屉"。比如，若干个同学可按出生的月份不同分为 12 类，自然数可按被 3 除所得余数分为 3 类等等。当抽屉个数不直接已知时，应当正确运用计数的方法与原理求出抽屉个数。

练习与思考

1. 举例说明抽屉原理原则 I。

例如，____

____。

2. 某小学学生的年龄最大为 13 岁，最小为 6 岁，至多需要从中挑选______个同学，就一定能使挑出的同学中有两位同学岁数相同。

3. 在 100 米的路段上植树，至少要植______棵树，才能保证至少有两棵树之间的距离小于 10 米。

4. 任意取______个自然数，才能保证至少有两个数的差是 7 的倍数。

5. 从 1 到 50 的自然数中，任取 27 个数，其中必有两个数的和等于 52。这是因为____。

6. 从 1，2，3，4，…，10 这 10 个数中，任取______个数，可以保证在这些数中一定能找到两个数，使其中一个数是另一个数的倍数。

7. 从 1，2，3，…，12 这 12 个数中，任意取出 7 个数，其中差等于 6 的数至少有______对。

8. 有红笔、蓝笔、黄笔、绿笔各两支，让一位小朋友随便抓两支，这位小朋友至少抓____次才能确保他至少有两次抓到的笔的种类完全相同。（每抓一次后又放回，再抓另一次。）

9. 学校买来历史、文艺、科普三种图书若干本，每个同学从中任意借两本。那么，至少____个学生中一定有两人所借图书的种类相同。

10. 有一大筐苹果和梨子，分成若干堆。如果要确保找到这样两堆，使这两堆中梨子的总数和苹果的总数都是偶数，那么，最少要把这些苹果和梨分成______堆。

探索与博览

反　证　法

在前面的“总结与提示”中，我们证明抽屉原理所用的方法在数学上称为反证法。运用反证法证明某个结论正确是我们的最终目的。要证明某个结论 A 正确，证明它的反面$\overline{A}$不正确也就达到目的了。但是，用反证法证明 A 正确，通常是先反设 A 不正确（即$\overline{A}$正确），在此前提下，结合题中条件，进行严密的推理，最终导出矛盾。为什么会出现矛盾？一步一步的推理是严密的、无懈可击的，只可能是前提不对，也就是当初的“反设”错了。既然“A 的反面”不对，那么 A 必定是正确的。这个过程可以简单表述为：

(1) 反设 A 不正确；

(2) 以$\overline{A}$正确为前提进行严密推理；

(3) 导出矛盾；

(4) 推翻假设（即否定$\overline{A}$），从而肯定 A。

反证法是数学上最常用、最重要的论证方法之一。

下面，我们用反证法来证明：在 $1, 11, 111, \cdots, \underbrace{111\cdots1}_{1999个1}$，这 1999 个自然数中，必有一个是 1999 的倍数。

证明：假设 $1, 11, 111, \cdots, \underbrace{111\cdots1}_{1999个1}$，这 1999 个数都不是 1999 的倍数，那么它们除以 1999 所得的余数只能分别是 1，2，3，…，1998 这 1998 种可能。根据抽屉原理原则 I，其中必有两个数被 1999 除所得的余数相同，它们的差应当是 1999 的倍数。