GAODENG SHUXUE XUEXI YU TIGAO ZHINAN

KAOYAN BIDU

高等数学学习与提高指南

——考研必读

陈鼎兴 姚 奎 编著

东南大学出版社

高等数学学习与提高指南

——考研必读

陈鼎兴　姚　奎　编著

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与提高指南：考研必读/陈鼎兴，姚奎编著．—南京：东南大学出版社，2006.4

ISBN 7－5641－0336－1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①陈…②姚…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 030489 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)

出版人：宋增民

江苏省新华书店经销　姜堰晨光印刷有限公司印刷

开本：850mm×1168mm　1/32　印张：18.25　字数：526 千字

2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷

印数：1～5000　　定价：25.00 元

(凡因印装质量问题，请直接联系读者服务部。电话：025－83792328)

前　言

作者从事高校本科数学教学有20余年，编写一本集知识、素质与能力于一体的高等数学学习和提高的教学参考书是我们长期的夙愿。在多方鼓励和帮助下，我们終于实现了这个愿望。

本书按现行的高等数学的教学体例分为14章。每章分内容提要和例题部分两大块。在内容提要中，我们归纳了主要概念、主要理论，并选择了某些内容做了特殊处理：比如概念问题，我们选了函数的概念，从历史的长河中阐述它的形成和发展过程，从感性到理性、从粗糙到精确，以期给青年读者作为借鉴；又如方法问题，我们通过标量函数的积分，详述了坐标与坐标网、积分元、区域正规化、定限原则等等，以期在数学素养方面有所启迪。在例题部分，我们精选了554道例题，涵盖面宽、代表性强。有历年的研究生入学试题，有各地的竞赛题，也有在我们长期教学中积累的而少见经传的问题，如不可公度的周期问题、无穷个无穷小之积的问题、收敛级数的逐项三次方发散问题等。本书也精选了407道练习题，这些题选自近年来的考研题和竞赛题，并附参考解答。

本书有浓郁的研究氛围，通过许多实例展示了研究的全过程，并注重科学思想方法的陶冶以及数学素养的提高，力求达到融知识、能力、素质于一炉。这是作者的最大心愿，以飨读者。

在本书的写作过程中得到了许多领导和同志的鼓励和帮助。福建工程学院给我们的写作提供了诸多方便；我们的老同事张学仁副教授、岳振军博士给予了热情的鼓励和支持；金逸芬女士花了大量的时间和心血为本书的版式作了精心的设计和校阅；唐燕贞小姐为本书习题的参考解答做了仔细的核对。对此，向他们表示最诚挚的感谢。

本书承东南大学管平教授的精心审阅，并提出了许多宝贵意见，在此，向管教授表示由衷的谢意。

由于作者的水平所限，本书必有某些错误和疏漏之处，敬请专家和读者不吝批评和赐教，我们将万分感激。

编　者

2006年1月

目　录

1 函 数

内容提要

一、函数的概念

1. 形成过程

函数概念的抽象有一个很长的历史过程. 它是在解决"动与静"的矛盾运动中形成的.

(一元) 函数给人的直觉是两个变量之间的依赖关系, 即"一个变量(y) 随着另一个变量(x) 的变化而变化". 变量(x) 称为自变量; 变量(y) 称为因变量, 又称为自变量的函数(简称函数).

由此可见, 函数是一个动态概念, 然而, 人的认识能力具有静态的特征, 这是一个矛盾. 如何解决这个矛盾呢?不难发现, 在函数关系中, 真正起主导作用的是自变量(x), 即当自变量 x 取定某个值时, 函数的值也就确定了. 因此, 形成了中学教科书中的函数定义: 函数是两个变量之间的对应法则.

进一步, 人们发现函数的对应的真正实体并不是变量, 而是两个数集, 即变量的取值范围(变量只是借用的记号罢了). 由此, 产生了近代的函数概念:

设 A, B 为任意两个非空数集, $\forall x \in A$, 按照某种法则 f, 存在唯一的 $y \in B$ 与之对应, 则称 f 为集合 A 到集合 B 的函数, 记为

$$f: A \to B \text{ 或 } y = f(x),\ x \in A$$

随着数学的研究范围的日益扩大, 特别是集合论的创立, 对应关系可以在任意两个集合中实现. 这就形成了非常重要的现代数学概念"映射".

定义 1 (映射)

设 A, B 为任意两个非空集合, $\forall x \in A$, 按照某种法则 f, 存在

唯一的 $y \in B$ 与之对应，则称 f 为集合 A 到集合 B 的映射，记为

$$f:A \to B$$

注：在映射的概念中，还有两个模糊的地方：① 法则，② 对应，它们的含义是不明确的. 为了消除这个模糊性，需要引入两个新概念"直积"和"关系". 请参阅本章的附录.

映射概念的图示如下：

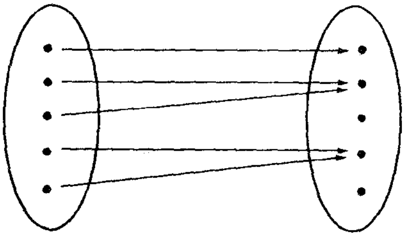

图 1.1　映射

2. 映射

映射是一个重要的概念，它有许多别名、雅号，举例如下：

(1) 若 A,B 是两个任意集合，则映射 $f:A \to B$ 称为映射；

(2) 若 $B \subset \mathbf{R}$，则映射 $f:A \to B$ 称为泛函；

(3) 若 $A,B \subset \mathbf{R}$，则映射 $f:A \to B$ 称为一元函数，即函数是数集到数集的映射；

(4) 若 $A \subset \mathbf{R}^n$，$B \subset \mathbf{R}$，则映射 $f:A \to B$ 称为 n 元函数；

(5) 若 $A \subset \mathbf{R}$，$B \subset \mathbf{R}^m$，则映射 $f:A \to B$ 称为 m 维向量函数，又称为参数方程($m = 2,3$ 是高等数学的研究重点)；

(6) 若 $A \subset \mathbf{R}^n$，$B \subset \mathbf{R}^m$，则映射 $f:A \to B$ 称为 n 元 m 维向量函数，又称为变换，它将 n 维空间的点变换成 m 维空间的点；

(7) 若 A,B 是两个函数空间，则映射 $f:A \to B$ 称为算子；等等.

二、函数的构成

1. 四则运算

设函数 $f(x)$，$x \in A$；$g(x)$，$x \in B$. 则函数

$$f(x) \pm g(x),\ x \in A \cap B;$$
$$f(x) \cdot g(x),\ x \in A \cap B;$$
$$f(x)/g(x),\ x \in A \cap B - B',$$
其中 $B' = \{x \mid g(x) = 0,\ x \in B\}$.

2. 函数复合

设函数 $f: A \to B$; $g: C \to D$. 则函数
$$g(f(x)),\ x \in A' = \{x \mid f(x) \in C,\ x \in A\}$$
称为复合函数.

两个函数的复合必须满足:内层函数的函数值属于外层函数的定义域.如果不满足这个条件,就要缩小内层函数的定义域(如上),从而缩小了内层函数的函数值域,使得该条件满足.

注:函数的复合满足结合律,但不满足交换律.

3. 反函数

定义 2 (单射、满射、双射)

若映射 $f: A \to B$ 满足

(1) $\forall x_1, x_2 \in A$,如果 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,则 f 称为单射;

(2) $\forall y \in B$,都有 $x \in A$,使得 $f(x) = y$,则 f 称为满射;

(3) 一个既单又满的映射称为双射,又称为一一对应.

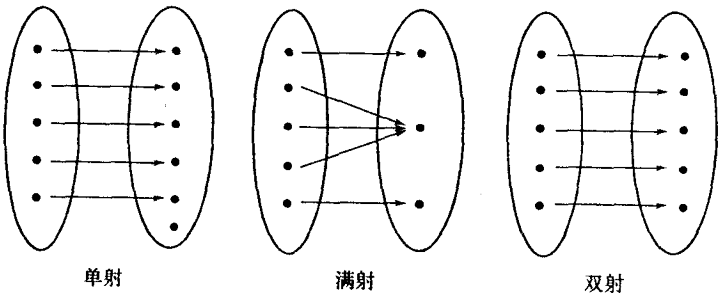

图 1.2 单射、满射和双射

若 $f: A \to B$ 是一个双射,则有逆映射 $f^{-1}: B \to A$,使得
$$f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A;\ f(f^{-1}(x)) = x,\ x \in B \qquad (1.1)$$

注：式(1.1)的两个等式的含义是不一样的，前者是集合 A 上的恒等式，后者是集合 B 上的恒等式.

如果 $f:A\to B$ 不是一个双射，有没有逆映射呢？从严格意义上讲，它没有逆映射，但是，我们可以变通. 首先，可以缩小集合 B，使 f 是一个满射；然后，取 $A_1\subset A$，使得映射 $f:A_1\to B$ 是一个双射. 经过这样的处理可以得到逆映射 $f^{-1}:B\to A_1$. 由于 A_1 的选取不唯一，所以，一个不是双射的映射可能存在多个逆映射，称它们为逆映射分支. 以后，我们都在这个变通的意义上讨论逆映射.

4. 隐函数

设二元函数方程

$$F(x,\ y)=0. \tag{1.2}$$

集合 $A=\{x\mid \exists y,\ 使得\ F(x,\ y)=0\}$，$B=\{y\mid \exists x,\ 使得\ F(x,\ y)=0\}$，分别称为方程(1.2)在 x，y 轴上的投影.

如果存在函数 $\varphi:A\to B$（或 $\psi:B\to A$），使得

$$F(x,\ \varphi(x))\equiv 0,\ x\in A\ （或\ F(\psi(y),\ y)\equiv 0,\ y\in B），$$

则函数 $y=\varphi(x)$，$x\in A$（或 $x=\psi(y)$，$y\in B$）称为由方程(1.2)决定的隐函数.

5. 极限函数

设函数序列 $f_n(x)$，$x\in A$（公共定义域），则函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\ x\in A_1=\{x\mid \lim_{n\to\infty}f_n(x)\ 存在,\ x\in A\}$$

称为极限函数.

6. 导函数（见本书第 4 章）

7. 不定积分（见本书第 6 章）

8. 函数项级数（见本书第 13 章）

注：5，7，8 都可能产生非初等函数.

三、初等函数

初等函数是高等数学的主要研究对象.

1. 基本初等函数

下列五类函数称为基本初等函数:

(1) 幂函数(含常数函数)x^a, $a \in \mathbf{R}$;

(2) 指数函数 a^x, $a > 0, a \neq 1$;
(3) 三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$;
} 指数型函数

(4) 对数函数 $\log_a x$, $a > 0, a \neq 1$;
(5) 反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$,
$\arctan x$, $\text{arccot}\, x$.
} 对数型函数

> 注:指数型函数及对数型函数的分类是由作者提出的,在导数与不定积分的学习和研究中有用.

2. 初等函数

由基本初等函数(含常数函数)经过有限次并列四则运算,复合,并在它的定义域上,有一个统一的分析表达式,这样形成的一个函数大类,称为初等函数类.

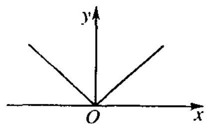

图 1.3 绝对值函数

3. 其他常见的函数

(1) 绝对值函数(见图 1.3)

$$\text{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 符号函数(见图 1.4)

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

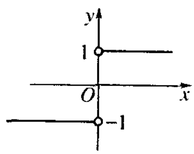

图 1.4 符号函数

> 注:有些教材中定义 $\text{sgn}(0) = 0$,本书中不用此定义.

(3) 取整函数(见图 1.5)

$$\mathrm{int}(x)=[x].$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数($[x]\leqslant x<[x]+1$).

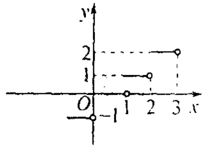

图 1.5　取整函数

(4) 小数函数

$$\{x\}=x-[x].$$

(5) Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

(6) Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{ 是互质的整数},p>0),\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

注:(1) 和(2) 中的函数称为分段函数,即函数的定义域分成有限段,在每一段上有各自的表达式;(2) 和(3) 中的函数称为阶梯函数,它的图形像一个梯子.

四、函数的一般性质

1. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 A 关于原点对称($\forall x\in A\Rightarrow -x\in A$),且

(1) 若 $\forall x\in A$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 称为奇函数;

(2) 若 $\forall x\in A$,都有 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 称为偶函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$, $x\in A$,满足 $\exists M_0>0$,使得 $\forall x\in A$,都有 $|f(x)|\leqslant M_0$,则称函数 $f(x)$ 在 A 有界.

注:1. 函数 $f(x)$ 在 A 无界:$\forall M>0$, $\exists x_0\in A$,使得 $|f(x_0)|>M$.

2. 你会讲反话吗?在数学中常常需要讲“反话”(如反证法).什么是反话?设 I 为问题的论域,$A,B\subset I$,若有

$$(1)\ A \cap B = \varnothing, (2)\ A \cup B = I,$$

则称 A, B 互为反话.

如果仅满足(1),这样的 A, B 称为对立话,而不是反话.在我们的日常生活中,常常将对立话误认为反话,必须引起重视.

如何正确而熟练地讲出一句话的反话呢?注1给了一个讲反话的范例.除去通常的"$\geqslant$ 与 $<$, $>$ 与 $\leqslant$, $=$ 与 $\neq$, $\in$ 与 $\notin$"等等互易外,"$\forall$ 与 $\exists$"的互易是讲反话的关键,请仔细体会之.

3. 单调性

设 $f(x)$, $x \in A$, 满足 $\forall x_1, x_2 \in A$, 且 $x_1 < x_2$, 都有

$$f(x_1) \leqslant (\text{或} \geqslant) f(x_2), \tag{1.3}$$

则称 $f(x)$ 为 A 上的单调递增(或单调递减)函数.如果把式(1.3)的 $\leqslant$(或 $\geqslant$)改成 $<$(或 $>$),则称 $f(x)$ 为 A 上的严格单调递增(或严格单调递减)函数.单调递增(或单调递减)函数统称为单调函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$, $x \in A$ 及 $T \neq 0$(其中 A 具有 T 周期,即 $\forall\ x \in A \Rightarrow x \pm T \in A$),且有 $\forall\ x \in A \Rightarrow f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

注:(以 T 为周期的反话)函数 $f(x)$ 不以 T 为周期
$\Leftrightarrow \exists\ x_0 \in A \Rightarrow f(x_0 + T) \neq f(x_0)$.

例题部分

一、定义域

函数构成法中关于定义域的论述是初等函数的自然定义域的理论基础,将它们应用于初等函数中,便产生了一系列规则,诸如:分母 $\neq 0$,开偶数次方被开方数 $\geqslant 0$,对数的真数 > 0,等等.这里不再赘

述了.

例 1.1　求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\lg\cos x}$ 的定义域.

解　由求定义域的基本理论,得到

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \lg\cos x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},(n=0,\pm 1,\cdots),\\ x\neq 2n\pi\end{cases}$$

因而,本题的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

—解毕—

例 1.2　设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$,求 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域.

解　$f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $0<\dfrac{[x]}{x}<1$. 由 $[x]$ 的性质,得 $[x]\leqslant x<[x]+1$;当 $x<0$ 时,$\dfrac{[x]}{x}\geqslant 1$;当 x 是正整数时,$\dfrac{[x]}{x}=1$;当 $0<x<1$ 时,$[x]=0$.

综上所述,$f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $x>1$,且 x 不为整数.

—解毕—

二、求值

求函数值的问题一般都比较简单,这里不予讨论. 下面举一个比较特殊的例子.

例 1.3　设 $f(x)=(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$,求 $a_1+a_2+\cdots+a_6$.

（上海市高等数学竞赛试题）

解　$\because f(0)=a_0=(-1)^7=-1$,

$$a_7=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^7}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)^7}{x^7}=3^7,$$

$$f(1) = a_7 + a_6 + \cdots + a_1 + a_0 = 2^7,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = f(1) - a_0 - a_7 = 2^7 - 3^7 + 1.$$

— 解毕 —

三、复合函数

例 1.4 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leqslant 3, \\ 0, & |x| > 3, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解 $f(f(x)) = \begin{cases} 1 - f^2(x), & |f(x)| \leqslant 3, \\ 0, & |f(x)| > 3 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1-(1-x^2)^2, & \begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ |1-x^2| \leqslant 3, \end{cases} \\ 1-0, & \begin{cases} |x| > 3, \\ |0| \leqslant 3, \end{cases} \\ 0, & \begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ |1-x^2| > 3, \end{cases} \\ 0, & \begin{cases} |x| > 3, \\ |0| > 3 \end{cases} \end{cases} = \begin{cases} 2x^2 - x^4, & |x| \leqslant 2, \\ 1, & |x| > 3, \\ 0, & 2 < |x| \leqslant 3. \end{cases}$$

— 解毕 —

注:复合函数的要点是:将内层函数代入外层函数的表达式的同时,要代入它的定义域,然后分别解不等式组.

例 1.5 设 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2^{x-\frac{1}{2}}, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ 且当 $x > 1$ 时, $f(x) = 2^{f(\log_2 x)}$, 求 $f(f(x))$.

解 当 $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{1}{2} \leqslant f(x) = x + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f(f(x)) = 2^{f(x)-\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 2^x,$$

又 $x=\frac{1}{2}$ 时，

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=2^{\frac{1}{2}}=2^{x};$$

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，

$$1<f(x)=2^{x-\frac{1}{2}}\leqslant 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad 0<\log_2 f(x)=x-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad f(f(x))=2^{f(\log_2 f(x))}=2^{f\left(x-\frac{1}{2}\right)}=2^{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=2^{x},$$

又 $x=1$ 时，

$$f(f(1))=f(2^{\frac{1}{2}})=2^{f\left(\frac{1}{2}\right)}=2^{2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}=2=2^{x}.$$

所以，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(f(x))=2^{x}$.

> 注：由此，我们估计 $f(f(x))=2^{x},x\geqslant 0$. 下面用数学归纳法加以证明.

令 $x_0=0$，$x_n=2^{x_{n-1}}$，$n=1,2,3,\cdots$.

(1) 当 $0=x_0\leqslant x\leqslant x_1=2^{x_0}=1$ 时，$f(f(x))=2^{x}$；

(2) 设 $x_{k-1}<x\leqslant x_k$ 时，有 $f(f(x))=2^{x}$，则当 $x_k<x\leqslant x_{k+1}$ 时，有 $x_{k-1}<\log_2 x\leqslant x_k\Rightarrow f(f(\log_2 x))=2^{\log_2 x}=x$，从而得到

$$f(f(x))=f(2^{f(\log_2 x)})=2^{f(\log_2(2^{f(\log_2 x)}))}=2^{f(f(\log_2 x))}=2^{x}.$$

所以，由数学归纳法，对一切自然数 n，都有

$$f(f(x))=2^{x},\ x_{n-1}\leqslant x<x_n，也即\ x\geqslant 0\ 成立.$$

—解毕—

> 注：本题巧妙地构造了一个函数 $f(x)$，使得 $f(f(x))=2^{x}$. 请将它推广到一个更一般的函数.

四、反函数

例 1.6 请问函数 $y=x^2$，$-\infty<x<+\infty$ 有多少个反函数分支？

解 该函数有无穷个反函数分支，除 $x=\pm\sqrt{y}$，$y\geqslant 0$ 外，还有

$\forall a > 0, x = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \leqslant y \leqslant a, \\ -\sqrt{y}, & y > a, \end{cases}$ 等等，都是它的反函数分支.

— 解毕 —

注：许多人在看了解答前，会不假思索地回答：2 个. 其实，它的连续的反函数分支只有 2 个，不连续的反函数分支有无穷多个. 类似的情况也出现在隐函数中，如由方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 所决定的隐函数有多少个？请讨论之.

例 1.7 设 $f(x) = \sin x \mid \sin x \mid, \mid x \mid \leqslant \frac{\pi}{2}$，求 $f^{-1}(x)$.

（江苏省高等数学竞赛试题）

解 由 $y = f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\sin^2 x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0 \end{cases}$ 得到

$$x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{y}, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ -\arcsin\sqrt{-y}, & -1 \leqslant y < 0. \end{cases}$$

将变量 x, y 互换，便有

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \arcsin\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arcsin\sqrt{-x}, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

— 解毕 —

例 1.8 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，求 $f(3x+1)$ 的反函数.

解 令 $y = f(3x+1) \Rightarrow g(y) = g(f(3x+1)) = 3x+1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(g(y)-1)$，所以，$y = f(3x+1)$ 的反函数为

$$y = \frac{1}{3}(g(x)-1).$$

— 解毕 —

注：如果我们把函数符号看作一件“衣服”，那么，可以脱去这件“衣服”的操作是反函数. 这是求抽象函数的反函数的要点.

五、奇偶性

例 1.9 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 中定义的偶函数，且 $f(x)=x^3-3x^2-x+5$，$x\geqslant 0$，求 $f(x)$.

解 当 $x<0$ 时，

$$f(x)\overset{偶}{=}f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2-(-x)+5$$
$$=-x^3-3x^2+x+5,$$

故

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2-x+5, & x\geqslant 0,\\ -x^3-3x^2+x+5, & x<0.\end{cases}$$

— 解毕 —

> 注：本问题实际上是将一个在 $x\geqslant 0$ 上定义的函数按偶函数的要求开拓到 $(-\infty,+\infty)$，称为偶开拓. 同一个问题能否进行奇开拓？本题是不可以的，因为，任意一个奇函数 $f(x)$ 都有 $f(0)=0$，而原题 $f(0)=5$. 这是一个细节，请留意. 如果允许改变 $f(0)$ 的值，使 $f(0)=0$，那么，奇开拓为
>
> $$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2-x+5, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x^3+3x^2-x-5, & x<0.\end{cases}$$
>
> 顺便提一句，敏感的读者也许会做出如下的小结：偶开拓改变奇次项系数的符号，奇开拓改变偶次项系数的符号. 这样的小结好吗？作者认为：不好，因为它没有本质的意义. 所以，在学习和研究中没有必要死记硬背一些非本质的结论来充斥头脑，要善于掌握基本原理，而不必做类似以上这样的小结.

例 1.10 证明：任意一个定义于关于原点对称的区间上的函数 $f(x)$ 都可以表示成奇函数与偶函数之和.

> 分析：设 $f(x)=g(x)+h(x)$，其中 $g(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数，则
>
> $$f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)$$
>
> $$\Rightarrow\qquad g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)),\ h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)),$$
>
> 即可得如下证明.

证明 令