21世纪高等院校教材

教育类

几何课程研究

王家铧　沈文选 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材·教育类

几何课程研究

王家铧　沈文选　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书较系统地分析了中学数学课程中与几何相关的知识内容. 重点分析了数学课程标准选修系列中新扩充的几何内容和中学原有教学内容的难点，突出了对几何知识的研究性. 本书力图给数学教师一个几何知识的整体结构和几何的基本思想方法，配有大量的例题与习题. 本书通俗易懂，可读性强，有助于提高数学教师驾驭教学的能力.

本书可以作为高等师范院校大学生"中学数学教材分析"课程的教材，也可作为教师继续教育的培训教材和中学教师进行数学学科教学研究的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

几何课程研究 / 王家铧,沈文选主编. —北京:科学出版社,2006
(21世纪高等院校教材・教育类)
ISBN 7-03-017602-2

Ⅰ.几… Ⅱ.①王… ②沈… Ⅲ.几何课-教学研究-高中-师资培训-教材
Ⅳ.G633.632

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第075398号

责任编辑:李鹏奇 宛 楠/责任校对:张小霞
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年9月第一次印刷 印张:16
印数:1—6 000 字数:304 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自 20 世纪 90 年代以来，我国中学课程改革蓬勃兴起，并逐步深入.《普通高中数学课程标准》已于 2003 年正式颁布，并已由多家出版社出版了经教育部教材审定委员会通过的教材. 2004 年，高中新教材在山东、广东、宁夏、海南四省首先实验使用. 至 2006 年，又有江苏、辽宁等省陆续实验使用高中新教材. 这标志着我国新一轮数学课程改革已经从义务教育阶段进入了普通高中正在全面展开. 而几何教学内容的改革历来是数学教育改革的热点且争议的问题较多，此次课改也不例外. 中学数学课程改革必将影响数学教师教育，同时，数学教师教育也应该且必须适应中学课程改革的这种新情况.《几何课程研究》一书正是在这种时代背景下的产物.

本书在原有“数学教材分析”课程的基础上，重点介绍了新扩充的内容. 特别是在《普通高中数学课程标准》选修系列中的几何内容，并力图给数学教师一个几何知识的整体结构和几何的基本思想方法，而不是针对新教材中的几何内容的具体分析. 书中既有传统的几何逻辑推理，也有现代几何公理化的体系；既有古老的欧氏《几何原本》的介绍，又有标志着数学进入现代数学时期的非欧几何和现代几何——凸体几何的知识呈现.

在江西师范大学孙熙春教授的积极策划下，在张奠宙教授的指导下，我们通过两次全国性的研讨会，设计编写了“中学数学课程研究”的系列丛书. 整个研究及编写过程都得到了科学出版社的责任编辑及有关人员的关注和具体指导.

本书的第一个特色是用通俗易懂的语言表述抽象的几何概念，力求做到返璞归真，揭示几何的朴素本质，注重分析几何知识的来龙去脉，强化几何的基本思想和方法，使学生达到对几何学实质性的理解；本书的第二个特色是突出了几何公理化的思想方法，它是数学中的一个很重要的思想方法，它不仅对数学科学本身的发展发挥了巨大的作用，而且对与其相关联学科的建设和发展都有着重要意义. 作为数学教师，有必要对公理化思想方法的起源、有关内容、结构、特征及其意义有一个大致的了解；第三个特色是构建数学文化的氛围. 数学文化是一个贯穿整个数学课程又很难明确表述的一种环境和氛围，本书结合几何发展史，介绍了几何学发展的基本规律和相关的数学文化；第四个特色是注重内容的应用性. 通过丰富的实例，说明解决几何问题的基本方法. 配备了大量的例题和解题方法，促进解题能力提高. 同时也拓宽了读者的视野，能在一定程度上提高读者的数学素养. 对于帮助在职教师和师范院校的学生尽快完善自身的认知结构，把

握数学课程标准中有关几何内容及对几何教学内容进一步改革的研究与探讨有着直接有效的作用.

本书由湖南师范大学沈文选教授总体策划，并编写了第 0 章、第 1 章、第 2 章、第 4 章部分内容、第 5 章、第 7 章、第 8 章部分内容、第 9 章及第 10 章. 沈阳师范大学王家铧教授编写了第 3 章、第 4 章及第 6 章部分内容. 沈阳炮兵学院基础部殷红老师编写了第 3 章、第 4 章、第 6 章、第 8 章的部分内容. 全书由王家铧负责整理统稿，最后由沈阳师范大学李忠海教授审查了书稿. 由于后期统稿时间仓促，不免会有疏漏，在此深表歉意.

本书可作为高等院校数学教育专业“中学数学教材分析”课程的教材，也可以作为数学教师继续教育的培训教材和数学学科教学研究的参考书. 本教材突出了几何的基本思想方法及研究性，具有一定的理论特点，但并未着意考虑全书的逻辑系统，因此使用它可以根据实际情况取舍部分内容，利教便学.

本书的内容取材于作者的长期研究成果，同时也吸收了国内外数学教育的研究成果，参考了较多的文献资料. 这些成果和文献资料的引用或借鉴，对本书的形成提供了不可或缺的基础和实例. 在此，向这些成果的创造人表示衷心的感谢. 希望在基础教育新课程改革的理论与实践的共同探讨中，为构建适合我国国情的几何课程体系，为基础教育课程改革多作一些有益的工作.

作　者

2006 年 6 月 9 日

目　　录

第0章　绪论——欧氏几何学的发展

0.1 形的起源

自远古以来，我们的祖先在与大自然作斗争的生存与发展中，直接通过无数次的观察，体验自然界的种种事物以获取知识. 相对于数的概念的起源来说，古人对形的认识要更直接，更具体些. 因为自然界始终把它的种种模样展现在他们面前，让古人直接从中提取形式. 因而，可以说数字属于创造，形属于摹写.

但是，自然界只是为人类提供了摹写的对象，人类要获得形的概念必须通过多次抽象. 只有当人类意识形成可以脱离具体对象，并且明确地把形式本身分离出来的时候，才能称得上有了图形的概念.

我们的祖先为了生存而狩猎，当他们多次被植物的刺扎伤皮肤之后，逐渐意识到带尖的物体可以刺人皮肉，于是通过摹写，最早的矛——带尖的木棍出现了. 他们在制造一边厚一边薄的石斧、弯的弓、直的箭的过程中，不仅仅被动地领会自然界的启示，而且逐步从自然界中分离出形的概念.

古人类处在严酷的自然环境中，雷鸣电闪、地震、洪水、猛兽的伤害等严重地威胁着他们的生存. 他们不得不对直接影响他们生存的动物和植物产生崇拜、恐惧的想法，这样就产生了最早的图腾崇拜与宗教仪式. 从产生于 35000 年到 40000 年前的旧石器时代的洞穴艺术中，我们看到反映古代人类社会关系、生殖礼仪、成年礼、狩猎前的仪式的壁画. 这些图画是如此粗犷、宏伟，每个看过的人都会产生心灵的震动.

因此图形作为人类对外界事物的反应和思维的一种形式，它产生于古人的生产方式以及与之相应的宗教意识，它最初与最强的表现对象只能是最能引起人类注意并强烈要表现的事物. 现代考古学的种种发现都证明了上述论断.

0.2 几何图形

图形最早出现在氏族的图腾崇拜和原始的宗教仪式中，它的表现形式是偶像和仿拟动物的舞蹈以及图画，幻术与图腾出现了，服务于这一行业的巫师也出现了. 从旧石器时代的葬礼和壁画来看，图形的样式由原来的直接写真转变成简化了的偶像和符号. 例如我国河南安阳出土的旧石器时代的车轮、陶器等古代文物上，装饰着复杂的图形，有五边形、七边形、八边形与九边形组成的精美图案. 陶器上鱼

的形象也是由单线条象征性表达的.

虽然所有那些富于宗教性的图形,更多的是具有习俗的和幻术的价值,并在后来发展成神灵观念的体现,但就图形本身来说,它却反映了由直接摹写到抽象表现的转变,它比写真图具有更大的可变性与欣赏价值,表现了生命对理性规范的渴望,进而影响到美德判断与标准.比如,对于平衡、对称、和谐、均匀的偏爱,给图形的几何化创造了条件.

图形几何化的主要动力是人类的生产实践.在旧石器时代晚期,生产力进一步发展,编织、轮的使用、砖房的建设,进一步促进几何图形的出现与认识.编织既是技术又是艺术,因此,除了一般的技术性规律需要掌握外,还有艺术上的美感需要探索,而这两者都必须先经实践,再经思考才能实现,这就给几何与算术打下了基础.因为织出的花样,其种种形式与经纬的数目,本质上属于几何性质,因而必然引起对形和数之间一些关系的深刻认识.

促进图形几何化的进程不仅限于编织,轮子的使用和砖房的建造都直接加深和扩大了对几何图形的认识.轮子的发明具有巨大的物质效果和科学意义.但其中最显著的作用大约要算对圆的认识和自觉应用了.人们对轮和圆的认识和研究,最明显的例子是圆周等分和轨迹的思想.直到今天,圆仍然是中学生学习的主要几何图形之一.

建筑操作,特别是砖房的建造对几何学基础的影响要早于土地丈量,砖的使用也出现于新石器时代,其独特的形状给人以强烈的印象.砖必然是长方体状的,不然就难于相互配合而砌成墙,而配合使用必然引起直角和直线的观念.直线出现于编织时织工拉紧的线,在建房中再次出现直线的形象,让人看到它的作用.

房屋建筑促进了直线、平面和立体的度量,因为它展示了平面面积与立体体积随着边的长度而变化的关系,为用边的长度来计算面积和体积奠定了思想基础.建筑术的发展又产生了比例设计法,对几何学的发展又是一个促进.

陶器的制作,尤其是陶器花纹的绘制有利于对空间关系的认识.空间关系,实质就是相互位置和大小的关系.前者由物体的彼此接触或毗边,由"……之间","在里面"等词语来表示;后者则用"大于"、"小于"等词语来表示.例如,公元前 4000 年～3500 年,埃及陶器上和波斯尼亚新石器时代陶器上的彩纹,都明显地表现出平行线、折线、三角形、长方形、菱形和圆.而且三角形又可细分为任意三角形、等腰三角形和等边三角形.

自然界很少有真正的几何图形,然而人类通过编织、制轮、建屋等实践造出形状多少有点正规的物体,这些不断出现而且世代相传的制品提供了把它们相互比较的机会,让人们最终找出共同之处,形成抽象意义下的几何图形.

0.3　实验几何

公元前 4000 年前后，人类由野蛮进入文明，由弱小分散的氏族部落组织结合成庞大而有序的社会，例如古代埃及等. 尼罗河定期泛滥，大量的冲击淤泥经常覆盖地界. 这种自然、地理现象对埃及古文明产生深远的影响，也促进了古代埃及几何——测地术的诞生. 尼罗河一年一度的泛滥肥沃了埃及的土地，也给土地所有者带来了麻烦，他们的地界每年被冲毁，必须用几何手段重新丈量. 因此，当时的地理条件和社会条件迫使埃及人发明土地测量技术，几何学也就作为一种经观察的结果作为定律的经验科学应运而生.

在世界上各民族的发展史上，几何学的产生大多出现在测量之中. 我国古代称测量人员为“畴人”，后来引申为一切数学家和天文学家. 正是通过测量长度、确定距离、面积和体积，人们发现了一些最简单的一般规律和一些几何关系.

由英国人兰德(A. Henry. Rhind)于 1858 在埃及购买的，后收藏于英国博物馆的古埃及“兰德”纸草书(Rhind papyri)是目前尚存的最古老的数学文献，载有 85 个数学问题，其中 26 个是关于几何学的. 从中可以看出当时埃及已经会求许多平面图形的面积和立体图形的体积了，知道等腰三角形的面积等于底边乘高的一半，并用直观方法验证了这个结论. 其中还有关于土地面积和谷仓容积的问题，计算的准确性令人吃惊. 纸草书的第三部分讲述如何去确定正方形、矩形、三角形、梯形以及能分割成这些形状的土地的面积. 也就是说埃及人把正方形、矩形、三角形和梯形作为基本图形，用于对其他各种图形面积的比较和计算. 埃及人关于圆面积的计算也比其他民族的结果更精确，他们把圆面积确定为以直径的$\frac{8}{9}$为边长的正方形的面积，即 $S=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$，这相当于取 $\pi=3.1605$，精度相当高.

在体积计算方面，埃及人得出上、下底都是正方形的棱台体积公式：$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$，这完全是个精确公式！古埃及几何除了能出色地解答一些难题外，还能找到一些难题近似的解法. 与古埃及同时代的古巴比伦也在几何学上有不少发现.

古代埃及的几何学只是一些经验公式，几乎没有正式的记号，没有有意识的抽象思维，没有得出一般的方法论，没有证明，甚至没有直观推理的想法用以证明他们所作的运算步骤或所用公式是正确的. 总之，古埃及、古巴比伦两个文明古国的数学并没有成为一门独立的学科，几何学是在古希腊人那里形成一门科学的.

0.4 初等几何学的建立与非欧几何的诞生

初等几何学的建立可以说是在公元前 3 世纪，以古希腊的数学家欧几里得(Euclid，约公元前 330～前 275)系统地总结前人工作，写出伟大著作《几何原本》(Elements)为标志. 该书共有十三卷，除第七、八、九卷外，其他各卷的内容都是几何，基本上是今天的中学生所学习的平面几何与立体几何，人们常称之为欧几里得几何. 欧几里得的《几何原本》是古希腊数学的黄金时代的一块丰碑. 在欧几里得之后，公元前 2 世纪，古希腊数学、力学家阿基米德(Archimedes ，公元前 287～前 212)发表了一系列有关几何的论著. 在这些著作中，阿基米德证明了圆面积等于以半圆周为长边，以半径为短边的长方形的面积；给出了圆周率 π 的界：$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，以及正圆柱、圆锥表面与球面积的计算公式等. 今天所说的计算三角形面积的海伦(Heron，约公元前 100 年)公式，也是阿基米德发现的. 与阿基米德几乎同一时期的古希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius，公元前 262～前 190)系统地研究了圆锥曲线的性质. 他还证明了：平面上给定两点 A 和 B，以及常数 c，使$\frac{AP}{BP}=c$的动点 P 的轨迹是圆($c\neq1$)，其中的圆即是阿波罗尼奥斯圆. 公元 1 世纪，古希腊数学家梅涅劳斯(D. Menelaus，公元 1 世纪)证明了，分别在$\triangle ABC$ 的三边 BC，CA 和 AB 上的点 D，E 和 F 共线的充要条件是$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$. 这就是梅涅劳斯定理. 之后，古希腊数学家托勒密(C. Ptolemy，约 100～170)证明了下面的托勒密定理：凸四边形内接于圆的充要条件是，它的对角线乘积之和等于对边乘积之和. 古希腊数学家海伦曾经评注过欧几里得的《几何原本》，增补了一些新定理，包括他本人给出的正多边形面积公式，圆台、棱台、截球体和正多面体等的体积公式，以及阿基米德所发现的海伦公式. 到公元 3 世纪，古希腊数学的黄金时代已成过去. 这时期的希腊数学家的工作主要是搜集、整理和评注欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯等人的著作.

公元 5 世纪，中国南北朝时期著名数学家祖冲之(429～500)给出了圆周率 π 的界：$3.1415926<\pi<3.1415927$，以及 π 的近似值(即密率)$\frac{355}{112}$(≈3.1415929). 这些结果是当时最先进的记录，直至一千多年之后才被人突破. 祖冲之还和他的儿子祖暅(5 世纪末～6 世纪初)一起，给出了球的体积公式，并提出了“幂势既同，则积不容异”这一祖氏原理. 我国古代数学家在几何学发展史上写下了光辉的篇章.

然而，欧几里得第五公设(即平行公理)的叙述上的复杂、不自然和使用此公设

的迟缓引起了对平行公理的怀疑. 许多数学家或者想用别的叙述取代它，或者想从其他公理推导它. 这种努力在两千年的时间中耗费了很多大数学家的精力，人们开始认识到公理的实质在于符合经验，而不是它的不证自明性. 任何一组假设，如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何——真的逻辑结构.

19 世纪，高斯(Gauss，1777～1855)，罗巴切夫斯基(Лобачевский，1792～1856)和鲍耶(Bolyai，1802～1860)都认识到欧几里得平行公理是建立欧氏几何所必需的，是独立的事实，有可能采用一个与此相矛盾的命题从一组新公理来推导结论，于是新的几何诞生了. 大数学家高斯因为担心这个会被人认为是荒谬的东西而遭批评，未发表自己的成果.

新的几何——罗氏几何——以罗巴切夫斯基的观点为例，在所有不用欧氏平行公理的地方证明与欧氏几何相同的结果(这些结果构成的结构成为绝对几何)，而涉及第五公设时，他假设过直线外一点至少可作两条直线与已知直线不相交，都是该直线的平行线，继而推导出一整套的与欧氏几何平行的理论体系，并且在物理学中得到应用.

罗氏几何的发现是 19 世纪关于数学本质认识上的最大进展. 它的直接结果使欧氏平行公理对其他公理是独立的，它的影响就更大了. 第一，欧氏几何是现实空间的正确理想化和绝对真理的观点被放弃了. 因为还存在其他几何，不仅逻辑上相容，而且可在物质世界应用，导致非欧几何得到更大发展. 第二，从公理化思想看，数学概念，像数、点、线、面等的描述对数学来说已经不重要，作为真理，未必需要依据自身的“明显性”来证明. 公理就是假设，它是不能证明的，问题在于公理系统中的“元素”(或基本概念)间的运算法则和相互关系形成的结构在多大程度上与物质世界相符合. 第三，非欧几何的诞生，是自希腊时代以来，数学中一个重大的变革. 它迫使数学家们从根本上改变对数学的本质的理解，改变对数学与物质世界的关系的理解，为以后发展的公理化运动打下了基础.

非欧几何除了罗氏几何还有黎曼几何. 黎曼(Riemann，1826～1866)假定所有直线无界又长度有限，在黎曼平面上过直线外一点的任何直线都与已知直线相交，三角形内角和大于 180°，等等.

经过 17、18 世纪数学的大发展，解析几何、微积分的创立及其后大批新兴学科的建立，罗氏几何引起的大震动使数学家们认识到了他们在接受欧氏几何的证明中，曾经不知不觉地依赖于直观的基础，而直觉有时是不正确的. 现在他们宁愿要一个建立在数上的数学，谈论起数学的算术化. 数学理论的公理化要求也就提出来了，他们通过略去、否定或用一些别的方式改变所建立的公理来探索新问题. 这个活动以及数学各个分支的公理化基础的建立叫做公理化运动，并发展成形式主义的数学哲学流派. 它的领导人是希尔伯特(Hilbert，1862～1943). 20 世纪初期，这个运动使许多新的数学分支的逻辑基础得以建立，而且也确切地提示出每个分支

以哪些假定作为基础，并使得有可能比较和弄清各个分支间的联系.

0.5 初等几何学的发展

在解析几何、射影几何、微分几何和非欧几何的孕育、诞生过程中，对欧几里得几何自然要再研究. 结果导致一批欧几里得几何新定理的发现. 例如，法国数学家德沙格(G. Desargues, 1591～1661)证明了关于两个三角形的德沙格基本定理：给定两个三角形，不论他们共面与否，如果三双对应顶点的连线共点，则三个对应边的交点共线；意大利数学家卡瓦列里(F. B. Cavaliori)证明了：圆锥体积等于外接圆柱体积的三分之一，他还重新发现了祖冲之与祖暅所发现的原理，即所谓的卡瓦列里原理；法国数学家帕斯卡(B. Pascal)证明了：六边形的顶点全在一条圆锥曲线上的充要条件是，六边形的三组对边的交点共线，这条线即是帕斯卡线. 这一定理即是帕斯卡定理；意大利数学家塞瓦(G. Ceva)证明了：设 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的三条边 AB,BC,CA 上的点，AD,BE,CF 三线共点或平行的充要条件是$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

19 世纪初，法国数学家卡诺(L. N. Carnot)推广了梅涅劳斯定理，他证明了：如果$\triangle ABC$ 的三条边 AB,BC,CA 分别交圆锥曲线于点 A_1 和 A_2、B_1 和 B_2、C_1 和 C_2，则

$$AC_1\cdot AC_2\cdot BA_1\cdot BA_2\cdot CB_1\cdot CB_2=AB_1\cdot AB_2\cdot BC_1\cdot BC_2\cdot CA_1\cdot CA_2$$

这就是卡诺定理；法国数学家布里安桑(C. J. Brianchon)在学生时代就证明了帕斯卡定理的对偶定理，即布里安桑定理：六边形的六条边都是某条圆锥曲线的切线的充要条件是，三对对顶点的连线共点；德国数学家费尔巴哈(K. W. Feuerbach)于 1822 年证明了九点圆定理，即费尔巴哈定理：三角形各边中点、各边高线的垂足以及三角形的垂心到诸顶点联线的中点(即所谓欧拉点)，这九点共圆. 他还证明了：九点圆与三角形的内切圆及三个旁切圆相切，四个切点即是费尔巴哈点；随后，法国数学家布洛卡(A. Brocard)证明了：$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的三边与面积分别是 a，b,c 与 a',b',c'及 Δ,Δ'，则

$$a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2+(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\geqslant 16\Delta\Delta'.$$

这一不等式曾于 20 世纪 40 年代初期为美国数学家匹多(D. Pedoe)重新发现，故称为纽堡-匹多不等式.

19 世纪在欧几里得几何的研究中所取得的最好结果，是解决了公元前 5 世纪希腊遗留下来的三大作图问题. 所谓三大作图问题是指：用圆规和无刻度的直尺，经有限步，做一个立方体，使其体积是已知立方体的二倍(倍立方问题)；作一个角，使其大小是已知角的三分之一(三等分角问题)以及作一个正方形，使其面积等于已知圆的面积(化圆为方问题). 1837 年，法国数学家凡齐尔(P. L. Wantzel)用伽罗

瓦(E. Galois)理论解决了前面两个问题;1882 年,德国数学家林德曼(C. L. F. Lindemann)证明了 π 是超越数,从而解决了化圆为方问题. 当然,他们给出的都是否定解答.

到 20 世纪,自欧几里得的《几何原本》问世以来,已经经历了两千多年的历史,对初等几何中是否还有真正优美的定理有待发现,人们并不抱有奢望. 但是,谁能料到,数学家又陆续发现一些新定理. 它们又如光彩熠熠的夜明珠,在欧几里得几何的宝库中放射异彩. 1900 年,美国代数几何学家莫莱(F. Morley)首先证明了莫莱定理:三角形的三个内角的六条三分角线中,相邻的三分角线的交点是某个正三角形的顶点;之后,1916 年,美国数学家约翰逊(R. Johnoson)证明了约翰逊定理:若半径同为 r 的三个圆交于一点,则其他三个交点共圆,此圆半径亦为 r;1944 年,美国数学家布朗特(L. Brand)证明了八点圆定理:对角线相互垂直的四边形中,各边的中点以及中点到对边的垂足,此八点共圆.

我国近 30 年来对初等几何的研究一直非常活跃. 随着计算机的发展和普及,我国著名数学家吴文俊致力于初等几何的机器证明的研究,取得了突破性进展. 传统的欧几里得证明定理的方法要求对个别定理寻求个别的证法,而且每一证明总是要求某种新的、往往是奇巧的想法. 几何定理证明的机械化则寻求的是一般方法,它不仅适用于个别定理,而且适用于整个某一类型的定理,甚至是所有的定理. 阐述吴文俊先生关于计算机证明初等几何的理论和方法,已超出本书的范围. 所幸的事,吴文俊已将他在 1976 年和 1977 年之交所创立的几何定理的机械证明方法整理成书出版(见吴文俊著《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》,科学出版社,1984 年版),有兴趣的读者可以阅读这部名著. 这里想指出的是,吴文俊和周咸青一起,在计算机上实施吴氏计算机证明几何定理的方法时,发现了一些新的结论,这无疑大大推进我国初等几何的研究. 另外,我国数学家洪加威提出了通过证明一些特例来证明一般初等几何定理的新方法. 我国数学家杨路和张景中讨论了生锈圆规作图问题,取得了很好的成果. 我国数学家常庚哲于 1979 年率先将纽堡-匹多不等式介绍到我国,之后杨路和张景中将它推广到高维情形. 他们的工作大大地推动了几何不等式的研究,使几何不等式的研究在我国成为热门课题. 此外,著名定理的推广以及给出的新证明,也有许多精彩之作.

吴法的成功使一度冷落的几何定理机器证明研究活跃起来,张景中院士以他多年所发展的几何新方法为基本工具,并提出了消点思想,和周咸青、高小山合作,于 1992 年取得重大突破,实现了几何定理可读证明的自动生成,这是自动推理领域三十多年来最重要的工作,进入了机器证明与人工证明媲美的新阶段.

第 1 章　平面几何证题方法

1.1　证题的一般方法

几何证明，考虑的角度不同，可得各种不同的证法，证法研究是一个内容非常丰富的课题. 一般地，证题方法有常规性方法与特征性方法. 常规性方法有化归法、分析法、综合法、设想法、反证法、数学归纳法、坐标法（或解析法）等；特征性方法有割补法、面积法、复数法、向量法、几何变换法、射影法、物理模拟方法、构造法等.

化归方法，就是证题时，尝试能否借助于旧经验来解决面临的新问题，考虑这个问题能否化归为某种我们已熟悉其证法的类型. 如果把问题直接归结为某种类型还有困难，就对问题的条件或结论作某些变更使其转化为某种类型. 如果在转化过程中碰到某些障碍，缺乏某些因素，就引入辅助量或作辅助线、图来进行转化，找到解决问题的转机，最后获得原问题的证明.

在几何证题中，由结论向已知条件追溯，即从结论开始，推求它成立的充分条件，这个条件的成立如果还不显然，则再把它当作结论，进一步研究它成立的充分条件，直至达到已知条件（或已知的事实）为止，从而使问题得到证明，这种方法叫做分析法. 这是一种“执果索因”的方法. 如果推理的方向是从已知条件（或已知事实）开始，逐步推导得到结论，这种方法叫做综合法. 综合法是一种“由因导果”的方法.

几何解题中的设想法是一种很重要的方法. 在几何证题中，仔细分析了题目的条件和结论后，为了拟定出初步的解题计划，常常作一些假定，假定题目的结论具有某种性质或形式；假定题目可以化成某种特定的类型；假定某种解题方法可应用到本题中；假定题设条件中还可发掘出某种我们希望有的隐含条件等等. 借助于假定的参与，形成新构思，实施之后从而使问题获解，且过程简捷优美. 这种方法，我们称之为设想法. 几何作图常采用这种方法.

坐标法（或解析法）也是求解平面几何的常用方法. 一般地说，平面几何问题大多都可以用坐标法来求解. 坐标法的优点在于使数形结合，把几何问题化作数式的推演，因而有一定的章程可以遵循，不需要挖空心思去寻找解法. 但坐标法有较强的技巧性，坐标系选择不当，参数引入过多或过少都会陷入一大堆繁琐的演算之中，乱丝一团，理不出头绪.

几何解题的特征性方法是值得我们关注的. 这些方法往往是我们求解几何难题的致胜武器.

特征性方法，就是证题时依据题设特征寻找解法或按常规思路一下子不能马上寻找到它的证明方法，就有选择地带着形象识别的眼光反复地分析它的特征，通过动员和组织、分离和整合题目中已知的信息，辨认和联想题中的各种特征因素，或在经过一系列的"脑风暴"后，在某一其他特征因素或其他问题的激发下，或运用直觉想像特征，然后在脑子中形成一个念头或闪现出对证题的提示，而获得的简捷而优美的证题方法.

常规性方法，又常分为直接型与间接型.

由命题的题设出发，根据定义、公理、定理进行一系列正面的逻辑推理，最后得出命题的证明，这种证题方法称为直接型方法. 我们在证题中常运用的化归法、分析法、综合法、设想法、坐标法等就是典型的直接型证题方法.

有些命题，往往不易甚至不能直接证明，这时，不妨证明它的等效命题，间接地达到目的，这种证题方法称为间接型方法. 我们常运用的反证法、同一法证题就是两种典型的间接证题方法.

用间接型方法证明命题，是构作一个等效命题来证，有一种方法是构作并证这个命题的逆否命题成立. 具体说来，由否定该命题结论的正确性出发，根据题设条件、定义、公理、定理，进行一系列正确的推理，最后得出一个矛盾的结果(与命题的假设、某个公理或定理矛盾，或自相矛盾等)，这就表明结论的反面不能成立，从而可以肯定结论的正确性. 这种驳倒反面的证法，叫做反证法. 当结论的反面只有一款时，否定了这一款便完成证明. 这种较单纯的反证法叫做归谬法；当结论的反面有若干款时，必须驳倒其中每一款，这样的反证法称为穷举法.

当欲证某图形具有某种性质而又比较繁杂或不易直接证明时，有时可以作出具有所示性质的图形，然后证明所作的图形跟所给的某图形就是同一个，把它们等同起来. 这种证法叫做同一法. 能用同一法证明的命题，实际上是依据这样一件事实：具有所示性质的图形是唯一的.

在平面几何证题中，综合法是运用得比较多的证法. 深入发掘题设内涵，从各种不同的角度应用已知条件，可以导致各种不同的综合证法.

例　如图 1-1，在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$AB>AC$，点O是外心，两条高BE，CF交于H点，点M，N分别在线段BH，HF上，且满足$BM=CN$. 求证：$\dfrac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$.

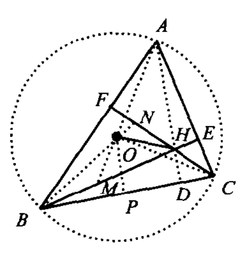

图 1-1

证法 1：连AH交BC于D，过O作$OP\perp BC$于P，连AP交OH于G. 设$\odot O$的半径为R，连AO，BO，则$AO=BO=R$.

由$\angle A=60°$，知$\angle BOP=\dfrac{1}{2}\angle BOC=60°$，$OP=\dfrac{1}{2}BO$