

 质量管理体系中统计技术应用指导与培训教材

·主编/王毓芳 肖诗唐

·主审/王宗凯 郝 凤

质量改进

的策划与实施

(含实验设计及田口方法)

 中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

质量管理体系中统计技术应用指导与培训教材

质量改进的策划与实施

(含试验设计及田口方法)

主编 王毓芳 肖诗唐

主审 王宗凯 郝 凤

中国经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

质量改进的策划与实施/王毓芳, 肖诗唐主编. —北京: 中国经济出版社, 2005. 10
ISBN 7-5017-7106-5

I. 质… II. ①王…②肖… III. 质量管理 IV. F273.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 112843 号

出版发行: 中国经济出版社 (100037 · 北京市西城区百万庄北街 3 号)

网 址: WWW.economyph.com

责任编辑: 李晓岚 (电话: 010-68353496, E-mail: lxlan@netease.com)

责任印制: 张江虹

封面设计: 谭雄军

经 销: 各地新华书店

承 印: 北京市地矿印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16 印张: 33 字数: 550 千字

版 次: 2005 年 10 月第 1 版 印次: 2005 年 10 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-5017-7106-5/F · 5695 定价: 63.00 元

版权所有 盗版必究 举报电话: 68359418 68319282

服务热线: 68344225 68369586 68346406 68309176

前言

随着 ISO 9000:2000 标准的发布,人们更加重视企业质量管理体系建立和运行的有效性和效率。1994 年版标准中的某些不足之处,必将过 2000 年版标准的贯彻得到完善和改进。对统计技术在质量管理体系建立和运行及业绩改进过程中的应用,会引起人们更加深刻的理解和认识。

ISO 9000:2000 标准在质量管理八项基本原则中,首先提出的“以顾客为关注焦点”,即要求企业长期、稳定地向顾客提供优质的产品和服务。这就要求企业在运用统计过程控制理论和控制图、统计抽样理论和统计抽样检验,保持过程稳定的基础上,持续不断地进行质量改进,不断提高质量水平。因此,持续质量改进工作应成为企业质量管理体系中持之以恒的重要工作。

持续质量改进是一项系统工程,需要有精心的策划和认真的实施。并非企业内一个部门,哪一个人的工作,特别是企业推行系统的、自上而下的、高层次的质量改进即六西格玛管理,更需要企业最高管理层的策划和各相关方的参与。同时,实施持续质量改进必须以实际情况和数据分析为基础进行决策和策划并付诸于实践,才能取得成功。所以,正确、有效地应用各种有关的统计方法是促进持续质量改进项目和活动取得成功的必要条件。目前我国企业中工程技术人员对统计技术的理论基础和操作技能的掌握尚处于薄弱环节,这对持续质量改进的成功和深化有很大的影响。因此,必须对企业的工程技术人员及相关的管理人员,甚至于操作工人进行有计划的、系统的分层培训教育。近几年国家人事部和国家质检局在对质量工程师实施继续教育中,已将持续质量改进和统计技术应用列为重点的培训内容。本书与《统计过程控制的策划与实施》、《统计抽样检验的策划与实施》成为一套丛书,将为企业及质量监督、质量管理体系组办统计技术应用培训,提供实用性很强的教材。也将成为企业质量管理人员、工程技术人员自学的指导教材和工作参考书。

虽然,本书的编写力求将最新的内容提供给读者,但总有不尽人意之处,特别是鉴于编审人员水平有限,对本书中的不足之处以及错误,真诚地希望各方面专家予以指正。

编 审 者

2005 年 8 月

内 容 提 要

持续质量改进是 ISO 9000:2000 标准提出的要求,是企业建立和运行质量管理体系过程中持之以恒的工作。所谓“以顾客为关注焦点”就是要求企业向顾客长期、稳定地提供优质的产品和服务。企业只有持续不断地实施质量改进,才可能实现这一基本的要求。本书从持续质量改进的基本概念入手,详细叙述了持续质量改进的策划与实施,为企业策划和实施持续质量改进提出具体的指导。实施持续质量改进必须以实际情况和数据分析为基础进行决策和策划并付诸于实践,才能取得成功。正确、有效地应用各种有关的统计方法和工具是促进持续质量改进项目和活动取得成功的必要条件。为此,本书详细介绍了持续质量改进过程中常用统计方法的基本原理和操作技能。如:图示法(直方图、正态概率纸、排列图、散布图)、假设检验、方差分析、回归分析、非数字数据统计方法(原因分析的工具、水平对比法、流程图、头脑风暴法、分层法与分层图)、试验设计、析因设计与析因分析、田口方法等。同时对目前已进入热潮的六西格玛管理作了系统的简要介绍。全书着重以实例讲述应用过程,具有很强的可操作性和实用价值。在全部讲解过程中精心绘制近 500 幅图表,具有图文并茂、理论联系实际的特点。本书对企业质量管理体系建立和运行以及推行全面质量管理工作过程中,对实施持续质量改进活动起着积极的指导作用。本书可以作为工程技术人员、质量管理人员、咨询审核人员的参考书,以及质量工程师继续教育的教材。

编审人员

主编：王毓芳 肖诗唐

主审：王宗凯 郝 凤

参加编审人员（以姓名笔画为序）

王 颖	王 蓉	王 刚	王宗凯	王淑玲
王淑敏	王毓芳	王毓泉	王德玉	李志秀
刘宗森	刘隶放	肖诗唐	肖 颖	肖 峰
张立新	张铁锁	张润芝	张霞 _(大)	张霞 _(小)
陈清香	尚文兰	郑 岩	郝 凤	梁淑田

目 录

前言	(1)
----------	-------

第一章 预备知识

一、概率与数据分析	(1)
二、参数估计	(60)
三、排列与组合	(69)

第二章 持续质量改进的基本概念

一、ISO 9000 标准关于持续质量改进的要求	(74)
二、持续质量改进的原理及特点	(81)
三、质量改进的原则	(85)
四、质量改进的类型	(86)

第三章 持续质量改进的策划与实施

一、持续质量改进的一般工作程序——PDCA 循环	(88)
二、持续质量改进的策划	(99)
三、质量改进的实施	(104)

第四章 图示法

一、两图一表的联合应用	(107)
二、直方图与正态概率纸	(115)
三、散布图	(128)

第五章 假设检验、方差分析与回归分析

一、假设检验	(136)
--------------	---------

二、方差分析	(168)
三、回归分析	(183)

第六章 非数字数据统计方法的应用

一、质量数据和统计方法的分类	(198)
二、调查表（信息的来源）	(200)
三、原因分析的工具	(216)
四、头脑风暴法、水平对比法与流程图	(228)
五、矢线图（网络计划的应用）	(249)
六、分层法与分层图	(267)

第七章 试验设计（DOE）

一、试验设计概述	(272)
二、名词术语	(273)
三、正交表	(276)
四、正交试验设计的风险度及置信度	(284)
五、正交试验设计法的应用程序	(285)
六、无交互作用正交试验设计案例	(289)
七、有交互作用的正交试验设计案例（提高农药收率）	(293)
八、多指标要求的试验设计及案例	(297)
九、试验设计（DOE）及田口方法常用正交表	(305)

第八章 析因试验设计

一、析因试验设计概述	(315)
二、析因试验设计法的基本应用程序	(317)
三、实例：改进一种特殊铸件产品的表面质量	(324)

第九章 田口方法及其实施技术

一、田口方法（Taguchi Methods）的重要性	(331)
二、田口的质量定义	(334)
三、质量损失函数	(337)
四、SN（信噪）比	(356)

五、三次设计的基本思想及参数设计的基本原理	(358)
六、参数设计的步骤	(363)
七、望目值特性、望小值特性、望大值特性静态参数设计的 案例	(366)
八、计数值特性的参数设计	(393)
九、容差设计	(398)
十、动态特性的参数设计	(419)

第十章 质量功能展开 (QFD)

一、QFD 概述	(426)
二、QFD 与 ISO 9001 标准	(426)
三、QFD 与并行工程	(427)
四、QFD 的基本原理及其结构框架	(427)
五、QFD 的量化方法——加权评分法	(431)
六、QFD 案例	(433)
七、QFD 的工作程序	(440)
八、其他 QFD 案例	(441)

第十一章 六西格玛管理

一、西格玛 (σ) 与六西格玛 (6σ)	(446)
二、六西格玛管理的起源和发展	(449)
三、六西格玛管理的内容	(454)
四、实施六西格玛管理的五个阶段	(475)
五、六西格玛改进程序 DMAIC	(480)
六、六西格玛设计的工作程序 DMADV—— 突破式的改进方法	(490)
七、六西格玛管理的组织与培训	(498)
八、从六西玛管理得到的启示	(508)
参考文献	(513)
后记	(515)

一、概率与数据分布

1. 概率的定义

概率是指一个事件发生的可能性大小的量化指标。

概率的定义所涉及事件的性质：

① **必然事件** 在一定条件下一定要发生的事件，称为必然事件。如一杯水在一个大气压和 0°C 的条件下必然要结冰，这是一个必然事件。

② **不可能事件** 在一定条件下一定不发生的事件，称为不可能事件。如一杯水在一个大气压， 20°C 时一定不会结冰，所以“水在 20°C 时结冰”是一个不可能事件。

③ **随机事件** 在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。如工人在车床上切削加工 $\phi 20\text{mm}$ 的轴，当完工一件产品后去测量轴径尺寸，有可能是 20mm ，也可能不是 20mm ，是大于 20mm ，还是小于 20mm ，事先不可知，这是一个随机事件。在质量工作中，产品质量属于随机事件，取得的质量特性值称为随机变量。

随机事件在一次试验中，既可能发生也可能不发生，因此就有一个发生的可能性大小的问题。这个可能性大小的定量表达，称为概率。

概率的定义可分为古典定义和统计定义两种。

(1) 概率的古典定义

设一次试验共有 N 个可能的独立（即互不包容的）结果，若其中有 n 个结果表明某个事件（事件 A ）必然发生，那么事件 A 的发生概率为 $P_{(A)}$ ，定义为

$$P_{(A)} = \frac{n}{N}$$

古典定义有两个前提：

① 在一次试验中（或观察中）可能出现的 N 种不同结果相互是独立的（互不包容的）而且是无穷尽的。即在一次试验中不能同时出现 N 种不同结果中的两种或两种以上，但必然出现其中一种结果。

如抛掷一枚硬币，可能出现的结果只有两个，不是“图”就是“字”，但“图”和“字”不可能同时出现。

② 在 N 个结果中，每一个结果出现的可能性是完全相同的（数值相等）。如抛掷一枚硬币，“图”和“字”出现的可能性是完全相等的。

满足以上两个前提条件的情况下，就可以应用概率的古典定义计算事件的发生概率。

（2） 概率的统计定义

概率的古典定义有两个前提条件所限制，要求发生的结果必须互不相容和相等的可能性。可是在工业生产或日常生活中，许多事件不能完全按古典定义的方法计算所发生的概率，因为前提条件不可能完全满足。由于情况复杂，不同事件的互不相容和相等的可能性难以确定。但在实际工作中，又非常需要了解事件发生的概率，这对于工作中的预测、分析和控制都是非常必要的。

企业发生事故的概率、某条河流发生特大洪水的概率、生产过程出现不合格品的概率等情况，需要应用统计技术来定义概率。

概率的统计定义：若事件 A 在 N 次实验中发生 n 次，则称 $\frac{n}{N}$ 为事件 A 在 N 次试验中发生的频率，当 N 趋向于无穷时，频率就趋近一个常数，称为概率的统计定义。经验表明，只要试验条件相对稳定，当 N 趋向于无穷时，频率总趋向于一个稳定的数值。如：抛掷硬币时“图”与“字”出现的频率趋近于 0.5；我国婴儿的性别比的统计说明，男婴的出生比例大致在 $22/43 = 0.51$ 上下波动。

2. 概率的性质及相关公式

（1） 概率的性质

无论是概率的古典定义，还是统计定义，都不难说明概率的两个基本性质：

① 必然事件的概率等于“1”，不可能事件的概率等于“0”

② 概率的取值区间

概率的取值区间为 $[0, 1]$ ，即最小的概率值为“0”，最大的概率值为“1”。

（2） 事件的性质

在分析概率的相关计算公式之前，首先应了解事件与事件之间的关系，从而找到它们之间的概率以及概率之间的关系。如图 1-1 所示。

① 事件的包容与相等

设有事件 A 和事件 B ，若事件 A 发生时事件 B 必然发生，则称事件 B 包容事件 A 。记 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。若事件 B 包容事件 A 的同时，事件 B 也包容事件 A ，则称事件 A 与事件 B 相等（或

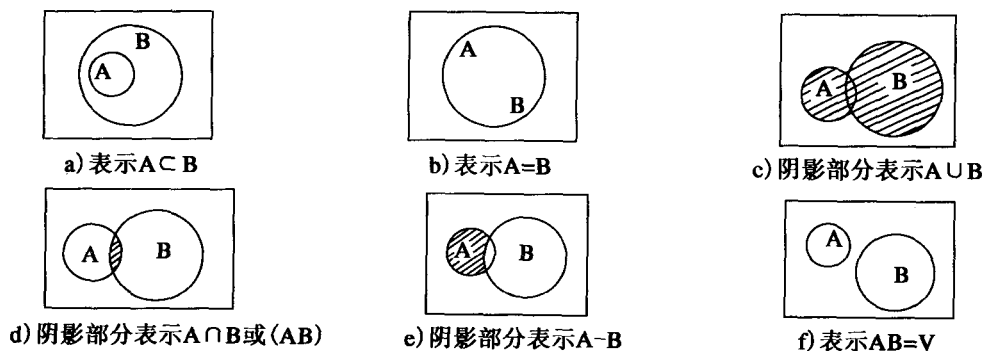


图 1-1 事件与事件之间的关系

等价), 记为 $A = B$ 。

② 事件的和与积。

设有事件 A 和事件 B , 二者之间至少有一个事件发生时, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的和 (或并) 记为 $A \cup B$ 或 $A + B$ 。

设有 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个事件要发生, 这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和 (或并), 记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

设有事件 A 和事件 B , 若事件 A 与事件 B 同时发生, 则称这一事件为事件 A 与事件 B 的积 (或交), 记为 $A \cap B$ 或 AB 。

设有 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若这 n 个事件同时发生, 则这一事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积 (或交), 记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 。

③ 事件的差与非

记有事件 A 和事件 B , 若事件 A 发生而事件 B 不发生, 则称这一事件为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A - B$ 。

设有事件 A 和事件 B , 若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容的, 记为 $AB = V$ 。符号 V 表示不可能发生的事件。

设有 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 。其中任意两个事件都是互不相容的, 则称 n 个事件两两互不相容, 记为 $A_i A_j = V (i \neq j)$ 。

若有事件 A , 则“非 A ”也是一个事件, 该事件称为事件 A 的对立事件, 记为 $\bar{A}$ 。必然有 $[\text{非 } \bar{A}] = [\text{非非 } A] = A$, 所以事件 A 也是事件 $\bar{A}$ 的对立事件, 即 $A = \bar{\bar{A}}$ 。因此说, 对立事件是相互的, 对立事件也是互不相容的, 即 $A \cap \bar{A} = V$ 。

图 1-1 所示意的是事件与事件之间的关系。

图 1-2 的电路中, 若以事件 A 表示电灯亮, 事件 B 、 C 、 D 分别表示开关 K_1 、 K_2 、 K_3 的闭合状态。显然会有: $BC \subset A$, $BD \subset A$, $A = BC \cup BD$, $\bar{B}A = \emptyset$ (即 $\bar{B}$ 与 A 是互不相容的)。

(3) 概率的相关公式

① 加法公式

若事件 A 与事件 B 互不相容, 则

$$P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)}$$

这一公式表达了概率的最重要的特性: 概率的可加性。

概率的加法公式是从大量实践中概括出来的一条公理, 成为研究概率的基础和出发点。

从概率的定义来看, 这一公式的成立是很自然的。设想在一定条件下进行 N 次试验 (N 充分大), 其中事件 A 发生了 n_1 次, 事件 B 发生了 n_2 次, 由于事件 A 与事件 B 是互不相容的, 所以 $(A+B)$ 发生了 $(n_1 + n_2)$ 次。根据概率的统计定义, 可知 n_1/N 与 $P_{(A)}$ 很接近, n_2/N 与 $P_{(B)}$ 很接近。于是有: $n_1/N + n_2/N = (n_1 + n_2)/N$, 应该与 $P_{(A)} + P_{(B)}$ 很接近。而 $(n_1 + n_2)/N$ 刚好是事件 $(A+B)$ 发生的频率, 所以与 $P_{(A+B)}$ 很接近。因而有 $P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)}$ 。

设有事件 $U = A + \bar{A}$, 而 $A\bar{A} = \emptyset$,

根据概率的加法公式有

$$P_{(A+\bar{A})} = P_{(A)} + P_{(\bar{A})} = P_{(U)} = 1$$

所以有

$$P_{(\bar{A})} = 1 - P_{(A)}$$

这个简单的公式在概率计算中非常有用。

【例】交验批量 $N=50$, 假定已知批不合格品率为 $P=0.06=6\%$, 现随机抽取 $n=5$ 的样本, 试求样本中不合格品数 $r=0, 1, 2, 3$ 的概率。

设事件 A_j 为在样本中的 5 件产品内恰好有 j 件不合格品。 $j=0, 1, 2, 3$ 。

则有

$$P_{(A_0)} = P_{(r=0)} = \frac{C_{47}^5 C_3^0}{C_{50}^5} = 0.7298$$

$$P_{(A_1)} = P_{(r=1)} = \frac{C_{47}^4 C_3^1}{C_{50}^5} = 0.25255$$

$$P_{(A_2)} = P_{(r=2)} = \frac{C_{47}^3 C_3^2}{C_{50}^5} = 0.02296$$

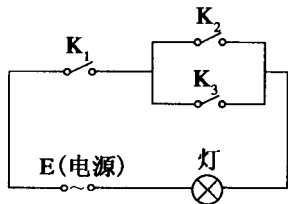


图 1-2 照明灯电路图

$$P_{(A_1)} = P_{(r=3)} = \frac{C_{47}^2 C_3^3}{C_{30}^5} = 0.00051$$

若求在随机抽取 $n=5$ 的样本中, 至少有 1 件不合格品的概率

$$P_{(r \geq 1)} = P_{(\bar{A}_0)} = 1 - P_{(A_0)} = 1 - 0.7298 = 0.2702$$

加法公式的一般形式:

对于任意 n 个事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若它们之间是两两互不相容的, 则有

$$P[\bigcup_{j=1}^n A_j] = \sum_{j=1}^n P_{A_j}$$

对于无穷多可列事件, $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若它们之间是两两互不相容的, 则有

$$P[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j] = \sum_{j=1}^{\infty} P_{A_j}$$

称为概率的无限可加性。

② 乘法公式

概率的乘法公式是关于相互独立的事件同时发生的概率。所谓独立事件, 是指某一事件无论处于什么状态对另一事件没有任何影响的事件之间的关系。如在 10 件产品中有 2 件不合格品, 若第 1 次抽样取得 1 件不合格品, 将其放回原产品中之后, 再第 2 次抽取样品, 所抽得的产品是合格产品还是不合格产品, 并不受第 1 次抽样结果的影响。则称这二次抽样是相互独立的事件。若第 1 次抽样后, 不将样品放回, 再进行第 2 次抽样, 则这两次抽样的结果不能称为独立事件。因为第 1 次抽样后, 若不将样品放回, 还剩 9 件产品, 无论第 1 次抽样所取得的产品是合格的还是不合格的, 都会改变第 2 次抽样的概率。

设有事件 A 和事件 B 为相互独立的事件, 事件 A 的发生概率为 $P_{(A)}$, 事件 B 的发生概率为 $P_{(B)}$, 则事件 A 与事件 B 同时发生的概率为事件 A 和事件 B 各自的发生概率的乘积。即

$$P_{(A,B)} = P_{(A)} \cdot P_{(B)}$$

称为概率的乘法公式。

【例】在一大批产品中 (如在车床上加工轴), 已知轴径不合格的概率为 0.01, 不圆度不合格的概率为 0.02。现从中抽取一件产品, 问所抽产品的轴径和不圆度同时不合格的概率是多少?

解:

由于轴径不合格和不圆度不合格是相互独立的事件, 根据概率的乘法公式, 可计算抽到 1 件产品的轴径和不圆度同时不合格的概率为

$$P = 0.01 \times 0.02 = 0.0002$$

③ 条件概率

前面所讨论的事件 A 发生的概率为 $P_{(A)}$ ，是相对于某一组特定的条件下的发生概率。若除了这一组特定条件之外，再加以附加的限制条件，如：在事件 B 已经发生的前提下，事件 A 发生的概率，这就是条件概率。

例如：在 10 件产品中有 2 件不合格产品，从中取两次样品，每次随机抽取 1 只产品作不放回抽样，问第 1 次取得不合格品后再抽第 2 次时取到不合格品的概率是多少？

设事件 A 为第 1 次抽取到的是不合格产品，事件 B 为第 2 次抽取到的是不合格产品。

显然，第 1 次抽取出 1 件不合格品后没有放回，则还剩 9 件产品，其中仅有 1 件不合格品，所以第 2 次抽样取得不合格品的概率为 $\frac{1}{9}$ 。因为是在事件 A 已经发生的条件下求事件 B 发生的概率，称其为“事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率”，记为 $P_{(B|A)}$ ，即有

$$P_{(B|A)} = \frac{1}{9}$$

根据条件概率的概念，可将概率的乘法公式推广到一般的情况

$$P_{(AB)} = P_{(A)} \cdot P_{(B|A)}$$

若同时有三个事件，则有

$$P_{(ABC)} = P_{(A)} P_{(B|A)} P_{(C|AB)}$$

对于同时有 n 个事件，可归纳为：

$$P_{(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n)} = P_{(A_1)} P_{(A_2|A_1)} P_{(A_3|A_1 A_2)} \cdots P_{(A_n|A_1 A_2 A_3 \cdots A_{n-1})}$$

【例】设有 100 件产品中有 10 件不合格产品，现每次随机抽取 1 件产品，第 1 次抽取到的是不合格品，不放回；第 2 次抽取到的也是不合格品，不放回；问第 3 次刚好抽到合格品的概率是多少？

解：

设 A_j 为第 j 次抽到合格品的事件： $j=1, 2, 3$ 。

因为第 3 次才刚好抽到合格品，所以表示为： $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 。

而

$$P_{(A_1)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$P_{(A_2|\bar{A}_1)} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$$P_{(A_2 | \bar{A}_1 \bar{A}_2)} = \frac{90}{98} = \frac{45}{49}$$

故所求的概率为

$$P_{(A_1 \bar{A}_2 A_2)} = P_{(A_1)} P_{(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)} P_{(A_2 | A_1 \bar{A}_2)} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} \times \frac{45}{49} = 0.0083$$

④ 全概率公式

设有 n 个两两互不相容的事件 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 。事件 A 为任意事件,且有 $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$ 。

则有

$$P_{(A)} = \sum_{i=1}^n P_{(B_i)} P_{(A | B_i)}$$

称为全概率公式。

证明:

$$A = A \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (AB_i)$$

由于 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是两两互不相容的事件, 所以 $AB_1, AB_2, \dots, AB_n$ 也是两两互不相容的事件, 故:

$$P_{(A)} = P\left[\bigcup_{i=1}^n (AB_i)\right] = \sum_{i=1}^n P_{(AB_i)} = \sum_{i=1}^n P_{(B_i)} P_{(A | B_i)}$$

【例】设有两台机床在加工同样的产品, 第一台机床生产的产品总数比第二台机床生产的产品总数多一倍, 第一台机床发生不合格品的概率为 0.01, 第二台机床发生不合格品的概率为 0.02。现将两台机床所生产的产品放在一起 (假设已充分混合均匀), 问从中任意抽取 1 件产品, 恰好为合格产品的概率是多少?

解:

设: 事件 A 为取出产品是合格品; 事件 B_1 为取出产品是第一台机床所加工的产品; 事件 B_2 为取出产品是第二台机床所加工的产品。

$$P_{(B_1)} = \frac{2}{3}$$

则有

$$P_{(B_2)} = \frac{1}{3}$$

$$P_{(A | B_1)} = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$P_{(A | B_2)} = 1 - 0.02 = 0.98$$

由于 $A = AB_1 \cup AB_2$, 且 B_1 与 B_2 是互不相容的, 根据全概率公式有

$$P_{(A)} = P_{(B_1)} P_{(A | B_1)} + P_{(B_2)} P_{(A | B_2)} = \frac{2}{3} \times 0.99 + \frac{1}{3} \times 0.98 = 0.66 + 0.33 = 0.99$$

⑤ 贝叶斯 (Bayes) 公式

利用条件概率的定义和全概率公式可以导出全概率公式的另一种形式, 即贝叶斯公式。

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为两两互不相容的事件, A 为任一事件, 且有 $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$, 则有

$$P_{(B_i | A)} = \frac{P_{(B_i)} P_{(A | B_i)}}{\sum_{i=1}^n P_{(B_i)} P_{(A | B_i)}}$$

这样的公式共有 n 个。

【例】某机床在正常状态下加工产品的合格品率可达到 99.99%, 当机床出现某种故障时, 该产品的合格品率仅为 50%, 即使再次调整机床达到良好状态时, 其调整良好状态的概率一般只有 85% 左右。

现某日该台机床生产的第一件产品为合格品, 问该机床现调整良好状态的概率是多少?

解:

设: 事件 A 为生产的合格产品; 事件 B 为机床调整到良好状态。

由题意可知

$$P_{(A | B)} = 0.9999$$

$$P_{(A | \bar{B})} = 0.50$$

$$P_{(B)} = 0.85$$

$$P_{(\bar{B})} = 0.15$$

所求的概率为 $P_{(B | A)}$

由贝叶斯公式可得

$$P_{(B | A)} = \frac{P_{(B)} P_{(A | B)}}{P_{(B)} P_{(A | B)} + P_{(\bar{B})} P_{(A | \bar{B})}} = \frac{0.85 \times 0.9999}{0.85 \times 0.9999 + 0.15 \times 0.50} = 0.92$$

(4) 事件的独立性

一般情况下 $P_{(B | A)} \neq P_{(B)}$, 若有 $P_{(B | A)} = P_{(B)}$, 说明事件 A 发生的条件下事件 B 的条件概率就等于事件 B 的原概率, 即表示事件 A 的发生并不影响事件 B 发生的概率。这种情况下就可以称: 两个随机事件 A 和 B 是相互独立的。

若事件 A 与事件 B 是相互独立的, 则有

$$P_{(AB)} = P_{(A)} P_{(B | A)} = P_{(A)} P_{(B)}$$

凡满足上式的事件 A 和事件 B 称为相互独立。推广之, 则有