小学数学奥林匹克丛书

张君达 主编

六年级
下册

机械工业出版社

ISBN 7-111-02587-3/G·148

ISBN 7-111-02587-3

9 787111 025870 >

定 价: 5.00元

小学数学奥林匹克丛书

六年级下册

张君达 主编
郜舒竹 李念伟 编

机 械 工 业 出 版 社

内容提要

本书是数学奥林匹克学校(小学部)教材。主要内容有，趣味几何、统筹规划初步、分数应用题等，各讲都配有一定数量的例题和练习题、有阶段自测试题，并附有练习题和自测试题的答案.

本书具有篇幅短小，讲解细致，通俗易懂，深入浅出，适合学生的知识水平和接受能力，可帮助学生深入理解和巩固基础知识，扩大视野，开拓思路，训练思维，提高分析问题和解决问题的能力，激发学生学习数学的兴趣.

本书适合小学六年级学生课外自学，是小学数学教师课堂教学中开发学生智力的参考用书，也是家长辅导孩子的材料，可供各地小学数学课外活动站(组)作教材，也可为国内外各种小学数学竞赛提供参考.

小学数学奥林匹克丛书

六 年 级 下 册

张君达　主编

部舒竹　[redacted]　编

责任编辑：劳端芬　责任校对：贾立萍

封面设计：方二芬　版式设计：冉晓华

责任印制：路　琳

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街　号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

济南新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

・

开本787×1092 1/32・印张 3 3/4 ・字数 79 千字

1996 年 11 月第 1 版　第 11 次印刷

印数　189 971—192 970・定价：5.00 元

・

ISBN 7-111-02587-3/G・148

前　　言

奥林匹克运动起源于古希腊（公元前776年），这是力量、灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年罗马尼亚向东欧七国倡仪举办中学生参加的“国际数学竞赛”，以后每一年举行一次，参加国逐渐增多，这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京、上海等地开始举办省、市级的高中数学竞赛，1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛；1986年开始举行全国性小学数学竞赛。同时，我国中、小学生还参加了其他国家举办的一些数学竞赛的通讯比赛。1986年我国第一次正式派出国家代表队参加了华沙举行的第二十七届国际中学生数学竞赛，并取得团体总分第四名的成绩。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展小学数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育发展、提高青少年数学素质的一个有力措施。

北京数学奥林匹克学校（小学部）自1985年4月成立以来，受到了教育部门与家长的大力支持，赢得了社会舆论的赞赏。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛、上海“从小爱数学”邀请赛、北京“迎春杯”小学数学竞赛中，获得了较好的成绩。1988年11月北京数学奥林匹克学校(小学部)组建第一支35人代表队参加了美国长岛小学生数学通讯赛，

并取得引人瞩目的成绩。

面临着高难度的国际中、小学生数学竞赛，为使我国学生能在国际竞赛中跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨数学竞赛选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

在《小学数学奥林匹克专题讲座》、《小学数学奥林匹克试题与解答》（张君达主编，北京师院出版社出版）出版后，我们陆续收到许多读者来信。为感谢读者对我们工作的信任与支持，为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在专题讲座和试题与解答两本书的基础上，我们组织北京数学奥林匹克学校（小学部）的全体教练员编写了这套《小学数学奥林匹克丛书》（共八本：三、四、五、六年级各分上、下两册）。

我们力图使本丛书的内容源于教材、高于教材，寓知识于趣味之中，同时还注意到适合学生的年龄与课余学习的特点。希望这套丛书能为小学数学业余学校和数学课外活动提供选读教材，能成为青少年数学爱好者的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验不很充足，这套丛书一定会有许多欠缺之处。希望各省、市数学奥林匹克学校教练员和学生们，以及广大的专家、读者批评指正。

张君达

1989年2月8日

目　　录

一、壁虎的美餐

一只壁虎在一只油桶的下边沿M处，发现油桶的上边沿N处有一只小虫子，壁虎想吃掉这只虫子，但又怕虫子发现它后跑掉，怎么办呢？壁虎想出了一条好办法，它不直接向虫子爬去，而是绕着油桶爬行（如图1-1所示），避开小虫的视线，从小虫的背后偷袭。结果。小虫子成了壁虎的“美餐”。

同学们，你知道按照壁虎的方法，怎样爬行路程最短吗？要解决这一问题，还得从油桶的形体说起。

油桶是一个圆柱体，什么是圆柱体呢？**把矩形$ABCD$的一边BC为轴，旋转一周所成的形体叫圆柱体**，如图1-2。BC称为圆柱的轴，AD边旋转后所成的圆柱面称为圆柱体的**侧面**。AB和CD两边旋转后所成的两个平行并且相等的圆，称为圆柱体的**底面**。**两底面之间的距离，称为圆柱体的高。**

圆柱体侧面积、表面积、体积的计算式如下。

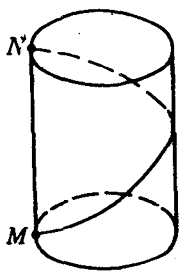

图 1-1

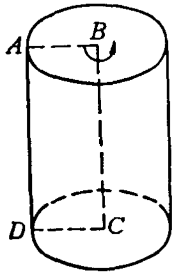

图 1-2

圆柱体的侧面积＝底面的周长×高

$$=2\times\pi\times r\times h$$

（其中，r 为底面圆的半径，h 为高）

圆柱体的表面积＝侧面积＋2×底面积

$$=2\times\pi\times r\times h+2\times\pi\times r^2$$

圆柱体的体积＝底面积×高

$$=\pi\times r^2\times h$$

如果把圆柱体的侧面展开，可以得到一个长方形（如图1-3）。这个长方形的长等于圆柱底面的周长，宽等于圆柱的高。

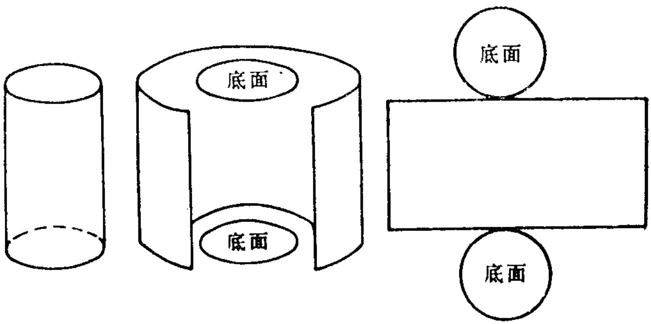

图 1-3

有了这些概念，就可以回过头来解决一开始提出的“壁虎爬行路线的问题”。通过圆柱体的侧面展开图是矩形这一事实，我们就很容易想到：如果在矩形（图1-4）上从 M 点到 N 点，显然走直线是最短

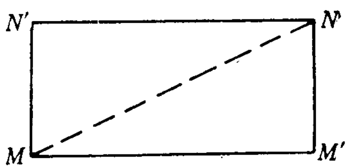

图 1-4

的。当把长方形$MN'NM'$卷成圆柱，直线段MN就变成圆柱体侧面上的曲线MN了，那么当壁虎捕食小虫时，沿这条曲线爬行是最短的。

例1 已知一圆柱体侧面的展开图是边长为16厘米的正方形，求这个圆柱体的体积。($\pi\approx 3.14$)

解：∵圆柱体的侧面展开图是边长为16厘米的正方形，即圆柱体的高和底面的周长都是16厘米。

$$底面半径=\frac{16}{2\pi}$$

$$底面面积=\left(\frac{16}{2\pi}\right)^2\pi=\frac{64}{\pi}(平方厘米)$$

$$则圆柱的体积=\frac{64}{\pi}\times 16\approx 326(立方厘米)$$

例2 一个棱长为4厘米的正方体，若在它的各面的中间位置都打一个直径为2厘米的圆孔，圆孔的深为1厘米，求打孔后的正方体的体积及表面积。

分析：打孔后正方体的体积，即为打孔前正方体的体积减去所打的六个孔的体积，每个孔就是一个小圆柱体。根据圆柱体体积公式，问题就解决了。

表面积的求法，实际就是正方体的表面积加上六个圆柱体的侧面积（六个孔的侧面积），这是因为，虽然原来的正方体的各面上都打了孔，各减少了一个小圆面积，但孔的底面是一个与正方体各面被去掉的小圆相同的圆，这样就只是多了孔的侧面，因而只需加上孔的侧面积就可以了。

解：$小孔的体积=\left(\frac{2}{2}\right)^2\pi\cdot 1=\pi$

$$\begin{aligned}所求的体积&=正方体体积-6\times(小孔体积)\\&=4^3-6\pi\approx 64-6\times 3.14\approx 45.16\end{aligned}$$

$$\text{小孔的侧面积} = 2\pi\left(\frac{2}{2}\right)\times 1 = 2\pi$$

$$\begin{aligned}\text{所求的表面积} &= \text{正方体表面积} + 6\times(\text{小孔的侧面积}) \\ &= 4^2\times 6 + 6\times 2\pi \approx 133.68(\text{立方厘米})\end{aligned}$$

例3 截取150米长的一段下水管道，如图1-5，管道的直径为1.2米（内径），露出水外的部分管道的截面面积为0.63平方米，求管道中的存水量。

分析：求存水量实际为求体积，根据已知条件，水面上的体积可求出（截面面积×管道长度），再用管道的体积减去水面上的体积，即得存水量。

解：管道中水面上的体积$=0.63\times 150$

$$=94.5(\text{立方米})$$

$$\begin{aligned}\text{管道中存水量} &= \text{管道体积} - \text{水面上的体积} \\ &= \left(\frac{1.2}{2}\right)^2\pi\times 150 - 94.5 \\ &\doteq 75.06(\text{立方米})\end{aligned}$$

例4 一个容积为1055立方厘米的瓶子，瓶子中液体高度h_1为15厘米（如图1-6所示），图中h_2为6厘米，求瓶中有多少立方厘米液体？（$\pi\approx 3.14$，精确到整数）

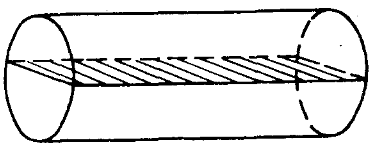

图 1-5

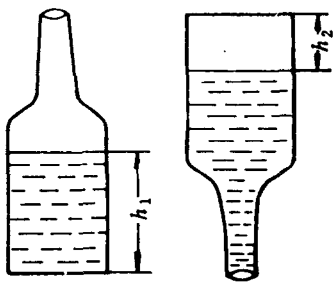

图 1-6

分析： 要求瓶中液体的体积，需要知道瓶子下部的直径（或半径），以及液体在瓶中的液面高度，液面高度现已知，关键是瓶子的半径。通过题意我们知道，瓶子的总容积为1055立方厘米，它是瓶内液体的体积与瓶内空余部分体积之和，瓶内空余部分（如图1-6）的高度为h_2，要求它的体积，缺少的也是瓶子的半径。如设瓶子下部半径为R，则有：

$$1055=\pi\cdot R^2\cdot h_1+\pi R^2 h_2=\pi R^2(h_1+h_2)$$

由于式中只有R是未知数，故可以得出，有了半径的大小，问题就解决了。

解： 设瓶子下部的半径为R厘米

则$1055=\pi R^2(h_1+h_2)\doteq 3.14\cdot R^2\cdot 21$

$R^2=1055\div 65.94\doteq 16$

$R=4$（厘米）

瓶内液体的体积$=\pi R^2\cdot h_1=3.14\cdot 4^2\cdot 15$

$\doteq 754$（立方厘米）

例5 有两个高度相同的圆柱形水桶，同时以同样大小的水流往两个桶内注水，当其中一个水桶注满时，另一个水桶刚好是1/3水量（如图1-7），若已知注满水的水桶直径是30厘米，求未注满水的水桶的直径？

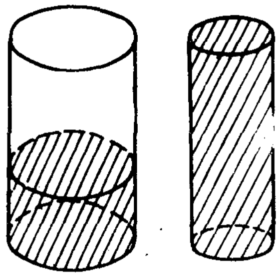

图 1-7

分析： 由题目条件可知，两个水桶中水的体积相同，利用这个等量关系即可列出一个等式，又由于两个水桶的高度相同，所以很容易求出未满水桶的半径。

解： 设未注满水的水桶的半径为R，高为h。

则
$$\pi\cdot R^2\cdot\frac{h}{3}=\pi\cdot\left(\frac{30}{2}\right)^2\cdot h$$
$$R^2=3\cdot\left(\frac{30}{2}\right)^2$$
$$R=\sqrt{3}\cdot 15\approx 26(\text{厘米})$$

所以未注满水的水桶的直径为52厘米。

说明：这几道例题，是利用圆柱体的侧面、表面、体积的计算来解决一些实际问题。这类问题的类型很多，我们不可能一一列举。同学在遇到这类问题时，只要弄清题意，分清已知和未知，一步一步求出所要结果。

在前面我们提到了：圆柱体是由一个矩形围绕一条边旋转一周而成的旋转体。现在我们来学习另一种旋转体——圆锥。**它是由一个直角三角形围绕一条直角边旋转一周得到的。**如图1-8所示，线段AB是直角三角形ABC的直角边，圆锥就是绕AB边旋转而成的，点A叫做圆锥的**顶点**，AB叫做圆锥的**高**，直角三角形ABC的另一条直角边BC经旋转一周后，所成的圆面叫做圆锥的**底面**。BC的长就是底面的**半径**，三角形的斜边AC旋转所成的面叫做圆锥的**侧面**。我们要提一个问题，请同学们思考。一个矩形（长方形）围绕任何一条边旋转一周都可以得到一个圆柱体，那么对于直角三角形来说，是否围绕任一条边旋转，得到的旋转体都是圆锥体？另外，不用直角三角形，而用任意一个三角形绕它的一条边旋转一周是否也能得到圆锥体呢？

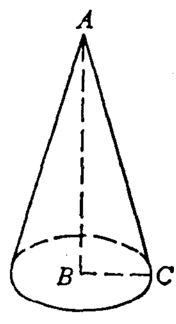

图 1-8

我们在小学课本上已经学习了圆锥体的体积公式：

$$V_{圆锥体}=\frac{1}{3}V_{圆柱体}=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot h$$

其中：S表示底面面积，h表示高，R表示底面半径。对于圆锥体的侧面面积的求法，在小学课本上没有讲述。在这里为同学们讲解这个问题。在图1-8中，如果沿三角形的斜边AC剪开，然后将圆锥的侧面展平，马上会发现圆锥的侧面是一个扇形（如图1-9）。这个扇形的半径就是AC的长，扇形的弧长就是圆锥体底面的周长$2\pi R$。扇形的面积等于扇形的弧长与扇形半径乘积的一半，即圆锥体的侧面积等于圆锥体的底面周长与AC长乘积的一半，AC在圆锥体中被称做母线，一般用字母l表示，那末：$S_{侧}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot l=\pi R\cdot l$。

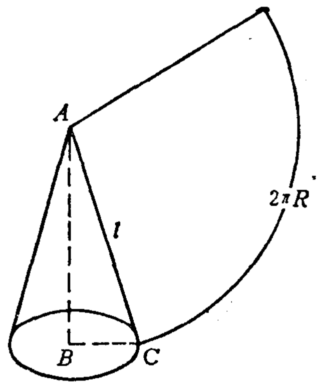

图 1-9

有了侧面积公式，圆锥体的表面积（或称全面积）$S=S_{侧}+S_{底}=\pi R\cdot l+\pi R^2=\pi R(l+R)$。

例6 有一位小学生买了两块橡皮泥，一块是长方体，长、宽、高分别是30毫米、20毫米、5毫米；另一块是圆柱体，底面半径和高分别为6毫米、30毫米；如果这位同学将两块橡皮泥合在一起，捏成一个底面半径为13毫米的圆锥体，那么这个圆锥体的高是多少？

分析：两块橡皮泥合在一起的总体积与要做的圆锥体的体积应该是相等的，利用这个等量关系及已知条件，就可以

求出要求的量。

解：设圆锥体的高为h，

则 $V_{长方体}+V_{圆柱体}=V_{圆锥体}$

$$30\times20\times5+\pi\cdot6^2\cdot30=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot13^2\cdot h$$

$$h\approx36(\text{毫米})$$

例7 有一个圆锥形容器内放着一个体积为400立方厘米的球（如图1-10所示），求圆锥体内没有被球所占的空余部分的体积。

解：设圆锥体内没有被球所占的空余部分的体积为V。

由题意：$V=V_{锥}-V_{球}$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{12}{2}\right)^2\cdot15-400$$

$$=165.2(\text{立方厘米})$$

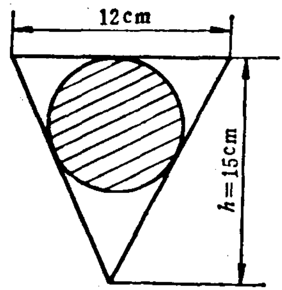

图 1-10

例8 用一块半径为16米的半圆形帆布，作一顶圆锥形的帐篷，求这顶帐篷的高。

分析：用半圆（扇形）围成一个圆锥体，即把OA、OB粘在一起（如图1-11），使A与B重合。根据圆锥体的定义，图1-11（3）中三角形ODA是直角三角形，圆锥体的高OD是这个直角三角形的一条直角边，利用勾股定理（直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边的平方和），$OD^2=OA^2-AD^2$。式中OA是已知量，它就是半圆的半径，AD虽然题目中没有直接给出，但它可以通过圆锥体底面的周长求出，而

圆锥体底面的周长就是题目中所给半圆的弧长。这样就可以求出帐篷的高。(保留两位小数)

解：根据题意：

圆锥体底面的周长＝所给半圆的弧长＝$16\cdot\pi$

圆锥体的半径（圆锥体底面半径）$=\dfrac{16\pi}{2\pi}=8$(米)

由勾股定理：

$OD^2=OA^2-AD^2=16^2-8^2=192$

$OD\approx13.86$(米)

答：帐篷的高为13.86米。

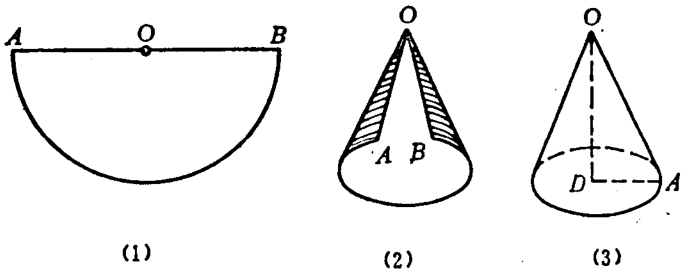

图 1-11

例9 一个边长分别为3厘米、4厘米、5厘米的直角三角形，以较长的直角边为轴旋转一周(360°)，求旋转体的侧面积、表面积和体积。

分析：直角三角形的三条边分别是3、4、5，显然5是斜边的长，4是较长直角边的长。绕直角三角形的直角边旋转一周的旋转体为圆锥体。由题意，我们就得到一个高为4，半径为3，母线长为5的圆锥体.根据圆锥体的侧面积公式、表面积公式及体积公式，就可得到所求的量。

解：$S_{侧}=\pi\cdot R\cdot l\doteq3.14\times3\times5=47.1$(平方厘米)

$$S_{表}=S_{侧}+S_{底}=47.1+\pi\cdot 3^2=75\cdot 36(\text{平方厘米})$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 4=37.68(\text{立方厘米})$$

例10　一名车工要用一段长20厘米，直径为6厘米的圆钢，车一个零件，如图1-12所示，求这个零件的体积和表面积。

分析： 将零件分成三段，两头是圆锥体，中间是圆柱体。根据已给的尺寸，可知圆锥体高为4厘米，半径为3厘米，圆柱体高为20－8＝12(厘米)，半径为3厘米，这样整个零件的体积即可求出。对于表面积，缺少圆锥体母线的长，但它可以通过勾股定理，利用圆锥体的高和半径求出。在这里要注意的是，整个零件的表面积不等于两个圆锥体的表面积之和再加圆柱体的表面积。此时所要求的表面积，就是零件外表面的面积，不包括圆锥体和圆柱体的底面面积（此时，它们已不暴露在外表面）。

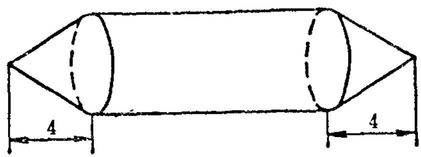

图　1-12

解： 圆柱体的体积$=\pi\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^2\cdot 12=108\pi$

圆锥体的体积$=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot 4=12\pi$

零件的体积$=108\pi+2\times 12\pi\doteq 414.48$(立方厘米)

$(\text{圆锥体的母线长})^2=4^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2=25$

圆锥体的母线长$=5$

圆锥体的侧面$=\pi\cdot 3\cdot 5\doteq 47.1$

圆柱体的侧面$=2\cdot\pi\cdot 3\cdot 12\doteq 226.08$