数学基础知识丛书

圆锥曲线

许仲荚　左铨如

江苏人民出版社

圆 锥 曲 线

许仲菼　左铨如

江苏人民出版社

内容提要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分四部分，首先介绍圆锥曲线的来历和研究方法，进而阐述圆锥曲线的方程、性质和应用。然后利用坐标变换对一般二元二次方程作系统的讨论，再用点变换的观点对二次曲线进行仿射分类并作进一步的研究。最后附有桥梁、隧道及天体运行轨道的应用实例。

目　录

一、圆锥曲线和研究方法

§1　从圆锥的截线谈起

圆锥曲线的研究，早在公元前四世纪就开始了。那时是把它们作为平面与直圆锥的交线来研究的。起初人们取顶角为直角、锐角、钝角的三种不同的直圆锥，用垂直于锥面的一条母线的平面去截它们，就分别得出三种不同的截线，因而把它们叫做“直角圆锥截线”、“锐角圆锥截线”、“钝角圆锥截线”。按现在的名称，它们就分别是抛物线、椭圆和双曲线(一支)。后来发现只要改变截面的位置，就可以在一个直圆锥上截出这三种曲线。由于这三种曲线都可以用平面截直圆锥面得到，因此历史上一直沿用“圆锥截线”或“圆锥曲线”作为它们的总称。

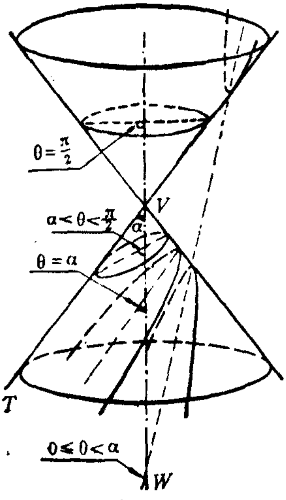

图1—1

如图1—1所示，如果把一个直圆锥的每一条母线向两方无限延长，就得到具有两叶的直圆锥面。用一个不经过锥顶的平面来截这直圆锥面，如果截面和直圆锥面的轴所成的角（即直圆锥面的轴和它在截面内的射影所成的角）是θ，直圆锥面的半顶角（即直圆锥面的母线和它的轴所成的角）是α，那么

1.当$\alpha<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$时，截得的交线是椭圆；其中$\theta=\frac{\pi}{2}$时，截得的交线是圆，它是椭圆的特殊情形。

2.当$\theta=\alpha$时，截得的交线是抛物线。

3.当$0\leqq\theta<\alpha$时，截得的交线是双曲线；这时截面与锥面的两叶相交，得到双曲线的两支。

从图1—1，可以看到，当$\alpha<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时，截面只和锥面的一叶相截，并和锥面的所有母线相交，得到一个闭合的截线，即椭圆。不难论证椭圆具有这样一个性质：**椭圆上任意一点M到二定点F_1和F_2的距离之和等于定长。**

如图1—2所示，我们在锥面内部，并在截平面的两侧，放两个适当大小的球S_1和S_2，使它们刚好与锥面相切于圆C_1和C_2，同时与截平面相切于点F_1和F_2。设M是椭圆上的任意一点，过M点作锥面的母线与圆C_1和C_2相交于点Q_1和Q_2。连接MF_1和MF_2，那么因为由球外一点引到球上的两条切线的长相等，所以

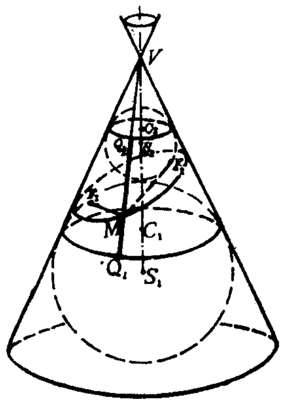

图1—2

$$|MF_1|=|MQ_1|,\ |MF_2|=|MQ_2|.$$

由此得

$$|MF_1|+|MF_2|=|MQ_1|+|MQ_2|=|Q_1Q_2|,$$

其中$|Q_1Q_2|$是以圆面C_1和C_2为两底的圆台的母线，所以是定长。这就证明了：

$$|MF_1|+|MF_2|=\text{定长}。$$

类似地，可以论证双曲线具有这样的性质：**双曲线上任意一点M到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之差的绝对值等于定长。**如图1—3所示，我们在两叶锥面内各放进一个适当大小的球 S_1 和 S_2，使它们刚好与锥面相切于圆 C_1 和 C_2，同时与截平面 π 相切于点 F_1 和 F_2。设M是双曲线下支上的任意一点，过M点作锥面的母线与圆 C_1 和 C_2 相交于点 Q_1 和 Q_2。连接 MF_1 和 MF_2，则得

$$|MF_1| = |MQ_1|,$$
$$|MF_2| = |MQ_2|。$$

由此知

$$|MF_2| - |MF_1|$$
$$= |MQ_2| - |MQ_1| = |Q_1Q_2|.$$

其中 $|Q_1Q_2|$ 是以圆面 C_1 和C_2 为底面的两圆锥的母线的和，所以是定长。这就证明了：

$$|MF_2| - |MF_1| = \text{定长}。$$

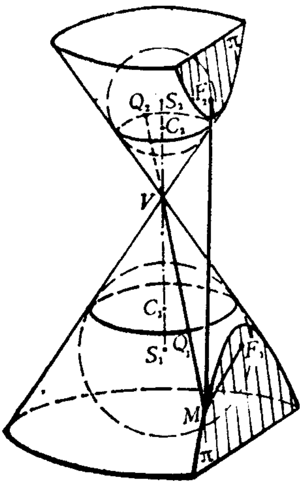

图1—3

显而易见，如果 M 点取在双曲线的上面一支上，那么就得到

$$|MF_1| - |MF_2| = \text{定长}。$$

总起来说，双曲线上任意一点M到两定点 F_1 和 F_2 的距离之差，等于定长。

再从图1—1，可以看到，当 $\theta = \alpha$ 时，截平面平行于直圆锥面的一条母线 VT，因而它也只能和锥面的一叶相截。但由于截平面不能和母线 VT 相交，因而得到的截线是一条不闭合的伸展到无限远的曲线，即抛物线。可以论证抛物线具有这样一个

性质：**抛物线上任意一点M到一个定点F和一条定直线l的距离相等**。如图 1—4 所示，我们在锥面内放一个适当大小的球S，使它刚好与锥面相切于圆C，同时与截平面π相切于F点。设圆C所在的平面π'与截平面π的交线是l。在抛物线上任意取一点M，过M点作直线MN垂直于直线l，并作直线MH垂直于平面π'，它们的垂足分别是N和H两点。连接MF，并过M点作锥面的母线MV与圆C相交于Q点。图中VW是锥面的轴，它也垂直于平面π'，所以$VW \parallel MH$。显然$\angle HMQ = \angle MVW = \angle TVW = \alpha$（直圆锥面的半顶角），又$\angle HMN$等于截平面$\pi$和锥面的轴$VW$所成的角$\theta$*。

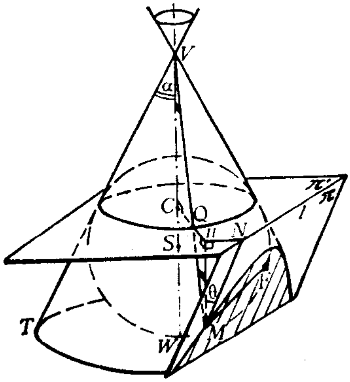

图1—4

因为$\dfrac{|MH|}{|MN|} = \cos\theta$，$\dfrac{|MH|}{|MQ|} = \cos\alpha$。（$\triangle MHN$和$\triangle MHQ$都是直角三角形）

把这两式相除即得$\dfrac{|MQ|}{|MN|} = \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}$。又因为$|MQ| = |MF|$，所以

$$\frac{|MF|}{|MN|} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

---

* ∵$MN \perp$直线l，$MH \perp$平面π'，∴$HN \perp$直线l（三垂线定理的推论）。于是直线$l \perp$平面MNH，从而平面$\pi \perp$平面MNH，MH在平面π内的射影在直线MN上，所以$\angle HMN$即为MH与平面π所成的角。又∵$MH \parallel VW$，它们和平面π所成的角相等，∴$\angle HMN = \theta$。

由于$\theta=\alpha$，所以

$$\frac{|MF|}{|MN|}=1\text{，即}|MF|=|MN|\text{。}$$

值得注意：在上面的证明中，一直到(1)式，都未用到$\theta=\alpha$这个已知条件，由此可知，无论$\theta>\alpha$或$\theta<\alpha$，还是$\theta=\alpha$，都能证明$\frac{|MF|}{|MN|}=\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}=$常数$e$。并且当$\theta>\alpha$即截线为椭圆时，有$\cos\theta<\cos\alpha$*，$e<1$；当$\theta<\alpha$即截线为双曲线时，有$\cos\theta>\cos\alpha$，$e>1$；当$\theta=\alpha$即截线为抛物线时，有$e=1$。显然，对于椭圆来说，图1—4中的圆$C$和点$F$即为图1—2中的圆$C_2$和点$F_2$；对于双曲线来说，图1--4中的圆$C$和点$F$即为图1—3中的圆$C_1$和点$F_1$。也不难看到，对于椭圆（双曲线）还可以由图1—2（图1—3)中的圆C_1（圆C_2）所在平面与截平面π的交线和点F_1（点F_2）来证明出同样的结论。

由此得到圆锥曲线的一个共同的性质：**圆锥曲线上任意一点M到定点F和定直线l的距离之比等于常数e，并且对于椭圆e<1，对于双曲线e>1，对于抛物线e=1**。不难论证，截平面内不在圆锥曲线上的点就不具有上述这些性质。因此这些性质是点在圆锥曲线上的充要条件，即特征性质。

通常解析几何中，即取上述的这些特征性质，分别作为椭圆、双曲线、抛物线的定义和它们的统一定义，并作为进一步研究它们的性质的基础。

虽然圆锥曲线的研究，早在公元前四世纪就开始了，也积累了不少成果，为进一步研究圆锥曲线打下了基础；但是由于只作

---

* 因为$0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$。

为平面与直圆锥面的交线来研究，未能与生产实践结合起来，因而在一段漫长的时期内，对这些曲线的研究，进展是缓慢的。直到十六、十七世纪，由于当时生产的发展，各种自然科学和生产技术都有了很大的进步，这就迫切需要解决随之产生的许多新的数学问题。例如，随着机械工业的诞生和航海、建筑、造船、采矿等事业的发达，推动了天文学和力学的发展，于是变速运动的瞬时速度，曲线的切线，复杂曲线的性质等问题，都急待研究。这时在天文学上发现行星的轨道是椭圆，在力学上确定了抛射体的轨道是抛物线等，因此有关圆锥曲线的计算和深入研究也就成为追切的需要。但是，这些问题和以往的数学问题有着原则的区别，要解决这些问题，初等数学已不够用了，需要创立新的观念和方法。正是在这样的生产需要以及实践经验和知识积累的基础上，产生了用代数方法(解析法)研究几何图形的一门新的数学分科——解析几何和随之而来的新的数学分科——微积分等等。解析几何的出现，在数学发展史上是有重要意义的，它把“形”与“数”联系起来研究，打破了十七世纪以前数学中用孤立(把“形”与“数”割裂开来)、静止(主要只考虑常量与固定的图形)的方法来研究问题的状况，不仅成为研究几何图形的更有力的工具，大大促进了几何学的发展，而且改变了长期以来数学发展迟缓的面貌，推动了数学的飞跃前进。

§2 用代数方法研究曲线

圆锥曲线和其它复杂曲线，用初等几何方法(综合法)来研究，一般说来是比较困难的；在解析几何中，应用代数方法(解析法)来研究就比较方便。为此，我们先来简单地谈一谈怎样用代数方法研究曲线。

在代数里，我们常遇到“解方程”这样的课题，例如解一元方

程 $2x+3=5$、$x^2-7x+12=0$ 等等，这就意味着要求出它们的根，从而得到未知数 x 的解答。但是，用这样的观点来看二元方程，例如 $x+2y=5$、$x^2+y^2=9$、$y=x^3$ 等等，就不一样了；因为方程中关于 x、y 的解有无数多组，解是不定的。所以在笛卡儿之前，每当遇到含两个未知数的一个代数方程 $f(x,y)=0$ 时，大家都说问题是不定的，从这个方程无法决定这两个未知数。因此对于这种"不定的"方程，并没有被认为是值得关心的。

然而，自从笛卡儿引进坐标法，把含有两个未知数的方程中的 x、y 看作平面上点的坐标，并把它们看作变数，让 x"连续地改变"，对于每一个 x 的值，都可以从方程算出对应的完全确定的 y 的值，就得到一系列的有序实数对 (x, y)，再用它们作为点的坐标而描出一系列的点，一般地就得到一条曲线*。这样一来，对于含有两个变数 x,y 的一个代数方程 $f(x,y)=0$，就在平面上有一条和它对应的完全确定的曲线。

笛卡儿的这种观点，就把曲线和方程联系起来，从而能运用代数方法来研究曲线，开创了解析几何这一门新的学科。

显然，和一个代数方程对应的曲线，应该是平面上所有那些坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点的集合（轨迹）；既不能有外来的点，即曲线上的点的坐标都要满足这方程，（这就是所谓纯粹

---

* 有时方程只确定一个或几个点，例如方程 $x^2+2y^2=0$ 只确定一个原点 $O(0,0)$，方程 $(x^2-4)^2+(y-1)^2=0$ 只确定 $(2,1)$ 和 $(-2,1)$ 两个点；在这种情况下，就说方程确定**退化曲线**。有时方程没有实数解，例如方程 $x^2+y^2+1=0$，就说方程不确定任何曲线，或说确定**虚曲线**。有时方程确定几枝曲线，例如方程 $y^2=x(x-1)(x-2)$ 所对应的曲线是一环形和一无限分枝；有时方程确定一点和一曲线，例如方程 $y^2=x^2(x-2)$ 所对应的曲线是一个孤立点（即原点）和一无限分枝。

性)，也不能有遗漏的点，即坐标满足这方程的点都要在曲线上(这就是所谓完备性)。换句话说，曲线上点的集合和坐标满足方程的点的集合必须相等。

由此，我们给出如下的定义：

在给定的平面直角标系中，如果

(1)曲线C上任一点的坐标(x,y)都满足方程f(x,y)=0

(2)坐标(x,y)满足方程f(x,y)=0的点都在曲线C上，

那么，曲线C就叫做方程f(x,y)=0的曲线或图形，而方程f(x,y)=0就叫曲线C的方程。

在这里有两个基本问题：

(1)已知曲线，求它的方程——由曲线到方程的转化；

(2)已知方程，画它的曲线——由方程到曲线的转化。

这就是运用代数方法来研究曲线的基本内容；即先把研究曲线的几何问题转化成研究方程的代数问题，然后通过对方程的研究得知曲线的几何性质并画出图形。

下面我们分别研究这两个基本问题。

1.由曲线求它的方程

对于一条已知曲线，我们可以把它看作是满足某种几何条件的点的集合(或轨迹)。应该注意，这个条件必须是曲线上点的特征性质，即曲线上的点都满足这个条件，而满足这个条件的点都在曲线上。也就是说这个条件必须是点在曲线上的充要条件。

通常这些几何条件是由点与点之间的距离、直线的斜率、定比分点等等来表达的，而在给定的坐标系下，这些距离、斜率、分点等等都已经有了用有关点的坐标 x、y 表达的公式(参阅中学数学课本)；因此对于这些几何条件，常常能够用曲线上任一点的坐标 x、y 的代数式子来表达，从而得到一个方程。显然，此方

程就是曲线上点的几何条件(即点在曲线上的充要条件)用代数语言的表达式,它和几何条件是等价的,它也就是点在曲线上的充要条件,即曲线上的点的坐标满足这方程,而坐标满足方程的点在曲线上,因此这个方程就是所求的曲线的方程。

总之,求一条曲线的方程,就是在给定的坐标系下,将这曲线上任意一点(x,y)所满足的几何条件(充要条件)用关于x、y的代数式子表达出来。

一般地由曲线求其方程的步骤大致如下:

(1)建立适当的坐标系(如果问题中坐标系已给定,当然这一步就不需要了),并设 $M(x、y)$ 是曲线上的任意一点。

(2)写出点M的特征性质(即点M在曲线上的充要条件)。

(3)把这个特征性质用含有点M的坐标$(x、y)$的式子来表示,即得所求的曲线的方程。

(4)对所得方程进行必要的化简,以便于讨论研究。在化简方程时,需要注意方程的同解性问题。如果化简的过程,都是同解变形的过程,那么化简后的方程,也同样是这曲线的方程。如果化简过程中有可能破坏方程的同解性时,如把方程两边平方而消去根号、用公分母乘分式方程而消去分母、或约去方程两边的公因式等等,就应考虑方程的解是否有增减的问题,并考虑是否应对所得方程附加限制条件或加以补充。

以上的步骤完全适用于"求满足某种几何条件的动点的轨迹问题",这里轨迹上的点所满足的几何条件(充要条件)是给定的。在初等几何中,对于这类轨迹问题,首先必须通过"轨迹的探求"这步手续来发现所求轨迹是何种曲线,然后再证明所求曲线的确符合题意;在那里虽然所求的轨迹只限于直线和圆这类图形,但是由于轨迹探求,因题而异,并无一定方法,问题是不容易解答的。然而在解析几何中,就不需要预先知道轨迹的形状,

而直接根据所给条件求它的方程，再由所得的方程来讨论和画出曲线；因此，用解析法解答轨迹问题，一般说来是有其优越性的。

例 1 试求以C点为圆心，R为半径的圆的方程。

解（1）选定直角坐标系如图 1—5 所示，设圆心C的坐标为(a,b)，圆上任意一点M的坐标为(x,y)。

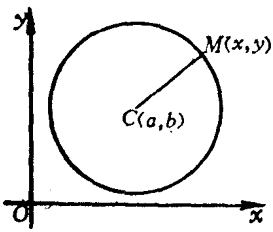

图1—5

（2）圆可以看作是到一个定点即圆心C的距离等于定长R的点的集合（轨迹），所以点M在圆上的充要条件是

$$|CM| = R. \qquad (1)$$

（3）根据两点间距离公式，(1)式可以用点M的坐标(x,y)表达为：

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \qquad (2)$$

这就是所求的圆的方程。

（4）对方程（2）进行必要的化简。把它两边平方得

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (3)$$

方程（3）同解于下列两个方程*

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R \quad 和 \quad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = -R,$$

---

* 方程(3)可写为$[\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}-R][\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+R]=0$，不难看出，它的解必为方程$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}-R=0$或方程$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+R=0$的解，反之后两方程中的任一方程的解也必为前方程的解。由此知方程(3)与后两方程，即方程$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$和方程$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=-R$同解（参阅《一次方程与二次方程》，江苏人民出版社）。

其中第一个方程就是方程(2)，第二个方程是由于平方而增加出来的，因此方程(3)可能与方程(2)不同解。但是第二个方程是矛盾等式(因为根据算术根的定义，必有左边≥ 0，而右边< 0)所以无解，因此方程(3)和方程(2)同解，它也就是所求的圆的方程。

显而易见，如果我们选定圆心C为坐标原点，那么，$a=0$，$b=0$，而圆的方程就是

$$x^2+y^2=R^2. \tag{4}$$

如果把方程(3)中的括弧展开，并进行化简，就得到

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0,$$

可以写成

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \tag{5}$$

其中$D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-R^2$。这就是说，圆的方程也可以写成(5)这种形式。反过来，任意给定一个具有(5)这种形式的方程，我们可以对它进行配方得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F),$$

由此可知它表示圆心为点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为$R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$的圆。*

方程(3)叫做**圆的标准方程**，方程(4)为其特例；方程

---

* 当$D^2+E^2-4F>0$，方程表示一圆；当$D^2+E^2-4F=0$，方程只表示一点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，即圆退化为点圆，或半径为零的圆；当$D^2+E^2-4F<0$，则方程无实数解，它不表示任何曲线，或说表示虚圆。

（5）叫做圆的一般方程。

例2 已知平面上两个定点 F_1、F_2，并且 $|F_1F_2|=6$，求到 F_1、F_2 的距离之和等于定长10的点的集合（椭圆）的方程（图1—6）。

解 取直线 F_1F_2 为 x 轴，线段 F_1F_2 的中垂线为 y 轴，如图1—6所示，那么 F_1、F_2 的坐标分别为 $(-3,0)$、$(3,0)$

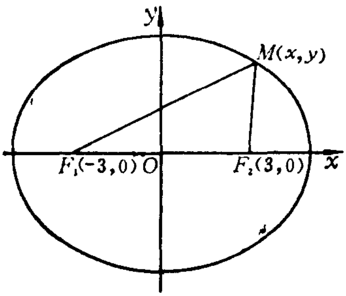

图1—6

设 $M(x,y)$ 是这椭圆上的任一点，那么它的特征性质是：

$$|MF_1|+|MF_2|=10。\quad (1)$$

根据距离公式得：

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10, \quad (2)$$

这就是所求的椭圆的方程。

对这个方程应进行必要的化简。把这方程写成：

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x-3)^2+y^2}。\quad (3)$$

把方程（3）两边平方，得

$$(x+3)^2+y^2=100-20\sqrt{(x-3)^2+y^2}+(x-3)^2+y^2, \quad (4)$$

也就是 $$5\sqrt{(x-3)^2+y^2}=25-3x。\quad (5)$$

再把方程（5）两边平方，得

$$25[(x-3)^2+y^2]=(25-3x)^2。\quad (6)$$

把括弧展开，整理得

$$16x^2+25y^2=400。\quad (7)$$

现在研究方程（7）是否与方程（2）同解。因为在化简的过

程中，除去两次平方外，其它方程的变形都不会破坏方程的同解性，所以只要研究这两次平方前后的方程是否同解即可。

先来看方程（5）与（6）是否同解。方程（6）同解于方程：

$$5\sqrt{(x-3)^2+y^2}=+(25-3x) \text{ 和}$$

$$5\sqrt{(x-3)^2+y^2}=-(25-3x)。$$

由（6）的同解方程（7）可知 $|x|\leqslant 5$，从而知$25-3x>0$，因此后一方程为矛盾等式，故无解，而前一方程即为（5），由此知方程（5）与（6）同解。

再来看方程（3）与（4）是否同解。方程（4）同解于方程：

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=+(10-\sqrt{(x-3)^2+y^2})\text{和}$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=-(10-\sqrt{(x-3)^2+y^2})。$$

由（4）的同解方程（7）可知 $|x|\leqslant 5$、$|y|\leqslant 4$，从而知 $10-\sqrt{(x-3)^2+y^2}>0$，因此后一方程无解，而前一方程即为（3），由此知方程（3）与（4）同解。

这样就知道方程（7）与方程(2)同解，它也就是所求的轨迹（椭圆）的方程。

例3 已知两点 $F_1(-5,0)$ 和 $F_2(5,0)$，求满足条件 $|MF_1|-|MF_2|=8$ 的动点M的轨迹的方程。(图1—7)

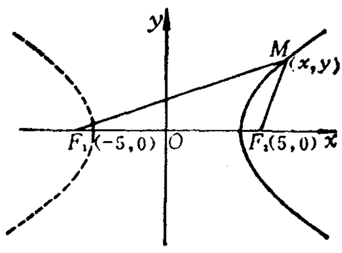

图1—7

解 这里点M在轨迹上的充要条件是

$$|MF_1|-|MF_2|=8 \tag{1}$$

把（1）用点M的坐标(x,y)表示，就得

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=8 \tag{2}$$