CHUANG XIN SHE JI

QIAO XUE

创新设计 巧学

人教版

数学

八年级下

主　编　南秀全

编　者　余曙光　张　文　刘海涛
汪　彬　李　胜　姜一明
张光军　肖九河　吕　浩
沈立新

辽宁师范大学出版社·大连

- 实用性为基础
- 权威性为特点
- 前瞻性为灵魂

解答思路

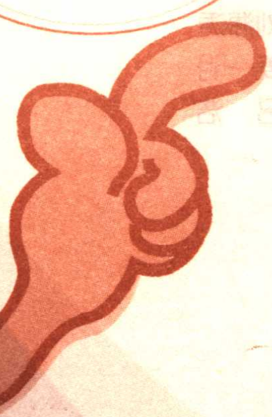
提出问题还要善于解决问题，提供最佳解题思路和技巧，避免走入误区，才能从根本上提高能力。

小故事

以夸张幽默的画面，知识性的小故事，让你在学习之余哈哈一笑，放松心情。

经典范例

将本节中出现的知识整理、提炼。以典型题的形式出现，所选题型既是经典的也是权威的。



§16.1 分式

16.1.1 从分数到分式

经典范例

例题1: 当x取何值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{x-1}{x+1}$；(2) $\frac{1}{|x|-1}$；(3) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+1}$；(4) $\frac{x^2-1}{x^2-6x-7}$.

解：(1)当$x+1\neq0$，即$x\neq-1$时，分式$\frac{x-1}{x+1}$有意义.

(2)当$|x|-1\neq0$，，即$x\neq\pm1$时，分式$\frac{1}{|x|-1}$有意义.

(3)$\because x^2\geqslant0$，$\therefore x^2+1>0$.即x为任何值时，分式$\frac{x^2-6x-7}{x^2+1}$都有意义.

(4)当$x^2-6x-7\neq0$，即$(x-7)(x+1)\neq0$，所以$x\neq7$且$x\neq-1$时，分式$\frac{x^2-1}{x^2-6x-7}$有意义.

解答思路：

(1)当分母不等于零时，分式有意义.

(2)对任何非负数(a^2, $|a|$, $\sqrt{a}$)与一个正数的和，结果总是一个正数，如(3)中$x^2+1>0$，所以x为任何数时分式都有意义.另外要注意，讨论分式没有意义时，分式不能先约分，如(4)中$\frac{x^2-1}{x^2-6x-7}=\frac{x-1}{x+7}$，这样会出现错误的结果.

例题2: 当x取何值时，下列分式的值等于零？

创新设计

巧学

追踪强化

综合性训练板块。追踪所学内容，强化所记知识。紧密结合中考，设探究题、开放题或拓展题。引导学生发散思维。

单元检测

综合检测本单元知识，易难有梯度，题目有特点。所选题目具有时代性、新颖性，同时贴近中考，增加探究题的分量。

答案与提示

只给出准确的答案不是我们要做的，给出解决问题的思路、方法，总结出一系列规律性的知识，使之具有“举一反三”的能力是我们看重的。正所谓“授之以鱼，不及授之以渔”。

追踪强化

1. 在分式 $\frac{A}{B}$ 中，当 $B=$ ______ 时，分式无意义；当 $B\neq0$ 时，分式 ______；当 A ______，且 B ______ 时分式的值为零；当 $A=B\neq0$ 时，分式的值是 ______；当 $A+B=0$ 且 $B\neq0$ 时，分式的值是 ______.

2. 在代数式 $\frac{1}{x}$，$\frac{5m}{2}$，$\frac{3x}{x+2y}$，$\frac{m^2-n^2}{3}$，$4x+\frac{y}{3}$ 中，分式是 ______，整式是 ______.

单元检测（一）

（时间90分钟，满分120分）

一、填空题（3分×10=30分）

1. 计算：$3^{-1}+(\sqrt{2}-1)^0=$ ______；$a^3\div a\cdot\frac{1}{a}=$ ______.

2. 计算：$(16x^2y^3z+8x^3y^2z)\div8x^2y^2=$ ______.

3. 已知 $x=-2$ 时，分式 $\frac{x-b}{x+a}$ 无意义，$x=4$ 时，此分式的值为零，则 $a+b=$ ______.

答案与提示

第十六章 分 式

§ 16.1 分 式

16.1.1 从分数到分式

1. 0；有意义；=0；≠0；1；-1 *2.* $\frac{1}{x}$，$\frac{3x}{x+2y}$；$\frac{5m}{2}$，$\frac{m^2-n^2}{3}$，$4x+\frac{y}{3}$ *3.* -2

4. ≠±2 *5.* 3 *6.* 0 *7.*B 提示：$\frac{1}{a}(b+c)$，$\frac{xy-6}{2x}$，$\frac{x^2-1}{x-1}$，$\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$ 是分式.

读者调查反馈表

1.你所购买的书名(写清书名、版本、年级、科目)____________________

2.你是从哪些渠道知道本书的信息的? ( )书店 ( )老师 ( )同学 ( )宣传品

3.你购买本书的理由有哪些? ( )内容充实 ( )封面新颖 ( )别人推荐 ( )其他

4.你对本书的封面及版式 ( )满意 ( )不满意 ( )还可以

5.本书的内容你认为好的地方有哪些,不足的是什么?

____

____

____

6.你选择教辅书更看重 ( )价格 ( )封面及版式 ( )内容 ( )出版社 ( )其他

7.下列宣传方式你认为哪些会对你产生影响 ( )媒体宣传 ( )店堂招贴 ( )有奖售书 ( )不受影响

8.近期你想买什么种类的教辅书,请写出几本你所喜欢的教辅书,这些书的优点是什么?

____

姓名: 年龄: 班级: 联系电话:

学校名称:

谢谢你的参与,凭该表可以按7折购买我社任何图书(免邮寄费用)。

来函请寄:辽宁省大连市沙河口区黄河路850号辽宁师范大学出版社 研发部收

邮政编码:116029 电话:0411-82159905 或登陆 www.lnnup.com 参与调查。

目录

第十七章 反比例函数

第十八章 勾股定理

第十九章　四边形

第二十章　数据的分析

第十六章 分式

怎样正确理解分式概念

由于分式的概念是在与分数类比的基础上，通过实际问题建立起来的，所以对比分式与分数概念的异同，可以加深对分式概念的正确理解.

两个整数相除可以表示成分数的形式，两个整式相除可以表示成分式的形式.

一般地，用A，B表示两个整式，$A\div B$就可以表示成$\frac{A}{B}$的形式.即分式就是两个整式相除的商，其中分母是除式，分子是被除式，而分数线可以理解为除号，且带有括号的作用.

分数的分子和分母都是具体数值，不含字母.分式的分子中可以含字母，也可以不含字母，但分式的分母中必须含有字母，这就是区别整式与分式的关键.因为“零不能作除数”，所以无论是分数还是分式，分母都不能是零.

综上所述，用A，B表示两个整式，$A\div B$就可以表示成$\frac{A}{B}$的形式，如果B中含有字母，式子$\frac{A}{B}$就叫做分式，其中$B\neq 0$.

§16.1 分 式

16.1.1 从分数到分式

经典范例

例题 1：当 x 取何值时，下列分式有意义？

(1) $\frac{x-1}{x+1}$；(2) $\frac{1}{|x|-1}$；(3) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+1}$；(4) $\frac{x^2-1}{x^2-6x-7}$.

解：(1) 当 $x+1\neq0$，即 $x\neq-1$ 时，分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 有意义.

(2) 当 $|x|-1\neq0$，即 $x\neq\pm1$ 时，分式 $\frac{1}{|x|-1}$ 有意义.

(3) $\because x^2\geqslant0$，$\therefore x^2+1>0$. 即 x 为任何值时，分式 $\frac{x^2-6x-7}{x^2+1}$ 都有意义.

(4) 当 $x^2-6x-7\neq0$，即 $(x-7)(x+1)\neq0$，所以 $x\neq7$ 且 $x\neq-1$ 时，分式 $\frac{x^2-1}{x^2-6x-7}$ 有意义.

解答思路：

(1) 当分母不等于零时，分式有意义.

(2) 对任何非负数 (a^2，$|a|$，$\sqrt{a}$) 与一个正数的和，结果总是一个正数，如(3)中 $x^2+1>0$，所以 x 为任何数时分式都有意义. 另外要注意，讨论分式有没有意义时，分式不能先约分，如(4)中 $\frac{x^2-1}{x^2-6x-7}=\frac{x-1}{x-7}$，这样会出现错误的结果.

例题 2：当 x 取何值时，下列分式的值等于零？

(1)$\dfrac{2x+3}{3x-5}$;(2)$\dfrac{|x|-3}{x+3}$;(3)$\dfrac{2x-10}{x-5}$.

解:(1)式中的 x 应满足 $3x-5\neq0$,且 $2x+3=0$,所以 $x=-\dfrac{3}{2}$时,分式$\dfrac{2x+3}{3x-5}$的值等于零.

(2)式中的 x 应满足 $x+3\neq0$,且 $|x|-3=0$,所以 $x=3$ 时,分式$\dfrac{|x|-3}{x+3}$的值等于零.

(3)当 $2x-10=0$ 时,$x-5=0$,所以分式$\dfrac{2x-10}{x-5}$的值不可能等于零.

解答思路:

(1)分式等于零的条件是:分母不等于零,分子等于零.

(2)解有关分式的值为零这类问题,由分子等于零求出分母的取值后,一定要代入分母中进行检验,否则容易出错,并且有的分式的值不可能等于零.

例题 3: 已知$\dfrac{x^2+1}{x}=4$,求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$的值.

解:$\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}=4$,

则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=16-2=14$.

解答思路:

(1)因为$\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$,$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$,所以只需将前者代入后者即可求解.

(2)此题应用了 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 这一等式,体现了解题过程中灵活应用公式的思想.

例题 4: 如果$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$,求证:$x+y=-z$.

证明:设$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}=k$.

则 $x=k(a-b)$,$y=k(b-c)$,$z=k(c-a)$.

$$x+y=k(a-b)+k(b-c)$$
$$=k(a-c)$$
$$=-k(c-a).$$

所以 $x+y=-z$.

解答思路：

(1)由给出的条件，若想分离出 x,y,z，只有应用其连比相等这一条件，设其等于 k，引入参数 k，即可为证明等式创造条件.

(2)此题的关键在于引进了参数 k，化分式为整式.这种将连比式用 k 表示，统一其条件的方法，是解决以连比式为条件题目的常用方法.

例题 5： 求使分式 $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 无意义的 x 的值.

解：要使原分式无意义，只需

①$x=0$；②$1+\dfrac{1}{x}=0$；③$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=0$.

解之得　$x=0, x=-1, x=-\dfrac{1}{2}$.

解答思路：

要使繁分式有意义，就必须使式子中的每层分式的分母不为零；反之，则应均为零.

追踪强化

1. 在分式 $\dfrac{A}{B}$ 中，当 $B=$________时，分式无意义；当 $B\neq 0$ 时，分式________；当 A________，且 B________时分式的值为零；当 $A=B\neq 0$ 时，分式的值是________；当 $A+B=0$，且 $B\neq 0$ 时，分式的值是________.

2. 在代数式 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{5m}{2}$，$\dfrac{3x}{x+2y}$，$\dfrac{m^2-n^2}{3}$，$4x+\dfrac{y}{3}$ 中，分式是________，整式是________.

3. 当 $x=2$ 时，分式 $\frac{x-b}{x+a}$ 无意义，则 $a=$______.

4. 已知分式 $\frac{5x}{|x|-2}$ 有意义，则 x______.

5. 当 $m=$______时，分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$ 的值为零.

6. 若分式 $\frac{x^2-x}{|x|-1}$ 的值为 0，则 x 的值为______.

7. 下列代数式中，分式的个数为　　（　　）

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$，$\frac{1}{a}(b+c)$，$\frac{xy-6}{2x}$，$\frac{x^2-1}{x-1}$，$\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$，$3+a$.

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

8. 使分式 $\frac{7+x}{|x|-5}$ 无意义的 x 的值为　　（　　）

A. 7　　B. -7　　C. 5　　D. ±5

9. 使分式 $\frac{3x-2}{(x-3)(x+2)}$ 有意义，则 x 满足的条件是　　（　　）

A. $x\neq3$　　B. $x\neq3$ 或 $x\neq-2$

C. $x\neq-2$　　D. $x\neq3$ 且 $x\neq-2$

10. 若 a 满足 $\frac{|a|}{a}=-1$，则 a 应为　　（　　）

A. 正数　　B. 负数　　C. 非正数　　D. 非负数

11. 使分式 $\frac{2x-1}{2x^2-5x+2}$ 等于 0 的 x 的值是　　（　　）

A. $x=\frac{1}{2}$　　B. $x=2$　　C. $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=0$　　D. 不存在

12. 分式 $\frac{a^3-a}{a^2-a}$ 等于 0 成立的条件是　　（　　）

A. $a=0$、$a=1$ 或 $a=-1$　　B. $a=1$

C. $a=-1$　　D. $a=0$ 或 $a=-1$

13. 如果代数式 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 有意义，那么 x 的取值范围是　　（　　）

A. $x\geqslant0$　　B. $x\neq1$　　C. $x>0$　　D. $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$

14. 当 x 为何值时，下列分式有意义？

$\frac{x-1}{x+5}$，$\frac{3x}{|x|+1}$，$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-3)}$.

15. 当 x 为何值时，下列分式无意义？

$\frac{4x+3}{3x-4}$，$\frac{0.4-3x}{5-6x}$，$\frac{5x-2}{1-\frac{1}{1-x}}$.

16. 当 x 为何值时，下列分式的值为 0？

$\frac{2x+1}{x-1}$，$\frac{|x|-2}{x^2-3x+2}$，$\frac{x^2-9}{2x^2-5x-3}$.

17. 要使分式 $\frac{x+1}{x^2-y^2}$ 的值为 0，x 和 y 的取值范围是什么？

18. 分式 $\frac{|x|-2}{|2x|-x-2}$ 的值为 0，求 x 的值.

19. 当 x 为何值时，分式 $\frac{6}{|x|-9}$ 的值为 -1？

20. 若$(x-4)^2+\left|\dfrac{5y-10}{y+2}\right|=0$，求代数式$\dfrac{x+y}{3x-2y}-\dfrac{4}{2x+3y}$的值.

16.1.2 分式的基本性质

经典范例

例题1：填空：

(1)$\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{(\quad)}{x^2-y^2}$；$(x-y\neq 0)$

(2)$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{1}{(\quad)}$.

解：(1)x^2-xy.　(2)$a+b$.

解答思路：

(1)本题第(1)小题，先观察分母，等式左边分式的分母是$(x+y)$，等式右边分式的分母是(x^2-y^2)，显然(x^2-y^2)是由$(x+y)$乘以$(x-y)$得到的，由分式的基本性质，右边分式的分子为$x(x-y)$. 第(2)小题，先观察分子，等式左边分式的分子是(a^2-ab+b^2)，等式右边分式的分子为1，显然1是由(a^2-ab+b^2)除以(a^2-ab+b^2)得到的，由分式的基本性质，等式左边分式的分母除以(a^2-ab+b^2)，得等式右边分式的分母为$(a+b)$.

(2)本题第(1)小题中已知分式$\dfrac{x}{x+y}$在恒等变形时，需说明$x-y\neq 0$，第(2)小题中已知分式$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$中隐含着$a^2-ab+b^2\neq 0$这个条件，所以可不附加$a^2-ab+b^2\neq 0$这个条件.

例题2：约分：

(1)$\dfrac{15m^2n}{45m^2n^2}$；(2)$\dfrac{2a(a-b)^4}{4b(a-b)^2}$；(3)$\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-49}$；

(4)$\dfrac{-35a^4b^3c}{21a^2b^4d}$；(5)$\dfrac{2x(x-y)^3}{4y(x-y)^2}$；(6)$\dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-4}$；

(7) $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

解：(1) $\dfrac{15m^2n}{45m^2n^2}=\dfrac{1}{3n}$.

(2) $\dfrac{2a(a-b)^4}{4b(a-b)^2}=\dfrac{a(a-b)^2}{2b}$.

(3) $\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-49}=\dfrac{(x+2)(x-7)}{(x+7)(x-7)}=\dfrac{x+2}{x+7}$.

(4) $\dfrac{-35a^4b^3c}{21a^2b^4d}=\dfrac{-7a^2b^3\cdot 5a^2c}{7a^2b^3\cdot 3bd}=-\dfrac{5a^2c}{3bd}$.

(5) $\dfrac{2x(x-y)^3}{4y(x-y)^2}=\dfrac{x(x-y)\cdot 2(x-y)^2}{2y\cdot 2(x-y)^2}=\dfrac{x(x-y)}{2y}$.

(6) $\dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-4}=\dfrac{-(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=-\dfrac{x-2}{x+2}$.

(7) $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}=\dfrac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y-z)(x+y+z)}=\dfrac{x-y+z}{x+y+z}$.

解答思路：

(1)因为(1)(4)小题中，分子与分母都是几个因式的积的形式，所以约去分子、分母中相同因式的最低次幂，对于分子、分母的系数约去它们的最大公约数.(2)(5)小题的分子、分母的公因式分别是$2(a-b)^2$，$2(x-y)^2$.(3)(6)(7)小题的分子、分母是多项式，应先分解因式，再约分.

(2)分子或分母的系数为负数时，一般都要把负号提到分式的前面；分式的分子、分母是多项式时，应先进行因式分解，然后再约分.

例题3：通分：

(1) $\dfrac{a}{2b},\dfrac{5bc}{3a^2},-\dfrac{5}{6abc}$；(2) $-\dfrac{5}{2a},\dfrac{2}{9a^2b^3},-\dfrac{7c}{12a^4b^2}$；

(3) $\dfrac{3x^2}{2a(a+b)^2},\dfrac{y^2}{4b(a^2-b^2)}$.

解：(1)最简公分母为：$6a^2bc$.

$\dfrac{a}{2b}=\dfrac{a\cdot 3a^2c}{2b\cdot 3a^2c}=\dfrac{3a^3c}{6a^2bc}$，

$\dfrac{5bc}{3a^2}=\dfrac{5bc\cdot 2bc}{3a^2\cdot 2bc}=\dfrac{10b^2c^2}{6a^2bc}$，

$$-\frac{5}{6abc}=-\frac{5\cdot a}{6abc\cdot a}=-\frac{5a}{6a^2bc}.$$

(2)最简公分母是：$36a^4b^3$.

$$-\frac{5}{2a}=-\frac{5\cdot 18a^3b^3}{2a\cdot 18a^3b^3}=-\frac{90a^3b^3}{36a^4b^3},$$

$$\frac{2}{9a^2b^3}=\frac{2\cdot 4a^2}{9a^2b^3\cdot 4a^2}=\frac{8a^2}{36a^4b^3},$$

$$-\frac{7c}{12a^4b^2}=-\frac{7c\cdot 3b}{12a^4b^2\cdot 3b}=-\frac{21bc}{36a^4b^3}.$$

(3)$4b(a^2-b^2)=4b(a+b)(a-b)$.

最简公分母为 $4ab(a+b)^2(a-b)$.

$$\frac{3x^2}{2a(a+b)^2}=\frac{3x^2\cdot 2b(a-b)}{2a(a+b)^2\cdot 2b(a-b)}=\frac{6b(a-b)x^2}{4ab(a+b)^2(a-b)},$$

$$\frac{y^2}{4b(a^2-b^2)}=\frac{y^2\cdot a(a+b)}{4b(a+b)(a-b)\cdot a(a+b)}=\frac{a(a+b)y^2}{4ab(a+b)^2(a-b)}.$$

解答思路：

求最简公分母可概括为以下几步：①取各分母系数的最小公倍数；②凡出现的字母(或含字母的式子)为底的幂的因式都要取；③相同字母(或含字母的式子)的幂的因式取指数最大的.最后按上述条件将取出的因式写成积的形式.在找出最简公分母后，就要确定分子、分母所应乘以的因式，这个因式就是公分母除以原分母所得的商.

例题 4：下列各式的恒等变形是否正确？为什么？

(1)$\frac{y}{x}=\frac{xy}{x^2}$；(2)$\frac{n}{m}=\frac{na}{ma}$；

(3)$\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$；

(4)$\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

解：(1)已知分式$\frac{y}{x}$中隐含 $x\neq0$ 的条件，所以可以用 x 分别乘以分式的分子与分母，分式的值不变，(1)是正确的.

(2)因为字母 a 可以取任意实数，当然也可以取零，当 $a=0$ 时，分子与分母都乘以 a，就会使得分式没有意义，所以(2)是错误的.