湖南省高职高专规划教材

YYSX

总主编 邓新春
主 审 黄立宏 罗汉

应用数学

YingYongShuXue

上册

本册主编 钟莫 高鸿

YINGYONGSHUXUE

湖南大学出版社

湖南省高职高专规划教材

应用数学

上册

主 审 黄立宏 罗 汉

总主编 邓新春

本册主编 钟 莫 高 鸿

副主编 吴忠怀 蒋明霞 魏开明

参 编 黄 振 王友琼 陈 珊

龙辉平 文益民 吴专保

编 委 文益民 王友琼 吴跃明 吴忠怀 吴专保

龙辉平 蒋明霞 邓新春 钟 莫 高 鸿

黄鹏辉 黄 振 黄小红 侯新华 孟益民

汪朝晖 贺战兵 陈 珊 魏开明

内 容 简 介

本书是根据《高职高专高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》来编写的一套高职高专规划教材，全套书共分上、下两册. 内容包括函数、极限与连续、微分与导数、一元函数微分学的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数、线性代数、概率论与数理统计等14章. 书末附有常用数学公式、积分表、部分习题的答案、数学实验等.

本书突出应用，例题、习题丰富，每章末都设有本章小结和自测题，习题分为A类基本题型和B类提高题型，书末附有数学实验，供读者灵活选择.

本书适用于高职高专工科类和经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学，成教和自学考试等系列相应专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学(上册)/邓新春总主编.
—长沙:湖南大学出版社，2006.7
ISBN 7—81113—065—3
Ⅰ.应… Ⅱ.邓… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029
中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第072059号

应用数学(上册)
Yingyong Shuxue(Shangce)

总 主 编: 邓新春　　**本册主编:** 钟 莫 高 鸿
责任编辑: 厉 亚　　**责任校对:** 张建平
封面设计: 张 毅　　**责任印制:** 陈 燕
出版发行: 湖南大学出版社
社 址: 湖南·长沙·岳麓山　　**邮 编:** 410082
电 话: 0731-8821691(发行部),8821142(编辑室),8821006(出版部)
传 真: 0731-8649312(发行部),8822264(总编室)
电子邮箱: pressliya@hun.cn
网 址: http://press.hnu.cn
印 装: 国防科技大学印刷厂
开本: 880×1230 32开　　**印张:** 10.75　　**字数:** 320千
版次: 2006年8月第1版　　**印次:** 2006年8月第1次印刷　　**印数:** 1～10 000册
书号: ISBN 7-81113-065-3/O·66
定价: 40.00元(上册定价:20.00元,下册定价:20.00元)

前　言

为了贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革、全面推进素质教育》和《教育部关于以就业为导向、深化高等职业教育改革》的文件精神，认真落实《面向21世纪教育振兴行动计划》中提出的高等教育课程改革和教材建设规划，实施"以创新精神和实践能力为重点"的培养高素质劳动者和高技能人才的职业教育，我们根据教育部《高职高专高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上，结合高职高专院校的实际，编写了这套《应用数学》教材.全书分为上、下两册，适用于高职高专工科类和经济管理类各专业，也可作为职业大学、成教和自学考试等系列相应专业的教材或参考书.

高职高专院校的数学教育必须培养如下三方面的能力：一是用数学思想、概念、方法消化吸收实际应用中的概念和原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是数学模型求解的能力.本书充分体现了上述教学思想，坚持"以应用为目的，以必须、够用为度，以创新为导向"的编写原则，其特色主要表现在：

(1)突出实用性.本书结合工科类和经济管理类专业的实际，列举了许多工业、工程、经济和管理等方面的数学模型和数学应用.在介绍重要的概念前大多给出了实际问题的背景.

(2)大胆进行改革.本书对课程的内容和体系进行了一些改革，例如先介绍微分的概念然后引入导数的定义，将微分和导数同时进行讨论等.

(3)淡化理论.本书在理论上以学生易理解和接受且不影响教学体系为度，多以几何直观启发学生，不少定理略去了繁琐的证明.

(4)注重贯彻"掌握概念、强化应用"的教学原则.把概念的掌握落实到用数学思想和数学概念解释和表达实际问题中的概念和原理上；把应用的强化落实到使学生能正确地运用所学的数学方法求解数学模

型上.

(5)结合课程的具体内容进行数学建模的介绍,注重了实际问题和数学模型之间双向“翻译”能力的培养.

(6)每章末都专设了本章小结、习题和自测题,方便了习题课的开设及学生的复习巩固.

(7)每章末都增加了一些数学小知识,简要介绍著名的数学家及其成果,期望对读者了解数学的发展、提高学习兴趣和开拓视野起到一定作用.

(8)在保证《高职高专高等数学课程教学基本要求》的同时,充分吸收了国内外同类学校的教改成果,对教学有一定的指导意义.

本教材的基本教学时数为110课时,标有*号的内容需另行安排课时.

组成本教材编写委员会的成员大都是来自省内外著名高校和高职院校的具有丰富教学和教改经验的教师.他们既深知我国高职高专教育发展现状,又非常熟悉本学科的教学规律和教改成果,熟知现代化的教学设备和教学手段.他们对编写大纲进行了反复的研究和修改讨论.全书由邓新春总主编,上册由钟莫、高鸿担任主编,下册由吴跃明、黄鹏辉、黄小红担任主编.并承湖南大学黄立宏教授、罗汉教授来主审.在本书的编审过程中得到了湖南省数学学会、湖南大学出版社和各编审人员所在单位领导的大力支持,他们也对本书的编写提出了许多有益的建议,谨在此表示衷心的感谢.

编 者

2006年6月

目　　次

第一章　函数

第一节　函数及其性质

一、函数

我们在研究自然现象、工程技术和经济分析等各种研究过程和日常生活中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不发生变化，或者说保持一定的数值，这种量称为**常量**；还有一些量在过程中不断变化，即可以取不同的数值，这种量称为**变量**.

初等数学是以基本上不变的量——常量为其主要研究对象，而高等数学则以变量为主要研究对象.所谓函数，正是变量与变量之间相互依赖关系的一种描述.它是定量化思维方式的具体表现形式.

1. 函数的概念

函数(function)这一术语最早在1672年被德国数学家莱布尼兹(Leibniz)所引入，用它来表示一个变量对另一个变量的依赖关系；瑞士数学家欧拉(L. Euler)在18世纪提出用字母 f 来表示一个函数，记号"$y=f(x)$"表示 y 的值依赖于 x 的值；到19世纪末由德国数学家黎曼(Riemann)才归纳总结成今天这样的定义：

定义　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，都有确定的数值与之对应，则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x), x\in D$，其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**函数**(**或因变量**).自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应规律 f，函数 y 有确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作

$$y_0 = y\Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

当 x 取遍 D 中的所有实数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的**值域**，即

$$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

对于函数的定义还应注意的是：

(1)函数 $y=f(x)$ 中表示对应规律的记号 f 也可以改用别的字母，如 g,φ,F 等. 这时函数就记作 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等. 当同时考察几个不同的函数时，就需要用不同的函数记号以示区别.

(2)自变量在定义域内任意取定一个数值时，变量 y 总有确定的数值与之对应，至于函数 y 有几个数值和自变量取定的那个数值相对应，由函数定义的内涵可知，至少一个，多则不限. 在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都只有唯一的 $y\in M$ 与之对应，则称此函数为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的以 x 为自变量的函数为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$ 就是一个多值函数，它有两个单值支：$y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$，它们都是单值函数.

今后若无特别说明，所研究的函数都是指单值函数.

(3)$y=c$(c 为常数)也是一类函数，习惯称为**常数函数**，它对于自变量的任何值 x 来说，函数恒取相同的数值 c，其图像是平行于 x 轴的一条直线.

2. 函数的表示法

我们使用最多的函数表示法有三种，即公式法、表格法和图示法.

(1)以数学式子表示函数的方法叫做函数的**公式法**，此时称表示函数的数学式子叫函数的**解析式**，公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2)以表格形式表示函数的方法叫做函数的**表格法**，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(3)以图形表示函数的方法叫做函数的**图示法**，图示法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势.

例 1　某城市出租车起步价为 10 元(3 km)，3 km 以后每 1 km 价为 1.8 元(不足 1 km，按 1 km 计费)，若出租车载客行驶在不需等待的公路上 5 km，试建立出租车的费用 y(元)与行驶的里程 x(km)之间的函数关系.

解　$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3,\\ 11.8, & 3<x\leqslant 4,\\ 13.6, & 4<x\leqslant 5.\end{cases}$

这是该函数的公式表示法.

图 1－1 是该函数的图像即其图示法.

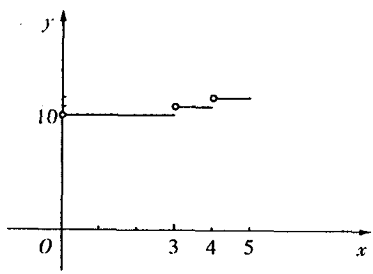

图 1－1

3. 函数的三要素

显然，从函数的定义中可以总结出函数的三要素：

(1)自变量 x 的取值范围即函数的定义域 D.

(2)对应规律也称为对应法则 f.

(3)函数 y 的值域 M.

例如，给定函数 $y=f(x)=x^2+2x+3$，这里 f 表示确定的对应法则为

$$f(\quad)=(\quad)^2+2(\quad)+3.$$

对应于 $x=1$ 的函数值为

$$f(1)=1^2+2\cdot 1+3=6,$$

对应于 $x=1+\Delta x$ 的函数值为

$$f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2+2\cdot(1+\Delta x)+3=(\Delta x)^2+4\Delta x+6,$$

而该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[2,+\infty)$.

两函数相同是指两函数的定义域和对应法则都相同.如果两函数的值域不同则两函数肯定是不同的函数.

例 2　辨别下列各对函数是否相同,为什么?

(1)$f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$;

(2)$f(t)=t$ 与 $g(t)=\sqrt{t^2}$.

解　因为(1)中两函数的定义域不同:函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数 $g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,所以这对函数不相同.

因为(2)中两函数的值域不同:函数 $f(t)$的值域为$(-\infty,+\infty)$,函数 $g(t)$的值域为$[0,+\infty)$,所以这对函数也不相同.

在实际问题中,讨论函数的定义域时还需要注意该问题的实际意义,比如在匀速直线运动中,讨论路程与时间的函数关系时,注意时间 $t\geqslant 0$.

用解析式表示的函数,其定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数,通常要考虑以下几点:

(1)在分式中,分母不能为零;

(2)在根式中,负数不能开偶次方根;

(3)在对数式中,真数必须大于零;底数大于零且不为 1;

(4)在三角函数式 $y=\tan x$ 和 $y=\sec x$ 中,$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,在 $y=\cot x$ 和 $y=\csc x$ 中,$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$;

(5)在 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 中,$x\in[-1,1]$;

(6)如果函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式时,其定义域应取各部分定义域的交集.

例 3　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{8-x}}{\ln(2x-1)}$的定义域.

解　当 $\begin{cases}8-x\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ \ln(2x-1)\neq 0,\end{cases}$

即

$$\begin{cases} x \leqslant 8, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1 \end{cases}$$时，原函数才有意义，

所以

$$\frac{1}{2} < x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leqslant 8,$$

即
$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 8],$$

这就是该函数的定义域.

二、函数的四大特性

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(x)=f(-x)$，则称 $y=f(x)$为**偶函数**；如果有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 不是偶函数也不是奇函数的函数，称为**非奇非偶函数**.

例 4　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解　因为　$x\in(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2}) \\ &= \ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

2. 周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，若存在一个非零常数 T，使得对于一切实数 $x\in D$，都有

$$f(x+T) = f(x).$$

则称 $y=f(x)$为**周期函数**. 非零常数 T 叫做该函数的一个周期.

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

例 5 已知函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q},\end{cases}$$

$\mathbf{Q}$ 为有理数集，求其周期.

解 因为任一 $T\in\mathbf{Q}$，只要 $T\neq 0$，总有 $D(x+T)=D(x)$，所以任何非零有理数都是该函数的周期，显然，任何一个无理数都不是该函数的周期.

3. 单调性

如果对于区间(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加**的；如果当$x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是**单调减少**的. 单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**.

类似地，可以定义无穷区间上的单调函数.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

例 6 判断函数 $f(x)=x^3$ 的单调性.

解 因为对于区间$(-\infty,+\infty)$上的任意两点 x_1,x_2，如果 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

4. 有界性

设函数 $f(x)$在区间 I（I 可以是函数 $f(x)$的整个定义域，也可以只是定义域的一部分）上有定义，若存在一个正数 M，当 $x\in I$ 时，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$为在 I 上的**有界函数**. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$为在 I 上的**无界函数**.

例如，取 $M\geqslant 1$，那么在区间$(-\infty,+\infty)$内，总有$|\sin x|\leqslant M$，所以，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的. 而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在(0，