·各个击破·

名师视点

MINGSHI SHIDIAN

高中数学

·不等式·

张绍春　主编

双色亮丽版

东北师范大学出版社

名师视点 各个击破

名师视点

MINGSHI SHIDIAN

高中数学

·不等式·

张绍春 主编

东北师范大学出版社·长春

图书在版编目（CIP）数据

名师视点．高中数学．不等式/张绍春主编．—长春：东北师范大学出版社，2002．6
ISBN 7-5602-3022-9

Ⅰ．名… Ⅱ．张… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 029553 号

MINGSHI SHIDIAN

□出 版 人：贾国祥 □策划创意：一编室
□责任编辑：石 斌 □责任校对：曲延涛
□封面设计：魏国强 □责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号 邮政编码：130024
电话：0431—5695744 5688470 传真：0431—5695734
网址：WWW.NNUP.COM 电子函件：SDCBS@MAIL.JL.CN

东北师范大学出版社激光照排中心制版
沈阳新华印刷厂印刷
2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷

开本：890mm×1240mm 1/32 印张：7 字数：205 千
印数：00 001 — 50 000 册

定价：8.50 元

CHUBANZHE DE HUA

出版者的话

《名师视点》丛书的创意始于教材改革的进行，教材的不稳定使教辅图书市场一度处于混乱状态，新旧图书杂糅，读者即使有一双火眼金睛，也难辨真伪。但无论各版别的教材如何更新、变革，万变不离其宗的是，删改陈旧与缺乏新意的内容，增加信息含量，增强人文意识，创新精神，增添科技内涵，活跃思维，培养学生的创新、理解、综合分析及独立解决问题等诸多能力，而这些目标的实现均是以众多不断调整的知识版块、考查要点串连在一起的，不管教材如何更改，无论教改的步子迈得多大，这些以丰富学生头脑，开拓学生视野，提高其综合素养为宗旨的知识链条始终紧密地联系在一起，不曾有丝毫的断裂，而我们则充分关注形成这一链条的每一环节，这也是“视点”之所在。

《名师视点》丛书的出版正是基于此种理念，涵盖初高中两个重点学习阶段，以语文、英语、数学、物理、化学五个学科为线索，以各科可资选取的知识版块作为专题视点，精讲，精解，精练。该丛书主要具有以下特点：

一、以专题为编写线索

语文、英语、数学、物理、化学五主科依据初高中各年级段整体内容及各学科的自身特点，科学、系统地加以归纳、分类及整理，选取各科具有代表性的知识专题独立编写成册，并以透彻的讲解，精辟的分析，科学的练习，准确的答案为编写思路，再度与一线名师携手合作，以名师的教学经验为图书的精髓，以专题为视点，抓住学科重点、知识要点，缓解学生过重的学习负担。

二、针对性、渗透性强

“专题”，即专门研究和讨论的题目，这就使其针对性较明显。其中语文、英语两科依据学科试题特点分类，数学、物理、化学各科则以知识块为分类依据，各科分别撷取可供分析讨论的不同版块，紧抓重点难点，参照国家课程标

准及考试说明，于潜移默化中渗透知识技能，以达“润物细无声”之功效。

三、双色印刷，重点鲜明

《名师视点》丛书采用双色印刷，不仅突破以往教辅图书单调刻板的局限，而且对重点提示及需要引起学生注意的文字用色彩加以突出，使其更加鲜明、醒目。这样，学生在使用时既可以方便地找到知识重点，又具有活泼感，增添阅读兴趣。

四、适用区域广泛

《名师视点》丛书采用“专题”这一编写模式，以人教版教材为主，兼顾国内沪版、苏版等地教材，汲取多种版本教材的精华，选取专题，使得该套书在使用上适用于全国的不同区域，不受教材版本的限制。

作为出版者，我们力求以由浅入深、切中肯綮的讲解过程，化解一些枯燥的课堂教学，以重点、典型的例题使学生从盲目的训练中得以解脱，以实用、适量的练习减少学生课下如小山般的试卷。

我们的努力是真诚的，我们的探索是不间断的，成功并不属于某一个人，它需要我们的共同努力，需要我们携手前行。

东北师范大学出版社
第一编辑室

MINGSHI SHIDIAN

目录

名师视点

MINGSHI SHIDIAN

名师视点

第一章 不等式及其性质

第一节 两个实数差的符号与大小顺序关系

客观世界中不等的数量关系反映在数学中可归结为不等式问题. 如同方程问题一样,用不等号连结两个代数式所成的式子称为不等式. 教材中以实数集的基本性质为基础,特别推证了不等式的基本性质,提供了不等式变形的法则. 不等式的性质是解不等式和证明不等式的理论基础,对不等式性质理解、掌握得不好,忽视性质的重要性,特别是在解题中不能灵活应用性质,就会导致解不等式和证明不等式的错误和缺陷. 因此,一定要熟练掌握不等式性质,弄清条件和结论,学会正确推导.

知识技能

在日常生活中,我们常说 A 量大于 B 量,意思是说,从 A 量中减去 B 量还有剩余. 在数集中,我们用同样的方式规定数值之间的大小顺序,并且用不等号“>”表示“大于”,用不等号“<”表示“小于”.

实数集 $\mathbf{R}$ 的基本性质主要有:

1 实数集可以划分为三个互不相交的子集:正实数集 $\mathbf{R}_+$,负实数集 $\mathbf{R}_-$,以及只含有一个元素的集合 $\{0\}$,即 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_-\cup\{0\}\cup\mathbf{R}_+$.

任意实数 a,b 的差 $a-b$ 或为正数,或为 0,或为负数,三者必居其一,即 $a>b$,或 $a=b$,或 $a<b$,有且仅有一种成立.

这就说明,对于任意两个实数 a,b,其大小顺序有以下充分必要条件:

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0;\quad a=b\Leftrightarrow a-b=0;\quad a<b\Leftrightarrow a-b<0.$$

上面各式中,右边的部分反映的是实数的运算性质,而左边的部分反映的则是实数的大小顺序,合起来就称为实数的运算性质与大小顺序之间的关系.它是证明不等式和解不等式的主要依据.

2 正实数集 $\mathbf{R}_+$ 对于加法、乘法是运算封闭的,即 $a>0,b>0\Leftrightarrow a+b>0,a\cdot b>0.$

引进数轴后,实数集 $\mathbf{R}$ 和数轴 L 上的点就建立了一一对应关系:

$$x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow \text{点 } P\in L.$$

这种对应关系使得数轴上的点之间的左、右顺序和实数集中数之间的大、小顺序是对应的. 如图 1 - 1 所示.

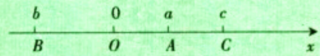

图 1 - 1

(1)数轴上的点 B 在点 A 的左侧$\Leftrightarrow$实数 $b<$实数 a;

(2)数轴上的点 C 在点 A 的右侧$\Leftrightarrow$实数 $c>$实数 a.

我们已经知道,含有不等号的式子叫做不等式.不等式包括混合不等式和含有变数的不等式.

对于混合不等式,其意义必须明确,即

$$a\geqslant b\Leftrightarrow a>b \text{ 或 } a=b,$$

$$a<b<c\Leftrightarrow a<b \text{ 且 } b<c,$$

$$a<b\leqslant c\Leftrightarrow\begin{cases}a<b,\\ b<c\end{cases}\text{或}\begin{cases}a<b,\\ b=c.\end{cases}$$

含有变数的不等式一般描述为实数集的一个子集,即

$$P=\{x\in\mathbf{R}\mid -2\leqslant x<2\},$$

也可以写成

$$x\in[-2,2).$$

典型示例

例 1 设 $a>0,b>0$,试比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ 的大小.

根据两个实数大小的充分必要条件 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$，$a-b=0\Leftrightarrow a=b$ 以及 $a-b<0\Leftrightarrow a<b$ 可知，要比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ 的大小，只须考察它们的差即可.

解：$\because a,b\in\mathbf{R}_+$，

$$\begin{aligned}\therefore\ &\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\\&=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}\\&=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\\&=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\\&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant 0.\end{aligned}$$

$\therefore\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

例 2 比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

解：$x^6+1-(x^4+x^2)=x^6-x^4-x^2+1=x^4(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(x^4-1)$

$=(x^2-1)^2(x^2+1)\geqslant 0.$

$\therefore$ 当 $x=\pm 1$ 时，$x^6+1=x^4+x^2$；当 $x\neq\pm 1$ 时，$x^6+1>x^4+x^2$.

说明：本题与例 1 比较，等号成立的条件有些区别，例 1 中要使"="成立，只须 a，b 具备"$a,b\in\mathbf{R}_+$，$a=b$"这一条件，而本题中指出了"="成立时 x 的具体值，即"$x=\pm 1$".

例 3 设 $a>0$，比较 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}$ 与 $a+\frac{1}{a}-2$ 的大小.

解：$\because a^2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 0$，$a+\frac{1}{a}-2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant 0$，

$\therefore\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\sqrt{2}$，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$，$\therefore\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant 0$，$a+\frac{1}{a}-2\geqslant 0$.

设 $P=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}$，$Q=a+\frac{1}{a}-2$.

$\therefore P^2-Q^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\right)-\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+4-4\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$

$$=4\left(a+\frac{1}{a}\right)-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}-4$$

$$=4\left(a+\frac{1}{a}-1\right)-2\sqrt{2}\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}$$

$$=2\sqrt{2}\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}-1\right)-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left[2\left(a+\frac{1}{a}-1\right)^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\right]}{\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}-1\right)+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-2\right]^2}{\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}-1\right)+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2}}\geqslant 0,$$

$\therefore P^2\geqslant Q^2$，由 $P\geqslant 0,Q\geqslant 0$，$\therefore P\geqslant Q$，即

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant a+\frac{1}{a}-2\text{（当且仅当 }a=1\text{ 时取等号）}.$$

说明：根式比差不易直接比较，所以考虑将其平方后再比较，此时依据幂函数的单调性.

例4 已知 $x>0,x\neq 1,m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小.

解：$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}=(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)$

$$=(x^m-x^n)\cdot\frac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}.$$

(1)当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$ 知 $x^m<x^n$ 且 $x^{m+n}<1$，则有 $\frac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}<0$，

$\therefore (x^m-x^n)\frac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}>0.$

(2)当 $x>1$ 时，由 $m>n>0$ 知 $x^m>x^n$ 且 $x^{m+n}>1$，则有 $\frac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}>0$，

$\therefore (x^m-x^n)\frac{x^{m+n}-1}{x^{m+n}}>0.$

综上，$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0$，即 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}$.

说明：不等式的研究中，分类讨论思想极为重要，从头开始，用心体会.

例5 已知 $x\in\mathbf{R}$，求证：$x^6-x^5+1>0$.

分析 本题变形比较困难，若 x 的取值范围受限制就比较容易解决，因而将 $\mathbf{R}$ 分成几类情况分别讨论.

证明：(1)当 $x\leqslant 0$ 时，$x^6\geqslant 0$，$1-x^5>0$，则 $x^6-x^5+1>0$；

(2)当 $0<x\leqslant 1$ 时，$x^6>0$，$1-x^5\geqslant 0$，则 $x^6-x^5+1>0$；

(3)当 $x>1$ 时，$x^6>x^5$，则 $x^6-x^5+1>0$.

因此，对于 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^6-x^5+1>0$.

说明：将实数集分为几个子集，然后在每一子集内分析问题，解决问题，这也是常用的数学方法之一．要注意的是：分类（对实数集进行分类）要满足分类标准，即不重不漏．如这里的实数 0 和 1 分别归入且只归入一个子集内.

能力检测

一、选择题

1. 下列各实数中，恒大于 0 的一个是（　　）.

A. a^2　　B. a^2+b^2　　C. $\lg\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$　　D. $|a|+(b+1)^2$

2. 若 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是（　　）.

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)=g(x)$

C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 值变化而变化

3. 若 $a\neq 2$ 或 $b\neq -1$，则 $M=a^2+b^2-4a+2b$ 的值与 -5 的大小关系是（　　）.

A. $M>-5$　　B. $M<-5$　　C. $M=-5$　　D. 不能确定

4. 设 $a>b>0$，下列各数小于 1 的是（　　）.

A. 2^{a-b}　　B. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$　　C. $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$　　D. $\left(\frac{b}{a}\right)^{a-b}$

二、填空题

5. $a>b$ 与 $c>d$ 是两个 ______ 向不等式，$a<b$ 与 $c>d$ 是两个 ______ 向不等式.

6. x^2+1 ______ $2x^2+x+2$（用“>”，“=”，“<”填空）.

7. $(a+3)(a-2)$______$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$(用“>”,“=”,“<”填空).

8. a,b,c 是不全相等的实数,则 a^2+c^2______$2(ab+bc-b^2)$.

三、解答题

9. 比较 a^2-2a 与 $a-3$ 的大小.

10. 比较 $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 与 $2\sqrt{n}$ 的大小($n\in \mathbf{N}_+$).

参考答案 KEY

一、**1.** C **2.** A **3.** A **4.** D

二、**5.** 同 异 **6.** < **7.** < **8.** >

三、**9.** $\because (a^2-2a)-(a-3)=a^2-2a-a+3=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, $\therefore a^2-2a>a-3$.

10. $\because \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-2\sqrt{n}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-2\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>0,$$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}>2\sqrt{n}$.

第二节 不等式的性质

知识技能

不等式的性质是解不等式、证明不等式的基础和依据. 教材中列举了不等式的性质,由这些性质可以继续推导出其他有关性质. 教材中所列举的性质是最基本、最重要的,因此不仅要掌握性质的内容,还要掌握性质的证明方法,理解性质成立的条件,把握性质之间的关联. 只有理解好,才能牢固记忆及正确运用.

依据实数集的基本性质，可以证明不等式的下列基本性质.

性质一：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

证明：$a>b \Rightarrow a-b>0$，由正数的相反数是负数得$-(a-b)<0$，即 $b-a<0$，$\therefore b<a$.

同理，由 $b<a$ 得 $a>b$.

$\therefore a>b \Leftrightarrow b<a$.

性质二：若 $a>b$ 且 $b>c$，则 $a>c$.

证明：$a>b \Leftrightarrow a-b>0$，$b>c \Leftrightarrow b-c>0$，根据实数的基本性质 2，将以上两式右端的不等式两边分别相加，就得出$(a-b)+(b-c)>0$，即 $a-c>0$，$\therefore a>c$.

性质三：若 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

证明：$a>b \Leftrightarrow a-b>0 \Leftrightarrow a-b+c-c>0 \Leftrightarrow (a+c)-(b+c)>0 \Leftrightarrow a+c>b+c$.

由此可得出以下推论：

(1)不等式中任何一项改变符号后可移到不等式的另一边，即

$$a+c>b \Leftrightarrow a>b-c.$$

(2)两个同向不等式的两边分别相加，仍得同向不等式，即

$$a>b,c>d \Rightarrow a+c>b+d.$$

性质四：$a>b,c>0 \Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0 \Rightarrow ac<bc$.

证明：$a>b,c>0 \Rightarrow a-b>0$ 且 $c>0 \Rightarrow (a-b)\cdot c>0 \Rightarrow ac-bc>0 \Rightarrow ac>bc$；

$a>b,c<0 \Rightarrow a-b>0$ 且$-c>0 \Rightarrow (a-b)\cdot(-c)>0 \Rightarrow -ac+bc>0 \Rightarrow ac<bc$.

由此还可以得出以下推论：

(3)若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$.

(4)若 $a>b$ 且 a、b 同号，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

(5)若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n(n \in \mathbf{N}_+)$.

以上五个推论，这里只给出(3)的证明，其他的请同学们自己加以证明.

证明：由 $\left.\begin{aligned} &a>b,c>0 \Rightarrow ac>bc, \\ &\text{又 } c>d,b>0 \Rightarrow bc>bd \end{aligned}\right\} \Rightarrow ac>bd.$

性质五：$a>b>0$，则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbf{N}$ 且 $n>1$).

证明：用反证法.假设$\sqrt[n]{a}$不大于$\sqrt[n]{b}$，则或者$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，或者$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$. 但

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \Rightarrow a<b,\quad \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \Rightarrow a=b,$$

与已知条件 $a>b$ 矛盾，所以$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，即

$$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\ (n \in \mathbf{N} \text{ 且 } n>1).$$

说明：还可以根据幂函数 $y=x^{\frac{1}{n}}(x>0)$的单调性证明此性质.

学习不等式的基本性质时，对表达不等式性质的各个不等式，要注意“箭头”

是单向的还是双向的，也就是说，每条性质是否具有可逆性.

利用不等式的基本性质解答不等式问题，要注意不等式成立的条件，否则会出现一些错误. 例如，推论(5)“$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N}_+)$”若去掉“$b>0$”这个条件，取$a=3,b=-4,n=2$，那么就会出现“$3^2>(-4)^2$”，即“$9>16$”的错误结论.反例不胜枚举.

典型示例

例1 试证：若$a>b,c>d$，则$a-d>b-c$.

解析 利用第一节学过的实数的基本性质或本节所学的不等式的基本性质都可证明.

证法一：$\left.\begin{array}{l}a>b\Leftrightarrow a-b>0,\\ c>d\Leftrightarrow c-d>0\end{array}\right\}\Rightarrow(a-b)+(c-d)>0\Rightarrow(a-d)-(b-c)>0\Rightarrow a-d>b-c.$

证法二：$\left.\begin{array}{c}c>d\Leftrightarrow d<c\text{（对称性）}\Rightarrow -d>-c\text{（性质四）},\\ \text{又 } a>b\end{array}\right\}\Rightarrow a+(-d)>b+(-c),$

即$a-d>b-c$.

例2 若$a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是（　　）.

A. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B. $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

解析 ①$\because a<b<0,\therefore -a>-b>0,\therefore \dfrac{1}{-a}<\dfrac{1}{-b},\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b},\therefore$ A 成立；

②$\because a<b<0,\therefore |a|>|b|,\therefore$ C 成立；

③$\because$ 由$-a>-b>0,\therefore (-a)^2>(-b)^2,a^2>b^2,\therefore$ D 成立；

④$\because a<b<0,\therefore a-b<0,a<a-b<0,-a>b-a>0,\dfrac{1}{-a}<\dfrac{1}{-(a-b)},\therefore \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{a-b},$

$\therefore$ B 不成立，应选 B.

例3 若a,b是任意实数，且$a>b$，则（　　）.

A. $a^2>b^2$　　B. $\dfrac{b}{a}<1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$

解析 已知$a,b\in\mathbf{R}$且$a>b$.

①有性质$a>b>0\Rightarrow a^2>b^2$，但$a>b\nRightarrow a^2>b^2,\therefore$ A 不成立；

②$\because a>b$，即$b<a$，若$a>0\Rightarrow \dfrac{b}{a}<1$，但$a$不具备这样的条件，$\therefore$ B 不成立；

③∵只有 $a-b>1\Rightarrow \lg(a-b)>0$，但 $a>b\Rightarrow a-b>0$，∴C 也不成立；

④由指数函数性质，考察函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，∵ $0<\frac{1}{2}<1$，∴函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数，由 $a>b\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，∴D 成立.

∴应选 D.

例 4 运用不等式的基本性质证明：

(1)若 $a>b>0$，且 $c>d>0$，则 $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$；

(2)若 $a>b$，$c<0$，则 $c(a-d)<c(b-d)$；

(3)若 $a>b>0$，且 $c<d<0$，$e<0$，则 $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

证明：(1) $\left.\begin{array}{l}a>b>0,\\ c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd>0\Rightarrow\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$.

(2) $\left.\begin{array}{l}a>b\Rightarrow a-d>b-d,\\ \text{又 } c<0\end{array}\right\}\Rightarrow c(a-d)<c(b-d)$.

(3) $\left.\begin{array}{l}a>b>0,\\ c<d<0\Rightarrow -c>-d>0\end{array}\right\}\Rightarrow a-c>b-d>0\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d},\\ \text{又 } e<0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

能力检测

一、选择题

1. 下列不等式中，一定成立的有(　　).

①$5\geqslant3$　②$2\geqslant2$　③$a^2>0$　④$1-a<1$　⑤$a^2-2a+2>0$

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

2. 若 $a^3<-6$，下列关系中，正确的是(　　).

A. $a^4>-6a$　　B. $a^2<\frac{-6}{a}$　　C. $a^3-1<-8$　　D. $a>\sqrt[3]{-6}$

3. 下列命题中，正确的命题是(　　).

①不等式两边减去同一个数或整式，不等号方向不变.

②不等式两边乘以同一个整式，不等号方向不变.

③不等式两边立方，不等号方向不变.

④不等式两边分别取倒数,不等号方向不变.

A. ①② B. ①④ C. ②④ D. ①③

4. 若 $a+b>0$, $b<0$, 则有( ).

A. $a>b>-a>-b$

B. $a>-a>-b>b$

C. $a>-b>b>-a$

D. $-b>a>b>-a$

5. 给出四个条件:① $b>0>a$; ② $0>a>b$; ③ $a>0>b$; ④ $a>b>0$. 其中能推得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的有( ).

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

6. 以下四个命题中,正确的命题有( ).

① $a>b\Rightarrow|a|>|b|$ ② $a>b\Rightarrow a^2>b^2$ ③ $|a|>b\Rightarrow a>b$ ④ $a>|b|\Rightarrow a>b$

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

7. 下列命题中,不正确的是( ).

A. 若 $a>b$, 则 $a^3>b^3$

B. 若 $x>y$, 则 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$

C. 若 $c>d$, 则 $2c>c+d$

D. 若 $m>n$, $p>t$, 则 $m(p-t)>n(p-t)$

8. 若 $a>b$, 则( ).

A. $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$ B. $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ C. $a^3>b^2$ D. $a^2>b^3$

9. $-1<\alpha<\beta<1$, 则下列各式中,恒成立的是( ).

A. $-2<\alpha-\beta<0$

B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-1<\alpha-\beta<0$

D. $-1<\alpha-\beta<1$

10. 当 $a>b>c$ 时,下列不等式恒成立的是( ).

A. $ab>ac$ B. $a|c|>b|c|$ C. $|ab|>|bc|$ D. $(a-b)|c-b|>0$

二、填空题

11. 若 $a<b$, $\theta\in(0,\pi)$, 比较大小: $a\lg\sin\theta$ ______ $b\lg\sin\theta$.

12. 在横线上填上适当的条件,使下列各命题成立:

(1)若 $a>b$, 且 ______, 则 $a^2>b^2$;

(2)若 $a^2>b^2$, 且 ______, 则 $a<b$.

13. 设 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, 则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是 ______.

14. 设 $x>1$, $-1<y<0$, 试将 $x,-x,y,-y,-xy$ 按由小到大的顺序排列: ______.

15. 已知 a,b,c,d 为正数,且 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$. 当 $b>2d$ 时, $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a-2c}{b-2d}$ 三个式子中最大的是 ______; 当 $b<2d$ 时, $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a-2c}{b-2d}$ 三个式子中最大的是 ______.