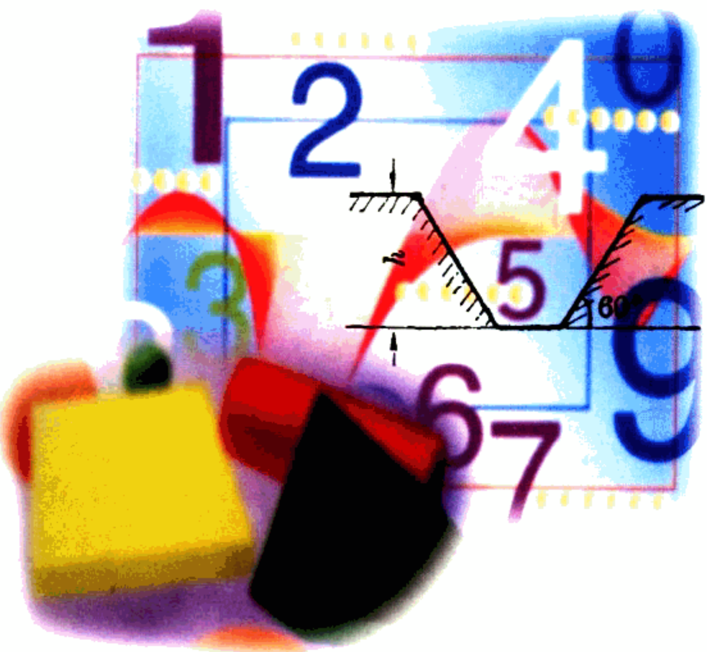
九年制义务教育选修课本（试用本）

初中代数选读

（供八、九年级用）



上海科学技术出版社

ISBN 7-5323-3318-3

9 787532 333189 >

经上海市中小学教材审查委员会
审查试用　准用号:CX—940005

九年制义务教育选修课本(试用本)

初中代数选读

(供八、九年级用)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会编

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社　出版、发行

(上海钦州南路71号　邮政编码：200235)

新华书店上海发行所经销　上海市委党校印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 3.5　字数 75,000

1993年7月第1版　2006年6月第10次印刷

ISBN 7-5323-3318-3/G · 574

定价：3.20元

说　明

本教材根据上海中小学课程教材改革委员会制订的《选修课程标准》(草案)编写,供八年级或九年级选用，教学时间需34课时。

本教材是试用本,由叶声扬同志编写。由于时间仓促,定有不足之处,希望试用本教材的各校师生提出宝贵意见,使之进一步完善。

目　录

第一章　数与式

一、用字母表示数

1.1　用字母表示数

用字母表示数是解数学题和研究数学理论的十分有用的方法，应用字母表示数有许多优点，譬如：

1．　可以表示数的某些规律和性质

等式 $1+2=2+1$ 仅说明 $1+2$ 和 $2+1$ 相等，但不能说明 $3+4$ 和 $4+3$ 是否也相等，而 $a+b=b+a$，则说明了任何两个数 a 与 b 相加都具有可交换性，也就是加法的交换律。

2．　应用字母表示几何图形的面积、体积公式比用文字叙述简洁，而且计算时方便。

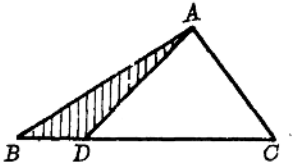


图 1.1

例 1　如图 1.1 所示，BD 是 BC 的 $\frac{1}{4}$，AD 分 $\triangle ABC$ 为两部分，其中 $\triangle ADC$ 面积为 12 平方厘米，求阴影部分面积。

解　设 $BD=x$ 厘米，则 $CD=3x$ 厘米，又设高为 h 厘米。

由题意，得

$$\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot h=12,$$

等式两边除以 3，得

$$\frac{1}{2}\cdot xh=4,$$

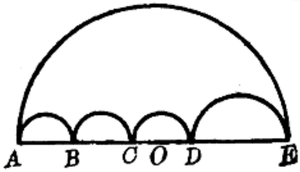


图 1.2

即$\triangle ABD$面积为 4 平方厘米。

例 2 如图 1.2 所示，AE 为半圆弧$\overset{\frown}{AE}$的直径，B、C、D 为 AE 上任意的三点，分别以 AB、BC、CD、DE 为直径作半圆。试比较$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}$与$\overset{\frown}{AE}$的大小。

解 记 $AB=2r_1$，$BC=2r_2$，$CD=2r_3$，$DE=2r_4$，$AE=2r$。由弧长公式得半圆弧

$$\overset{\frown}{AE}=\pi r,\quad \overset{\frown}{AB}=\pi r_1,\quad \overset{\frown}{BC}=\pi r_2,\quad \overset{\frown}{CD}=\pi r_3,\quad \overset{\frown}{DE}=\pi r_4.$$

又 $\because\quad 2r=2r_1+2r_2+2r_3+2r_4,$

$$\therefore\quad r=r_1+r_2+r_3+r_4.$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AE}=\pi r=\pi(r_1+r_2+r_3+r_4)$$

$$=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}.$$

即它们的大小是相等的。

3．应用字母表示数可使某些问题思考更容易，说理更清楚。

例 3 任给一个两位数，交换它的个位和十位上的数字，得到一个新的两位数，这个新的两位数与原两位数的差是 9 的倍数，为什么？

解 设原来的两位数是$\overline{ab}$，则新的两位数是$\overline{ba}$，

$$\therefore\quad \overline{ba}-\overline{ab}=(10b+a)-(10a+b)=9(b-a).$$

故它们的差是 9 的倍数。

例 4 计算：$456787\times456782-456780\times456789$。

分析 本题可直接作乘法计算，但运算量较大，如设 $a=456780$，

把各数分别用字母 a 表示，可减少运算量.

解 设 $a=456780$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (a+7)\times(a+2)-a\times(a+9)\\
&=(a^2+9a+14)-(a^2+9a)\\
&=14.
\end{aligned}
$$

例 5 如图 1.3 所示，甲、乙中，阴影处是同样大小的四个小矩形，尺寸如图所示，求物体的高 x。

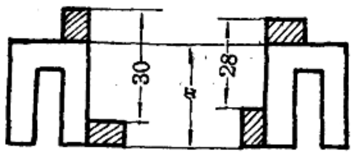


图 1.3

解 设小矩形的长、宽分别为 a 和 b。由甲图知 $x+a-b=30$；由乙图知，$x+b-a=28$。

上面两等式两边分别相加，得

$$(x+a-b)+(x+b-a)=58,$$

$$\therefore\quad x=29.$$

所以所求的物体高为 29（长度单位）。

例 6 已知：甲、乙两数均大于 2，试比较这两个数的和与积的大小。

解 设甲数为 a，乙数为 b，则它们的和与积分别是 $a+b$ 和 $a\cdot b$。

$$
\begin{aligned}
\because\quad ab-(a+b) &= (ab-a-b+1)-1\\
&=(a-1)(b-1)-1.
\end{aligned}
$$

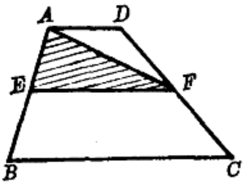
由题设，$a>2$ 及 $b>2$，所以 $a-1>1$ 且 $b-1>1$，从而

$(a-1)(b-1)>1$，因此$ab-(a+b)>0$，

即 $ab>a+b$。

练 习 一

1. 在三位数 $\overline{abc}$ 中，如 $a+b+c$ 能被 3 整除，证明此三位数也能被 3 整除。
2. 证明：六位数 $\overline{abc\,abc}$ 能被 $7\times11\times13$ 整除。
3. 证明：任意奇数的平方与 1 的差，能被 8 整除。
4. 某人上午出发，从甲地到乙地。如以每小时 5 千米速度步行，则晚上 8 点到达；如以每小时 40 千米速度乘车，则上午 9 点半就能到达；骑自行车，中午 12 点到达。问：从甲地到乙地，骑车需要几个小时？
5. 若 $9\mid\overline{5x6x7x3}$，求 x。
6. 三位数 $\overline{2x3}$ 与 326 相加，其和为 $\overline{5y9}$，如果 $9\mid\overline{5y9}$，求 $x+y$ 的值。



（第12题）

7. 如图，已知梯形$ABCD$，EF是中位线。若梯形 $ABCD$ 的面积为 1，求阴影部分的面积。
8. 计算： $9998\times99979997-9997\times99989998$。
9. 六位数 $\overline{abcde1}$ 是六位数 $\overline{1abcde}$ 的 3 倍，求六位数 $\overline{abcde1}$。

二、绝 对 值

1.2 绝对值的意义

在数轴上表示一个数的点，它到原点的距离称作这个数

的绝对值。我们用符号“| |”来表示“绝对值”。

由绝对值的意义，我们得到下述结论：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases}a,\text{当 } a>0 \text{ 时；}\\ 0,\text{当 } a=0 \text{ 时；}\\ -a,\text{当 } a<0 \text{ 时。}\end{cases}$$

因此，对任何实数 a 均有下列性质：

(1) $|a|\geqslant 0$； (2) $|a|=|-a|$； (3) $|a|\geqslant a$；

(4) $|a|\geqslant -a$； (5) $|a|^2=a^2$。

以上性质不难证明，下面仅对性质(4)给出证明：

证明 当 $a>0$ 时，$|a|=a$。 $\because\ -a<0$，

$$\therefore\ |a|>-a;$$

当 $a=0$ 时，$|a|=0$。 $\because\ -a=0$， $\therefore\ |a|=-a$；

当 $a<0$ 时，$|a|=-a$。

综上讨论知，对一切实数 a，均有 $|a|\geqslant -a$ 成立。

在运用上述性质时，我们还要注意，性质(1)即实数的绝对值是非负数，$|a|\geqslant 0$ 中的等号只有当 $a=0$ 时成立；性质(3) $|a|\geqslant a$ 中的等号只有当 $a\geqslant 0$ 时成立；性质(4) $|a|\geqslant -a$ 中的等号只有当 $a\leqslant 0$ 时成立。

1.3 含绝对值的代数式

代数式、方程或不等式中，常有绝对值符号出现，为了进一步运算，经常要去掉绝对值符号，下面介绍去绝对值符号的一些常用方法。

1. 根据绝对值的定义或几何意义

例 1 已知：a、b、c 三数在数轴上对应的位置如图1.4所

示，若 $|a|=|b|$，计算：

$$|a|+|b|+|c|-|a-b|-|b-c|-|c-a|.$$

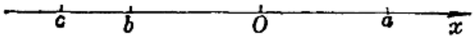


图 1.4

解 由图 1.4 可知，$a>0$、$b<0$、$c<0$、$a-b>0$、$b-c>0$、$c-a<0$。

由绝对值的定义，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a+(-b)+(-c)-(a-b)-(b-c)-[-(c-a)]\\&=a-b-c-a+b-b+c+c-a\\&=-a-b+c.\end{aligned}$$

例 2 若 $a\neq 0$，在什么条件下，

$$\left|\frac{a-b}{a}\right|=\frac{b-a}{a}?$$

解 $\left|\frac{a-b}{a}\right|=\frac{b-a}{a}=-\frac{a-b}{a}$，仅当 $\frac{a-b}{a}\leqslant 0$ 时才能成立。即 $a-b$ 与 a 异号或 $a-b=0\ (a\neq 0)$ 时成立。

要 $a-b$ 与 a 异号，必须

$$\begin{cases}a-b>0,\\a<0;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a-b<0,\\a>0,\end{cases}$$

即当 $b<a<0$ 或 $0<a<b$ 或 $a=b\neq 0$ 时才能成立。

上述结论也可合并写成 $b\leqslant a<0$ 或 $b\geqslant a>0$。

由于一个数的绝对值就是表示这个数在数轴上对应的点到原点的距离。因此如果结合数轴，容易得出下列结论；从而去掉绝对值符号。

(1) 若 $a<b$，则 $|a-b|=|b-a|=b-a$；

(2) 若 $a\leqslant c\leqslant b$，则 $|c-a|+|c-b|=b-a$；

(3) 若 $a<b\leqslant c$，则 $|c-a|-|c-b|=b-a$；

(4) 若 $c \leqslant a < b$，则 $|c-b|-|c-a|=b-a$。

例 3 当 $2<x<3$ 时，计算：

$|x|+|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$。

解 1 当 $2<x<3$ 时，由绝对值的意义，

$$原式=x+(x-1)+(x-2)-(x-3)-(x-4)-(x-5)$$
$$=9。$$

解 2 应用上述性质(2)，当 $2<x<3$ 时，得

$0<x<5$，$\therefore$ $|x-0|+|x-5|=5-0=5$；

$1<x<4$，$\therefore$ $|x-1|+|x-4|=4-1=3$；

$2<x<3$，$\therefore$ $|x-2|+|x-3|=3-2=1$。

$$\therefore \quad 原式=(|x|+|x-5|)+(|x-1|+|x-4|)$$
$$+(|x-2|+|x-3|)$$
$$=5+3+1=9。$$

2．分段讨论法

若一个式子中含有几个绝对值符号，每一绝对值符号内是同一变数字母的一次式，可先求出使每个绝对值符号内的一次代数式的值等于零时字母的取值，然后在数轴上找出这些数值对应的点，这些点把数轴分成了若干部分，根据变数字母在这若干部分取值情况加以讨论，分别去掉绝对值符号予以计算．这种方法叫做分段讨论法，也称为“零点分段法”。

例 4 计算：$(x+|x|)+(x-|x|)+x\cdot|x|+\dfrac{x}{|x|}$。

解 本题零点仅有一个，即 $x=0$。

当 $x=0$ 时，原式无意义；

$$当\ x>0\ 时，原式=(x+x)+(x-x)+x\cdot x+\frac{x}{x}$$
$$=x^2+2x+1;$$

当 $x<0$ 时，原式 $=(x-x)+(x+x)+x(-x)+\frac{x}{-x}$

$$=-x^2+2x-1.$$

所以,当 $x=0$ 时,原式无意义；当 $x>0$ 时，原式为 x^2+2x+1；当 $x<0$ 时,原式为 $-x^2+2x+1$。

例 5 化简：$|x-4|+|x+1|$.

分析 本题的零点是 $x=4$ 和 $x=-1$,这两点把数轴分成三段，即 $x\leqslant-1$, $-1<x\leqslant4$ 和 $x>4$. 然后逐段讨论.

解 当 $x\leqslant-1$ 时, $x-4<0$, $x+1\leqslant0$,所以

原式 $=-(x-4)-(x+1)=-2x+3$；

当 $-1<x\leqslant4$ 时, $x+1>0$, $x-4\leqslant0$,所以

原式 $=-(x-4)+(x+1)=5$；

当 $x>4$ 时, $x+1>0$, $x-4>0$,所以

原式 $=(x-4)+(x+1)=2x-3$。

因此,原式当 $x\leqslant-1$ 时为 $-2x+3$；当 $-1<x\leqslant4$ 时为 5；当 $x>4$ 时为 $2x-3$。

3. 应用"若非负数的和为零，则每个非负数均为零"的性质

例 6 已知：$|x-3|+|2x+3y-12|=0$，求 x 和 y 的值。

解 要非负数 $|x-3|$ 和 $|2x+3y-12|$ 的和为零，必须 $|x-3|=0$,且 $|2x+3y-12|=0$,即 $x-3=0$,且 $2x+3y-12=0$,解得 $x=3$, $y=2$。

所以, x 和 y 的值分别是 3 和 2。

4. 取正负值法

应用若 $|x|=a$,则 $x=\pm a$ 的性质,去掉绝对值记号。

例 7 已知：$|2x+1|=3$,求 x 的值。

解 绝对值为 3 的实数是 ±3，所以 $2x+1=\pm3$，

由 $2x+1=3$，解得 $x=1$；由 $2x+1=-3$，解得 $x=-2$。

所以，所求的 x 值是 1 或 -2。

例 8 已知：$|a|=1$，$|b|=3$，求 $|a+b|$ 的值。

解 因为 $|a|=1$，所以 $a=\pm1$，同理，由 $|b|=3$，得 $b=\pm3$。

当 a,b 同号时，$|a+b|=|\pm(1+3)|=|\pm4|=4$；

当 a,b 异号时，$|a+b|=|\pm(3-2)|=|\pm1|=1$。

在含有绝对值符号的代数式的运算中，除运用上述方法外，有时利用 $|x-a|$ 的几何意义，即它等于数轴上一点 x 到另一点 a 的距离，解题会更加简捷。

例 9 在数轴上，找出所有使得到数 -50 和数 50 对应的点的距离和为 100 的整数点 x，并求出所有这些整数的和。

解 点 x 到数 -50 对应的点的距离为 $|x-(-50)|=|x+50|$，到数 50 对应的点的距离为 $|x-50|$。

由题设，整数点 x 满足条件 $|x+50|+|x-50|=100$，所以凡满足 $-50\leqslant x\leqslant50$ 的整数 x 均符合条件。即这些整数点 $x=0、\pm1、\pm2、\cdots，\pm50$。它们的和为 0。

例 10 若 x 可取任意实数，求

$$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$$

的最小值。

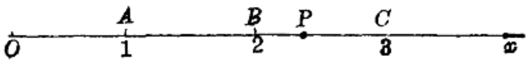


图 1.5

解 如图 1.5 所示，记数 1、2、3、x 在数轴上对应点分别为 A、B、C、P。由绝对值的几何意义知，$|x-1|$ 表示线段 AP

的长，同理 $|x-2|$、$|x-3|$ 分别表示 BP、CP 的长。

(1) 如点 P 在线段 AC 外，显然 $AP+BP+CP>3$；

(2) 如点 P 在线段 AC 上，不妨设在 BC 之间，则 $AP+BP+CP=(AP+PC)+BP=2+BP>2$。同理 P 在 AB 之间，也有 $AP+BP+CP>2$ 成立；

(3) 当 P 处于点 B 的位置时，

$$AP+BP+CP=(2-1)+0+(3-2)=2,$$

此时 $x=2$。

综上讨论，当 $x=2$ 时，y 取最小值 2。

想一想：若 x 可取任意实数，则 $|x+1|+|x-2|$ 的最小值是多少？

练 习 二

1. 下列命题中正确的是(　　)。

(A) 若 $a\neq b$，则 $|a|\neq|b|$；

(B) 若 $|a|>|b|$，则 $a>b$；

(C) 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$；

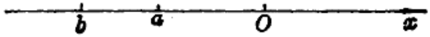
(D) 若 $a<|b|$，则 $a^2<b^2$。

2. 如图，实数 a、b 在数轴上对应的位置，则 $|a-b|-|a|$ 等于(　　)。

(第 2 题)

(A) b；　(B) $-b$；　(C) $2a-b$；　(D) $b-2a$。

3. 如图，实数 a、b 在数轴上对应的位置，试分别比较 ab 与 0；$-a$ 与 $-b$；$-\frac{1}{a}$ 与 $-\frac{1}{b}$；$a+b$ 与 $a-b$ 的大小，



（第 3 题）

4. 已知：$|a|=5, |-b|=3$，求 $a-b$ 的值。

5. 若 $1<x<2$，计算：$\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{|x-1|}{1-x}+\frac{|x|}{x}$。

6. 若 $a<-b<c$，计算：

$$\left|\frac{a+b}{b+c}\right|-\frac{|a+b|}{b+c}+\frac{a+b}{|b+c|}.$$

7. 已知：$|a+3|$ 与 $(a-2b+7)^2$ 互为相反数，求 a、b 的值。

8. 已知：$\frac{5(2a-b)^2+|9-a^2|}{|a-3|}=0$，求实数 a, b 的值。

9. 化简：$|x-3|+|x-2|$。

10. 当 x 取任意实数时，求

$$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$$

的最小值。

三、因 式 分 解

1.4 因式分解的方法

把一个多项式化成几个整式的积的形式，称为**因式分解**。因式分解是一种恒等变形，它与整式乘法正好相反。下面几种因式分解的方法是常用的。

1. 提公因式法

如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提出这个公因式作为多项式的一个因式，用这个因式去除这个多项式所得商式就是另一个因式，再把多项式写成这两个因式的积，这种分解因式的方法称为**提公因式法**。

在分解因式时，应首先观察多项式各项有没有公因式，若有公因式，则应首先提取，且要一次提取完。

例 1 分解因式：

$3a^3b^{10}(x+y)^2(x-y)^4-15a^{15}b^6(x+y)^2(y-x)^5$.

解 原式 $=3a^3b^6(x+y)^2(x-y)^4[b^4+5a^{12}(x-y)]$

$=3a^3b^6(x+y)^2(x-y)^4(5a^{12}x-5a^{12}y+b^4)$.

例 2 分解因式：

$$(a+b)^2+(a-b)^2+c(a^2+b^2).$$

解 原式 $=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)+c(a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2)+c(a^2+b^2)$

$=(a^2+b^2)(c+2)$.

注意 某些问题中的公因式要对多项式整理后才能提出。

2. 应用公式法

根据因式分解的意义，可以看出，如果把乘法公式反过来应用，就可以把某些多项式分解因式。这种分解因式的方法称为**应用公式法**。

我们已学习过的因式分解公式有

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2,$$

除此之外，易知

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

及

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

及 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

因而又得到如下的三个常用公式

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$