原考研数学命题组组长
清华大学胡金德教授作序并推荐

Spark®星火书业

考研数学备考教材

8年考研3年分类模拟

BANIANKAOYANSANNIANFENLEIMONI

8年考研真题 准确透视命题规律
3年分类模拟 权威把握考研趋势
系统复习理念 全线突破数学难关

2007

主编 考研数学资深辅导专家 张天德教授

答案全解全析

新 华 出 版 社

星火书业

考研数学备考教材

8年考研3年分类模拟

BANIANKAOYANSANNIANFENLEIMONI

答案全解全析

主　编　张天德　张全信

副主编　王　玮　吴　强　郑修才　叶　宏

2007

新　华　出　版　社

读者意见反馈表

亲爱的读者：

您好！非常感谢您对我们的信赖与支持。为了今后为您提供更优秀的数学图书，请您抽出宝贵的时间填写这份意见反馈卡，然后寄至：济南市二环东路中段 3966 号　东环国际广场 D 座 15 层　星火读者服务部（收）。邮编：250100　电话：(0531)83530836　传真：(0531)83530860　Email：service@sparkenglish.com　每月我们会抽取部分幸运读者寄送星火最新书目和奖品，快来参加，不要错过噢！

《8 年考研 3 年模拟·数学(理工类)》(2007)

读者个人资料

姓名：________　学校：________　年级：________

教师姓名及电话：________________

电话：________　Email：________　文化程度：________

通讯地址：________________　邮编：________

购书地点：______省______市________书店　QQ：________

您是如何得知本书的：

□经人介绍　□书店

□出版社图书目录

□媒体的介绍(请指明)

____

□广告宣传　□其他______

您购买过几本星火图书：

□一本　□两本

□三本　□四本以上

影响您购买本书的因素(可多选)：

□封面、装帧设计　□封底文字

□价格　□广告

□内容提要、前言和目录

□作者或出版社的名声

□买过星火其他书，感觉满意

您对本书封面设计的满意度：

□很满意　□满意　□一般

改进建议________________

您对本书印刷质量的满意度：

□很满意　□一般　□不满意

改进建议________________

您对本书的总体满意度：

□很满意　□满意　□一般

本书最令您满意的是：

□指导明确　□实例丰富

□语言地道　□内容充实

□讲解详尽　□有实用价值

□有欣赏价值　□有保留价值

其他________________

请沿此虚线剪下

您希望本书在哪些方面进行改进?

您希望购买哪些方面的数学图书?

您希望我们星火图书有哪些改进?

其他建议或要求:

答案全解全析·理工类

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

第一单元 函数

2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}-\ln^2 x, & x\geqslant 1\\ -x, & 0<x<1\end{cases}$

2. 应填 $y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt[3]{x}, & 1\leqslant x\leqslant 8\\ \log_3 x, & x>9\end{cases}$.

二、选择题

3. 应选(B).

解 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$ 所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

因此 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{\pi}{4}$,

从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 应选(B).

解 $y=x-[x]$ 的图象如图 1-1-1 所示

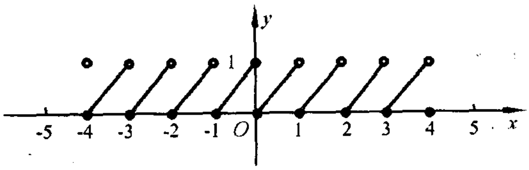

图 1-1-1

三、计算、证明题

5. **解** 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$

则 $f(0)=a_0=1, f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1$

比较两边 x^8 的系数 $a_8=2^8$.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8=-256$

6. **解** 因为 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增

所以 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty), x_2>x_1$

有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $g(x_1)\leqslant g(x_2)$ $h(x_1)\leqslant h(x_2)$

又 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$

所以 $f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)]$

$g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)]$

即 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$

2005 年模拟

一、填空题

1. 应填 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

解 由 $\sin\varphi(x)=1-x^2$

所以 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$

所以 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$

2. 应填 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$.

二、选择题

3. 应选(D).

4. 应选(C).

解 由 $x\neq 0, 1+\frac{1}{x}\neq 0, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\neq 0$,

得 $x\neq 0,-1,-\frac{1}{2}$.

三、计算、证明题

5. **解** 令 $f(x)=x\sin x$,则 $f(x)$ 为偶函数

由已知 $f(b+c)=f(a+c)$

所以 $a+c=-(b+c)$ 所以 $c=\frac{-1}{2}(a+b)$

6. **证明** $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty), x_2>x_1$

所以 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1$

而 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1$

所以 $f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$

所以 $F(x_1)<F(x_2)$ 即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增

2006 年模拟

一、填空题

1. 应填 $[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

解 $f[g(x)]=\tan g(x)=x^2-2$

所以 $g(x)=\arctan(x^2-2)$

因为 $|g(x)|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 所以 $-1\leqslant x^2-2\leqslant 1$

所以 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$

2. 应填 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

解 令 $t=\sqrt{1-x}$,则 $y=\frac{1+t}{1-t}$

所以 $t=\frac{y-1}{y+1}$,即 $\sqrt{1-x}=\frac{y-1}{y+1}$

所以 $x=1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{4y}{(y+1)^2}$

所以反函数为 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$

二、选择题

3. 应选(A).

4. 应选(A).

解 因 $|f(x)|=\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$

故 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.

三、计算、证明题

5. **解** 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}$

$$=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$

6. **证明** 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x+c)=-f(x)$

所以 $f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x)$

所以 $f(x)$ 为周期函数.

第二单元 极限与连续

2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 $\frac{1}{2}$.

解 因为 $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$

$$\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$

2. 应填 $\frac{1}{3}$.

解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

3. 应填 -3.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln[1+(\cos x-1)]}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln[1+(\cos x-1)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos x-1}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}=-3$$

4. 应填 $\frac{3}{2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$.

而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}-1}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax^2)}{3(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{2ax^2}{3x^2}=\frac{2}{3}a$$

所以 $a=\frac{3}{2}$.

5. 应填 0.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

二、选择题

6. 应选(A).

解 因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x[e^{x(\cos x^2-1)}-1]$

当 $x\to0$ 时,$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x[\cos x^2-1]\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right)$

所以 $n=5$

7. 应选(C).

解 因为 $x\to0$ $\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x$

$\sim\frac{1}{2}x^2,\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$.

8. 应选(B).

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}[e^{x^2}-(ax^2+bx+c)]=0$ 所以 $c=1$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-(ax^2+bx+c)}{x^2}=0$

即 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-a-\frac{b}{x}\right)=0$ 所以 $a=1,b=0$.

9. 应选(C).

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2-ax}{x+1}$ 存在

所以 $1-a=0\Rightarrow a=1$

所以 $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=-1$.

10. 应选(C).

三、计算、证明题

11. **解** $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$x_n=$

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

12. **证明** $x_0=\sqrt{2},x_1>\sqrt{2}$ 所以 $x_n>\sqrt{2}$ $(n=1,2,\cdots)$

而 $x_{n+1}<x_n$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设为 A

可得 $A=\sqrt{2}+\frac{A-1}{\sqrt{2}+A}$,所以 $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13. **解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos2x}\ \sqrt[3]{\cos3x})}{x^2}\right]$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos2x}\cdot\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos2x}}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos2x}(1-\sqrt[3]{\cos3x})}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{(\cos2x-1)+1}}{x^2}$$

$$+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{(\cos3x-1)+1}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{2x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{3x^2}$$

$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$

14. **解** 原式 $= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{\sin x}}{1-\sin x} \cdot \frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\sin x} \cdots \frac{1-\sqrt[n]{\sin x}}{1-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x} \cdot \frac{1-\sqrt[3]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x}$

$\cdots \frac{1-\sqrt[n]{(\sin x-1)+1}}{1-\sin x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$

15. **证明** 因为当 $x \in [0,1]$ 时，$|f(x)| \leqslant \ln(1+x)$

所以 $x \in (0,1)$ $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x}$

而 $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$，

所以 $\lim\limits_{x\to0^+} \left|\frac{f(x)}{x}\right|$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \left|\frac{a_1\ln(1+x)}{x} + \frac{a_2\ln(1+2x)}{x} + \cdots + \frac{a_n\ln(1+nx)}{x}\right|$

$= |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n|$

所以 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

2005 年模拟

一、填空题

1. 应填$\frac{1}{3}$.

解 因 $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n} \leqslant \frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n} \leqslant \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}$

即 $\frac{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)}{n^2+1} \leqslant \frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n}$

$\leqslant \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n^3+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n^3+1} = \frac{1}{3}$

由夹逼准则，得所求极限为$\frac{1}{3}$.

2. 应填$\frac{m}{n}$.

解 由 $m \neq n$

则原式 $= \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)} = \frac{m}{n}$.

3. 应填$\frac{4}{3}$.

解 $\lim\limits_{x\to0} \frac{2+f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x+xf(x)}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 2x + xf(x)}{x^3} + \lim\limits_{x\to0} \frac{2x-\sin 2x}{x^3}$

$= 0 + \lim\limits_{x\to0} \frac{2-2\cos 2x}{3x^2} = \frac{4}{3}$.

4. 应填 $e^{-\frac{1}{2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

而 $f(0) = a$ 所以 $a = e^{-\frac{1}{2}}$.

5. 应填 $a \neq b$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = a$，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = b$.

二、选择题

6. 应选(A).

7. 应选(D).

解 因为 $9-x^2>0$ 所以 $-3<x<3$

8. 应选(D).

解 因为 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (x-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{x} = 1$

所以$\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 不存在

9. 应选(B).

解 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1<x<1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & x\leqslant -1 \text{ 或 } x>1 \end{cases}$

10. 应选(D).

解 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\frac{1}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\frac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\frac{2}{\pi}$.

三、计算、证明题

11. **解** $|\arctan(n!)| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2 = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(n!) \cdot (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2 = 0$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2-1} = 3$

所以原式 $=-3$.

12. **证明** $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$ 所以$\{x_n\}$单增

又 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ 所以$\{x_n\}$有上界

故$\{x_n\}$收敛

13. **解** $\frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x}\right] \leqslant \frac{2}{x}$

所以 $x>0, 2-x < x\left[\frac{2}{x}\right] \leqslant 2$

$x<0, 2-x > x\left[\frac{2}{x}\right] \geqslant 2$

但$\lim\limits_{x\to0} (2-x) = 2$

所以$\lim\limits_{x\to0} x\left[\frac{2}{x}\right] = 2$.

14. **解** $f(x)+\varphi(x) = \begin{cases} x+b, & x\leqslant 0 \\ 2x+1, & 0<x<1 \\ x+a+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$

所以当 $a=b=1$ 时. $f(x)+\psi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

15. **证明** 令 $f(x)=x^3-9x-1$

因为 $f(-3)=-1<0$ $f(-2)=9>0$

$f(0)=-1<0$ $f(4)=27>0$

又 $f(x)$ 在 $[-3,4]$ 上连续

所以 $f(x)$ 在 $(-3,-2),(-2,0),(0,4)$ 各区间内至少有一零点.

即 $x^3-9x-1=0$ 至少三个实根.

又它是一元三次方程.

所以方程恰有三个实根.

2006 年模拟

一、填空题

1. 应填 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}+\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 应填 $\frac{1}{2}\ln a$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[a^1\cdot a^2\cdots a^n]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\ln a=\dfrac{1}{2}\ln a$

3. 应填 0.

解 令 $x=\dfrac{1}{y}$, 原式 $=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+2y}-2\sqrt{1+y}+1}{y}$

$=\lim\limits_{y\to0^+}\left[\dfrac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+\dfrac{2(1-\sqrt{1+y})}{y}\right]$

$=\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\sqrt{2y+1}-1}{y}+2\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{1+y}}{y}=1-1=0$

4. 应填 $\frac{n(n+1)}{2}$.

解 原式

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x-1)+(\cos^2x-1)+\cdots+(\cos^nx-1)}{\cos x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}[1+(\cos x+1)+\cdots+(\cos^{n-1}x+\cos^{n-2}x+\cdots+1)]$

$=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. 应填 $\frac{3}{2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})+\frac{1}{2}\ln x}{\ln(1+x^{-\frac{1}{12}}+x^{-\frac{2}{15}})+\frac{1}{3}\ln x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}})}{\ln x}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\ln(1+x^{-\frac{1}{12}}+x^{-\frac{2}{15}})}{\ln x}+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

二、选择题

6. 应选(D).

解 若取 $\varphi(x)=x, f(x)=x+e^{|x|}, g(x)=x+2e^{-|x|}$,

此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在,

若取 $\varphi(x)=0, f(x)=e^{-|x|}, g(x)=2e^{-|x|}$.

此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 存在.

三、计算、证明题

7. **解** 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{4}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{1}{4}$.

8. **解** $\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}=\dfrac{x^4}{4\left(\frac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2}\right)}$

而 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{2}+1+\sqrt{1+x^2}\right)=2$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\dfrac{1-e^{x^2}}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$

所以原式 $=-\dfrac{1}{12}$

9. **解** 因为 $\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b=x^2(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})=0$

所以 $a=-1$.

所以 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}-x^2\sqrt[3]{1-x^6}+x^4}=0$

所以 $a=-1, b=0$.

10. **解** $x>0, \sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{x}=0$.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{k+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\sqrt{k+x}-a_k\sqrt{x})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_kk}{\sqrt{k+x}+\sqrt{x}}=0$.

11. **证明** 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

所以 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 其中 m,M 分别为最小值与最大值.

又 $x_i\in[a,b], t_i>0$ $(i=1,2\cdots n)$

所以 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}mt_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}t_if(x_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}Mt_i=M$.

从而至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,

使 $f(\xi)=t_1f(x)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$.

12. **证明** 令 $F(x)=f\left(\dfrac{b-a}{2}+x\right)-f(x)$,

则 $F(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上连续.

$F(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)$,

$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,

又 $f(a)=f(b)$　所以 $F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 0$

所以至少存在一点　$x_0\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$使 $F(x_0)=0$

即有 $\alpha=x_0,\beta=\frac{b-a}{2}+x_0$,且$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,

$\beta-\alpha=\frac{b-a}{2}$,使 $f(\alpha)=f(\beta)$.

第二章　一元函数微分学

第一单元　导数与微分

2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 1.

解　$f(x)$ 是分段函数,按定义分别求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右导数.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x}{1+e^x}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+e^x}=1$$

因为左、右导数存在且相等,所以导数存在,$f'(0)=1$.

2. 应填 $2x+y-1=0$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}$

$x=0$ 时,$t=0$. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$. 法线斜率 $k=-2$

则曲线在(0,1)处法线方程为 $y-1=-2x$,即 $2x+y-1=0$.

3. 应填(4,8).

解　$y'(a)=\frac{3}{2}\sqrt{a}=3$

故 $a=4$,即点(4,8)处,$y=x^{\frac{3}{2}}$ 的切线与 $y=3x-1$ 平行.

4. 应填$\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$.

解　方程两边关于 x 求导,得

$1=e^{y\ln y}\left[y'\ln y+y\frac{1}{y}y'\right]$

则　$y'=\frac{1}{y^y(1+\ln y)}=\frac{1}{x(1+\ln y)}$,

$dy=y'dx=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx.$

5. 应填 3.

解　这是一道参数方程所确定的函数的求导问题,其中 y 又是关于 t 的复合函数.

令 $u=e^{3t}-1$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{[f'_u(u)3e^{3t}]}{f'_t(t)}$$

当 $t=0$ 时,$u=0$,因此

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{f'(0)\cdot3}{f'(0)}=3$$

二、选择题

6. 应选(B).

解　$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty$,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=2$

7. 应选(B).

解　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,由导数定义知:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

现 $f(0)=0,f'(0)\neq0$,所以

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\neq f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\neq f(0)$

因此 $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点.

8. 应选(B).

解　原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(3\sin x)-f(0)}{3\sin x}\cdot\frac{3\sin x}{x}$

$-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2\arctan x)-f(0)}{2\arctan x}\cdot\frac{2\arctan x}{x}$

$=3f'(0)-2f'(0)=f'(0)=2$

9. 应选(B).

解　因为

$dy\,|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$

10. 应选(C).

解　因为

$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)(1+x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\right]$

$=f'(0)+f(0)$

$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)-f(0)$

三、计算、证明题

11. **证明**　因为 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 且 $f(x)$ 非零,令 $y=0$,

便得　$f(x)=f(x)f(0)$,于是 $f(0)=1$.

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x+\Delta x)=f(x)\cdot f(\Delta x)$.

根据导数的定义,

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)\cdot \dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$= f(x)f'(0) = f(x)$

12. **解** $\dfrac{dy}{dx} = 2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\{f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 2x^2f''(x^2)\cos[f(x^2)]$

$\quad - 2x^2[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$

$= 2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]$

$\quad -[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$

13. **解** (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x} = 0 = f(0)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{6x} = \dfrac{2}{3}$

(2) 因为 $x\neq 0$ 时,$f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

故 $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{2}{3}, & x = 0. \end{cases}$

14. **解** (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}x^a\sin\dfrac{1}{x^b} = f(0) = 0 \Rightarrow a>0$;

(2) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\quad f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}x^{a-1}\sin\dfrac{1}{x^b} \Rightarrow a>1$;

(3) $f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1}\sin\dfrac{1}{x^b} + (-b)x^{a-b-1}\cos\dfrac{1}{x^b}, & x\neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

要使 $f'(x)$ 有界,则必须 $\begin{cases} a-1>0 \\ a-b-1\geqslant 0 \end{cases}$,从而 $a\geqslant b+1$.

2005 **年模拟**

一、填空题

1. 应填 $(2t+1)e^{2t}$.

解 先利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ 求出 $f(t)$ 的表达式,然后求 $f'(t)$

$f(t) = \lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2tx} = t\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{2t} = te^{2t}$

$f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = (2t+1)e^{2t}$

2. 应填 $\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = (t+1)(3t+2)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{dx/dt} = \dfrac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}} = \dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$

3. 应填 1.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x_0-2x)-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}$

$= -2f'(x_0) + f'(x_0) = 1$

4. 应填 $f'(t) = (2t+1)e^{2t}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x = e^{2t}$

故 $f'(t) = (2t+1)e^{2t}$

5. 应填 10×2^{10}.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(2+\tan x)^{30}-2^{10}}{\sin x} + \dfrac{(2-\sin x)^{10}-2^{10}}{-\sin x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+\tan x)^{10}-2^{10}}{\tan x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-\sin x)^{10}-2^{10}}{-\sin x}$

$= [(2+x)^{10}]'|_{x=0} + [(2+x)^{10}]'|_{x=0}$

$= 10\times 2^{10}$

二、选择题

6. 应选(B).

解 因为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}$

$= \dfrac{1}{2}f'(1)$

所以 $f'(1) = -2$

7. 应选(B).

解 对 $f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy$,

令 $y=0$,得 $f(x) = f(x)+f(0)$,即 $f(0)=0$.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)+2x\cdot\Delta x}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} + 2x$

$= f'(0) + 2x$

8. 应选(A).

解 $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{1}{3}(x^3-1)}{x-1}$

$= 1, f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\frac{1}{3}}{x-1}$ 不存在

9. 应选(C).

解 由 $|f(x)|\leqslant x^2$,令 $x=0$ 得 $f(0)=0$

又 $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant |x|$

所以 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

三、计算、证明题

10. **解** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[f(x_0+x)-f(x_0)]+[f(x_0)-f(x_0-3x)]}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}+3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0-3x)-f(x_0)}{-3x}$

$=f'(x_0)+3f'(x_0)$

$=4f'(x_0)$

注 本题有个常见的错误做法：

令 $x_0-3x=t$，则 $x_0=t+3x$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(t+4x)-f(t)}{x}=4\lim\limits_{x\to0}f'(t)$

$=4\lim\limits_{x\to0}f'(x_0-3x)=4f'(x_0)$

因为题目中只设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，没说在 x_0 及其邻域内可导，更没假定 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，所以上面做法是无根据的．在学习数学时，一定要注意数学的严谨性，给了什么条件，只能用什么条件．

11. **证明** 因为 $f(x_0)=0$，

所以 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)\sin^a(x-x_0)}{x-x_0}$

$=\begin{cases}g(x_0), & a=1\\ 0, & a>1\end{cases}$

所以，$f(x)$ 在 x_0 处可导．

12. **解** $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f(a)\right]=f'(a)$，

且当 n 充分大时，$f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)>0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$

$=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]\right\}$

$=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right\}$

$=\exp\left\{\dfrac{f'(a)}{f(a)}\right\}$

13. **证明** 当 $f(x_0)\neq0$ 时，记 $|f(x_0)|'$ 为 $|f(x)|$ 在 x_0 处的导数，因为

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}\lim\limits_{x\to x_0}[|f(x)|+|f(x_0)|]$

$=2|f(x_0)||f(x_0)|'$ 存在

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)+f(x_0)}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}$

$=\dfrac{|f(x_0)|}{f(x_0)}|f(x_0)|'$

当 $f(x_0)=0$ 时，

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=|f(x)|'=A$ 存在

所以 $A=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\geqslant0$

$A=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\leqslant0$

故 $A=0$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=0$

综上所述，$f(x)$ 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0)=\begin{cases}|f(x_0)|'\dfrac{|f(x_0)|}{f(x_0)}, & f(x_0)\neq0\\ 0, & f(x_0)=0\end{cases}$$

2006 **年模拟**

一、填空题

1. 应填 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

解 曲线在(1,1)处的切线斜率

$$k=f'(1)=n$$

故切线方程为 $y-1=n(x-1)$

令 $y=0$，得与 x 轴的交点 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

2. 应填 $\dfrac{y\sin(xy)-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x\sin(xy)}$.

解 方程两边求关于 x 的导数，得

$$\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-(y+xy')\sin(xy)=0$$

解出 y' 即为所求．

$$y'=\frac{y\sin(xy)-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x\sin(xy)}$$

3. 应填 $\dfrac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{4tf(t^2)\cdot f'(t^2)}{f(t^2)}=4tf'(t^2)$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}$

4. 应填 $\dfrac{3\pi}{4}$.

解 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left.\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)'\right|_{x=0}$

$=\left.\left[\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\dfrac{12}{(3x+2)^2}\right]\right|_{x=0}$

$=\dfrac{3\pi}{4}$

5. $\dfrac{(-1)^n2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

解 因为 $f(x)=\dfrac{2}{1+x}-1$

所以 $f'(x)=-2(1+x)^{-2}$

$f''(x)=2\times 2(1+x)^{-3}$

$f'''(x)=-2\times 3!(1+x)^{-4}$

…

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

二、选择题

6. 应选(C).

解 因为对任意 x 都有

$f(1+x)=af(x)$

令 $x=0$,得 $f(1)=af(0)$

所以 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a[f(x)-f(0)]}{x}$

$=af'(0)=ab$

7. 应选(A).

解 当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$-x\in(-\infty,0)$

所以 $f'(x)=f'(-x)(-x)'$

$=-f'(-x)<0$

$f''(x)=-f''(-x)(-x)'$

$=f''(-x)<0$

8. 应选(B).

解 取 $f(x)=x+1$,易知(A),(C) 都不正确.

取 $f(x)=x^2$,易知(D) 不正确.

9. 应选(B).

解 当 $n\geqslant 2$ 时

$f''(x)=[(f(x))^2]'=2f(x)f'(x)$

$=2[f(x)]^3$

$f'''(x)=3![f(x)]^2f'(x)$

$=3![f(x)]^4$

…

$f^{(n)}(x)=(n-1)![(f(x))^n]'$

$=n![f(x)]^{n-1}f'(x)$

$=n![f(x)]^{n+1}$

10. 应选(C).

解 因为 $f(x)=\begin{cases}4x^3,x\geqslant 0\\ 2x^3,x<0\end{cases}$

所以 $f'(x)=\begin{cases}12x^2,x>0\\ 0,x=0\\ 6x^2,x<0\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}24x,x>0\\ 0,x=0\\ 12x,x<0\end{cases}$

又 $f'''_+(0)=24,f'''_-(0)=12$

故 $f''(0)$ 存在,$f'''(0)$ 不存在.

三、计算、证明题

11. **解** 由已知得 $af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$

解方程组 $\begin{cases}af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}\\ bf(x)+af\left(\dfrac{1}{x}\right)=cx\end{cases}$

得 $f(x)=\dfrac{\dfrac{ac}{x}-bcx}{a^2-b^2}$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(-\dfrac{ac}{x^2}-bc\right)=-\dfrac{bcx^2+ac}{x^2(a^2-b^2)}.$

12. **解** 因为当 $x>0$ 或 $x<0$ 时,$f(x)$ 均为多项式,所以 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上连续、可导.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则应有

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$$

但 $f(0)=3$

所以,$b=3$.

欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则应有

$$f'_-(0)=f'_+(0)$$

但 $f'_-(0)=(x^2+2x+3)'|_{x=0}=2$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax+b-3}{x}=a$

所以,$a=2$.

故当 $a=2,b=3$ 时,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导.

13. **证明** $f(x)=\begin{cases}-\sin^3x, & x\in[-1,0)\\ \sin^3x, & x\in[0,1]\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-3\sin^2x\cos x, & x\in[-1,0)\\ 3\sin^2x\cos x, & x\in(0,1]\end{cases}$

且 $f'(0)=0$.

$f''(x)=\begin{cases}3\sin^3x-6\sin x\cos^2x, & x\in[-1,0)\\ -3\sin^3x+6\sin x\cos^2x, & x\in(0,1]\end{cases}$

且 $f''(0)=0$.

$f'''(x)=\begin{cases}21\sin^2x\cos x-6\cos^3x, & x\in[-1,0)\\ -21\sin^2x\cos x+6\cos^3x, & x\in(0,1]\end{cases}$

而 $f'''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-3\sin^3x+6\sin x\cos^2x}{x}=6$

$f'''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3\sin^3x-6\sin x\cos^2x}{x}=-6$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的三阶导数不存在,又

$$\lim_{x\to 0^-}f'''(x)=\lim_{x\to 0^-}(21\sin^2x\cos x-6\cos^3x)=-6$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'''(x)=\lim_{x\to 0^+}(-21\sin^2x\cos x+6\cos^3x)=6$$

故 $x=0$ 是 $f'''(x)$ 的第一类间断点.

14. **解法一** 令 $u=\dfrac{x+1}{x-1},(x\neq 1)$

则 $\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}\left[-\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$

$$=\frac{2}{1-x^2}\quad(x\neq\pm1).$$

解法二 $f'(x)=\frac{1}{x}, f(x)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

故 $y=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{1-x^2}\quad(x\neq\pm1)$

15. **解** 当 $-1<x\leqslant0$ 时，$x+1\geqslant(x+1)^2$，

当 $0<x<1$ 时，$(x+1)^2>x+1$.

所以 $F(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x\leqslant0\\(x+1)^2, & 0<x<1\end{cases}$

$F'(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0\\2(x+1) & 0<x<1\end{cases}$

而在分段点 $x=0$ 处，

$$\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)^2-1}{x}=2$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}1, & -1<x<0\\2(x+1), & 0<x<1\end{cases}$$

第二单元　中值定理及导数应用

2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 $\frac{1}{3}$.

解法一 （用拉格朗日中值定理）.

$$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=x\frac{1}{6(1+\xi)^{5/6}}\cdot\frac{2}{x}$$

其中 $-\frac{1}{x}<\xi<\frac{1}{x}$. 当 $x\to+\infty$ 时，$\xi\to0$，故原式 $=\frac{1}{3}$.

解法二 （用泰勒公式）

$\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}$

$=x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{6}}\right]$

$=x\left[1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{6x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\to\frac{1}{3}$

2. 应填 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

解 $y=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}, y'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$;

$y''=2\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{4x^2}{(1+x^2)^3}\right]$. 令 $y''=0$ 得拐点的横坐标 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，故拐点为 $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

3. 应填 $\frac{4}{3},\frac{5}{2},2$

解 $y'=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4[3(x-2)(x-3)$

$+4(x-1)(x-3)+5(x-1)(x-2)]$

$=2(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(2x-5)(3x-4)$

4. 应填 $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$

解 由 $y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2)$ 可知 $h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

5. 应填 $\frac{1}{4}$

解 该曲线的曲率半径 $R=R(x)=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{1+16(x-1)^2}$，故当 $x=1$ 时，$R(x)$ 最小，为 $\frac{1}{4}$.

二、选择题

6. 应选(B).

解 $y'_x=(x-1)(x-2), y'\Big|_{x=0}=2$

故切线方程为 $y=2x$.

7. 应选(B).

解 因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 故 $f'(1)>f'(0)$. 而由拉格朗日中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)$. 其中 ξ 介于 0,1 之间.

则 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$.

8. 应选(C).

解 距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=10, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=20x$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{5}(4\cdot10+3\cdot20\cdot4)=56(\mathrm{m/s})$$

9. 应选(C).

解 由 $f'(x_0)=0$ 知 x_0 为驻点.

又 $y''|_{x=x_0}=(-y'+\mathrm{e}^{\sin x})|_{x=x_0}=\mathrm{e}^{\sin x_0}>0$.

因此 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

10. 应选(C).

解 $y'=2[(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)]$

$y''=4(3x^2-12x+11)=0$.

解得 $y''=0$ 有两个根且根两侧二阶导数符号变号.

三、计算、证明题

11. **证明** 作辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，从而在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi).$$

可见，$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

12. **证明** 不妨设 $f'''(x_0)>0$，

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0.$$

所以根据保号性存在 x_0 的某邻域，使 $\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$，

即 $x > x_0$ 时，$f''(x) > 0$；$x < x_0$ 时，$f''(x) < 0$. 从而 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

而 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$，

故 $f(x) - f(x_0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$，

即 $x > x_0$ 时，$f(x) > f(x_0)$；$x < x_0$ 时，$f(x) < f(x_0)$. 故 x_0 不是极值点.

13. **证明** 因为 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

由泰勒公式有 $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间

即 $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$

因为 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 连续，且 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，所以必存在 x_0 的某一邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，使对于该邻域内任意 x，$f^{(n)}(x)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号，进而 $f^{(n)}(\xi)$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号，于是，在 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号确定后，$f(x) - f(x_0)$ 的符号完全取决于 $(x - x_0)^n$ 的符号.

(1) 当 n 为偶数时，$(x - x_0)^n \geqslant 0$. 所以，

当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$，即 $f(x) \leqslant f(x_0)$，从而 $f(x_0)$ 为极大值；

当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时，$f(x) - f(x_0) \geqslant 0$，即 $f(x) \geqslant f(x_0)$，从而 $f(x_0)$ 为极小值.

(2) 当 n 为奇数时，若 $x < x_0$，则 $(x - x_0)^n < 0$；若 $x > x_0$，则 $(x - x_0)^n > 0$. 所以不论 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号如何，当 $(x - x_0)$ 由负变正时，则 $f(x) - f(x_0)$ 的符号也随之改变，因此 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

14. **证明** 设 $F(x) = f(a)e^{-x}f(x)$，

则 $F(a) = f^2(a)e^{-a} > 0$，$F\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$= f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)e^{\frac{a+b}{2}} < 0$，

$F(b) = f(a)f(b)e^{-b} > 0$.

所以由零点定理知存在 $\xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$，使 $F(\xi_1) = 0$，$F(\xi_2) = 0$. 再在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上使用罗尔定理即得结果.

15. (1) **解** $f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2$，

其中 $\xi = c + \theta(x - c)$，$0 < \theta < 1$.

(2) **证明** $f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)(x - c)^2}{2!}$

其中 $\xi = c + \theta(x - c)$，$0 < \theta < 1$.

在上式中令 $x = 0$，则有

$f(0) = f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)(0 - c)^2}{2!}$，$0 < \xi_1 < c < 1$

在上式中，令 $x = 1$，则有

$f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{f''(\xi_2)(1 - c)^2}{2!}$，$0 < c < \xi_2 < 1$

上述两式相减得

$f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2]$

于是

$|f'(c)|$

$= \left|f(1) - f(0) - \frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1 - c)^2 - f''(\xi_1)c^2]\right|$

$\leqslant |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1 - c)^2 + \frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2$

$\leqslant a + a + \frac{b}{2}[(1 - c)^2 + c^2]$

又因 $c \in (0, 1)$，$(1 - c)^2 + c^2 \leqslant 1$.

故 $|f'(c)| \leqslant 2a + \frac{b}{2}$.

2005 年模拟

一、填空题

1. 应填 $-3e^3$，e^4.

解 由 $f'(x) = -(x + 3)(x - 2)e^{-x}$ 可知驻点为 $x = -3$ 和 $x = 2$ 两点，另外，在边界点 $x = -4$ 处，$f(-4) = e^4$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. 我们得知最小值为 $f(-3) = -3e^3$，最大值为 $f(-4) = e^4$.

2. 应填 $-\frac{1}{\ln 2}$.

解 由 $y' = 2^x(1 + x\ln 2)$ 可求得极小值点与极小值.

3. 应填 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解 由 $y'' = 4e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$ 可知，当且仅当 $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y'' < 0$.

4. 应填 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$，$2(\pi + 1)$.

解 $y' = 1 - 2\sin x$，得 $y = f(x)$ 的驻点为 $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$，$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. 当在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内考虑时，仅有一个驻点 $\frac{\pi}{6}$. $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$，$f(0) = 2$，$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. 比较后，得知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$；而当考虑区间 $[0, 2\pi]$ 上的最大值需比较 $f(0)$，$f(2\pi)$，$f(\frac{\pi}{6})$，$f(\frac{5\pi}{6})$ 4 个值的大小，其中最大者为 $f(2\pi) = 2(\pi + 1)$.

5. 应填 $\frac{4}{3}$，$-\frac{1}{3}$.

解 当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 5 阶无穷小的充要条件是 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(4)}(0) = 0$，且 $f^{(5)}(0) \neq 0$，由此解得 $a = 4/3$，$b = -1/3$.

二、选择题

6. 应选(D).

解 因为 $f'(x)=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$,所以,当 n 为偶数时 $f(x)$ 是严格单减的函数,既无极小值也无极大值;而当 n 为奇数时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

7. 应选(B).

解 当 x 充分接近 a 时,$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,而其中的分母为正,所以 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

8. 应选(B).

解 由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(x_0)}{2}>0$$

说明当 x 充分接近 x_0 时,$f(x)-f(x_0)>0$.

即 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

9. 应选(D).

解 因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

在上式中用到了洛必达法则和导数的定义. 因为不知道 n 为偶数还是奇数,所以无法知道 $(f(x)-f(x_0))$ 是正是负. 容易看出,当 n 为偶数时,$f(x)$ 以 x_0 为极小值点;当 n 为奇数时,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处既非极大值也非极小值.

10. 应选(A).

解 可归纳出 $f^{(n)}(x)$ 的表达式为(A).

三、计算、证明题

11. **证明** 只需证明 $F'(x)>0\quad(a<x<+\infty)$

$$F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{1}{x-a}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

由中值定理知,存在 $\xi(a<\xi<x)$,使 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$

于是有 $F'(x)=\dfrac{1}{x-a}[f'(x)-f'(\xi)]$

由于 $f''(x)>0$,可见 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

因此,对于任意 x 和 $\xi(a<\xi<x)$,有 $f'(x)>f'(\xi)$.

从而 $F'(x)>0$,于是 $F(x)$ 是单调增加的.

12. **证明** 设 $F(x)=\sin\ln x,G(x)=\ln x$,则 $F(x),G(x)$ 在 $[1,e]$ 上满足柯西中值定理条件. 由于

$F(1)=\sin\ln 1=0,\qquad F(e)=\sin\ln e=\sin 1$

$G(1)=\ln 1=0,\qquad G(e)=\ln e=1$

$F'(x)=\cos\ln x\cdot\dfrac{1}{x},\qquad G'(x)=\dfrac{1}{x}$

故由柯西中值定理至少存在一个 $\xi\in(1,e)$,使得

$$\frac{F(e)-F(1)}{G(e)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

即 $$\sin 1=\frac{\cos\ln\xi\cdot\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi$$

13. **证明** 在 $\left[a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理,有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=f'(\xi)\left[-\frac{f(a)}{k}\right],a<\xi<a-\frac{f(a)}{k}$$

即有 $$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)=f(a)+f'(\xi)\left[-\frac{f(a)}{k}\right]$$

$$=f(a)\left[1-\frac{f'(\xi)}{k}\right]<0$$

故由连续函数的介值定理知,在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内至少存在一点 η,使 $f(\eta)=0$,即 $f(x)=0$ 至少有一实根. 又由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ 为单减函数,故 $f(x)$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一实根.

14. **证明** 记 $B=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),A=\arctan a$

以下在区间 $[A,\frac{\pi}{2}]$ 上定义一个函数 $F(t)$

$$F(t)=\begin{cases}B, & t=A\text{ 或 }\frac{\pi}{2}\\ f(\tan t), & A<t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

显然 $F(t)$ 在 $(A,\frac{\pi}{2})$ 内可导且 $F(A)=F(\frac{\pi}{2})$.

又 $\lim\limits_{t\to A^+}F(t)=\lim\limits_{t\to A^+}f(\tan t)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=B=F(A)$

所以,$F(t)$ 在 A 点右连续,在 $\frac{\pi}{2}$ 点左连续,又 $F(t)$ 在 (A) 内可导,根据罗尔定理知至少存在一个 $\xi\in(A,\frac{\pi}{2})$,使得 $F'(\xi)=0$

记 $c=\tan\xi$,则 $c\in(a,+\infty)$ 且

$0=F'(\xi)=f'(c)\sec^2\xi$. 而 $\sec^2\xi\neq 0$. 故 $f'(c)=0$

2006 年模拟

一、填空题

1. 应填小.

解 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 知 $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=0,f''(0)=0$

且存在任意小的正数 ε,当 $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 时,由极限的保号性知 $f''(x)>0,x\neq0$

所以 $x\in(-\varepsilon,0)$ 时,$f'(x)<0,f(x)$ 单调减

$x\in(0,\varepsilon)$ 时,$f'(x)>0,f(x)$ 单调增

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

2. 应填充要条件.

解 $$\lim_{x\to0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)}{x}$$

$$=f'(0)-f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)}{x}=f'(0)+f(0)$$

若 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导,则上面二式相等,得 $f(0)=0$

反之亦然.故为充要条件.

3. 应填 2.

解 由 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$,所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内严格单增;在 $(e,+\infty)$ 内严格单减,另外 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,$f(e)=k>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个不同的零点.

所以 $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$ 所以应选(B)

二、选择题

4. 应选(D).

解 (A)显然不对;(B)和(C)分别意味 $f(x)$ 的严格单增性和严格单减性,也被排除掉了.在区间 $(0,1)$ 取一点 ξ 使 $f(\xi)\neq f(0)$,显然 $(f(\xi)-f(0))$ 与 $(f(1)-f(\xi))$ 异号,而由拉格朗日中值定理可知,存在 ξ_1,ξ_2,使 $f'(\xi_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}$,$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$ 显然 $f'(\xi_1)$ 与 $f'(\xi_2)$ 异号.

5. 应选(D).

解 举例如下:(1) $f(x)=-x^2$,$g(x)=-x^4$ 显然 $f(x)$,$g(x)$ 都在 $x=0$ 处取极大值,但 $h(x)=f(x)g(x)=x^6$ 在 $x=0$ 处取极小值.

(2) $f(x)=-x^2$,$g(x)=\cos x$,$x_0=0$,这时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 点处取极大值,$f(x)g(x)$ 也在 $x=x_0$ 点处取极大值.

6. 应选(C).

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{ax^2+bx+c}-(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})]=0$

$$\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{ax^2+bx+c}-(-\sqrt{a}x-\frac{b}{2\sqrt{a}})]=0$$

可知曲线 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 有两条斜渐近线,但显然该曲线没有铅直渐近线,所以,该曲线共有两条渐近线.

7. 应选(C).

解 记 $f(x)=|x|^{1/4}+|x|^{1/2}-\cos x$,则 $f(x)$ 为偶函数.显然,当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)>0$,故只需考虑区间 $[0,1]$.因为 $f(0)=-1$,$f(1)=2-\cos 1>0$,且当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一一个实根,从而说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有两个实根.

8. 应选(C).

解 $f(x)$ 在极大值点 $x=x_0$ 的附近未必可导,故可将(A)排除掉;又极大值点不同于最大值点,故将(D)也排除了.简单地作个示意图,可知(C)是正确的.

三、计算、证明题

9. **证法一** 令 $c=\frac{a+b}{2}$,作过三点 $(a,f(a))$,$(c,f(c))$,$(b,f(b))$ 的抛物线

$$y=g(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a)+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}f(b)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)$$

存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=g''(\xi)$,而

$$g''(\xi)=\frac{4}{(b-a)^2}f(a)+\frac{4}{(b-a)^2}f(b)-\frac{8}{(b-a)^2}f(c)$$

所以 $\frac{(b-a)^2}{4}f''\xi=f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)$

证法二 用泰勒公式.记 $\frac{a+b}{2}=c$,

$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{8}(b-a)^2f''(\xi_1)$,$\xi_1\in(a,c)$

$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{8}(b-a)^2f''(\xi_2)$,$\xi_2\in(c,b)$

$$f(a)+f(b)=2f(c)+\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\right]$$

则

$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$

10. **证明** 直线 AB 的方程是

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

则显然 $g(a)=f(a)$,$g(b)=f(b)$,$g(c)=f(c)$ 所以由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=g''(\xi)$,而 $g''(x)=0$,则 $f''(\xi)=0$.

11. **证明** 因为 $f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,所以由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(a,b)$,使得 $f'(\xi_1)=g'(\xi_1)$.

记 $h(x)=f'(x)$,$k(x)=g'(x)$,在 $[a,\xi_1]$ 上考虑 $h(x)$,$k(x)$,由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,\xi_1)\subset[a,b]$,使得 $h'(\xi)=k'(\xi)$,即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

12. **证明** 令 $g(x)=f(a)+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\left[f(b)-f(a)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right]\frac{(x-a)^n}{(b-a)^n}$

易验证 $f(a)=g(a)$,$f'(a)=g'(a)$,$\cdots$,$f^{(n-1)}(a)=g^{(n-1)}(a)$,$f(b)=g(b)$,所以,存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f^{(n)}(\xi)=g^{(n)}(\xi)$.

又 $$g^{(n)}(x)=n!\frac{f(b)-f(a)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{(b-a)^n}$$

所以 $$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

13. **证明** 令 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

易知 $F(a)=F(b)=0$,且当 $a<x<b$ 时,$F(x)\neq 0$(因为 $f(x)$ 为非线性函数).设在 $c_1(a<c_1<b)$ 点,$F(c_1)\neq 0$,不妨设 $F(c_1)>0$.在 $[a,c_1]$ 与 $[c_1,b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理,可知存在 $\xi_1\in(a,c_1)$ 使

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c-a}>0$$

$\xi_2\in(c_1,b)$ 使

$$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}-\frac{F(c_1)}{b-c_1}<0$$

因而 $f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

由此可知当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$ 时，

$$|f'(\xi_1)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

而当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时

$$|f'(\xi_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

第三章　一元函数积分学

第一单元　不定积分

2004 年模拟

一、填空题

1. 应填 $-\frac{\ln x}{x}+C$.

解 $\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx=-\int(\ln x-1)d\frac{1}{x}$

$$=-\frac{\ln x-1}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{\ln x-1}{x}-\frac{1}{x}+C=-\frac{\ln x}{x}+C$$

2. 应填 $\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

解 设 $x=\tan u$，则 $dx=\sec^2udu$

原式 $=\int\frac{du}{\cos u(2\tan^2u+1)}=\int\frac{\cos udu}{2\sin^2u+\cos^2u}$

$$=\int\frac{d\sin u}{1+\sin^2u}=\arctan(\sin u)+C$$

$$=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C.$$

二、选择题

3. 应选(B).

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$

三、计算，证明题

4. **解** 原式 $=\int x(\sec^2x-1)dx=\int x d\tan x-\frac{1}{2}x^2$

$$=x\tan x-\frac{1}{2}x^2-\int\tan xdx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

5. **解** 原式 $=-\int\ln xd\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$$=\frac{1}{2-x}\ln x+\int\frac{dx}{x(x-2)}$$

$$=\frac{1}{2-x}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{x-(x-2)}{x(x-2)}dx$$

$$=\frac{1}{2-x}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2}{x}\right|+C$$

6. **解** 原式 $=\int\frac{1+x^6-x^6}{x^6(1+x^6)}dx$

$$=\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{1+x^6}$$

$$=-\frac{1}{5x^5}-\int\frac{1+x^2-x^2}{1+x^6}dx$$

$$=-\frac{1}{5x^5}-\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{3}\arctan x^3$$

又 $\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+C$$

原式 $=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3}\arctan x^3-\frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+C$$

7. **解** $x^4-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$

设 $\frac{1}{x^4-2x^2+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x+1)^2}$

上式两边乘以 $(x-1)^2$，并令 $x\to1$，得 $C=\frac{1}{4}$

上式两边乘以 $(x+1)^2$，并令 $x\to-1$，得 $D=\frac{1}{4}$，

上式两边乘以 x，并令 $x\to+\infty$，得　$0=A+B$

用 $x=0$，代入上式得 $B-A=\frac{1}{2}$. 从而 $-A=B=\frac{1}{4}$

故原式 $=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)+C$

8. **解** 原式 $=\int\frac{1+\sin x}{2\sin2x\cos x}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x\cos^2x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos^2x}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^2x}dx+\frac{1}{4}\tan x+C$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin x}+\frac{1}{4}\tan x+C$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C$$

9. **解** 原式 $=\int\frac{(1+\sqrt{x})-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x})^2-(1+x)}dx$

$$=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

$$=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{1+x}{\sqrt{x(1+x)}}dx$$