

Shu xue fuxi ziliao



# 中学数学复习资料

金 昭 范

# 中学数学复习资料

金昭范 编

河南人民出版社

## 内 容 提 要

本书采用综合的方法，将中学数学的主要内容分为函数、数和代数式的计算，方程和方程组，几何（平面、立体）等四章编写，通过比较理论概念和解证方法的异同，将数学各科之间的有关内容加以密切联系，以便学生深入理解和掌握中学数学的基本概念和理论，提高解证习题的技巧和能力，对中学生全面、系统复习数学课，将有所裨益。

本书可供高中学生复习或教师教学参考。

## 中学数学复习资料

金 昭 范 编

河南人民出版社出版

河南省新乡市印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本 9.5印张 199千字

1980年4月第1版 1980年4月第1次印刷

印数 1—120,000册

统一书号7105·111 定价0.67元

## 说 明

中学数学课本的编写方法，曾有过将代数、几何、三角等科混合编写，减少了门类，加强了科目间的联系；而缺点是打乱了各科的自成系统。一般为教学方便，遵循各科系统，由简到繁、先易后难的分科编写。这样就将数的发展、函数概念、方程解算和恒等变形以及证题作图方法，穿插进去讲授。科目一多，无形的削弱了方程、函数、计数和证题的各自特点和深入了解。尤其是学生毕业复习时感到三角、代数、几何、解析科目多，分量重；有的还分成数册，更感到忽而这忽而那，难以掌握。我们当老师的，在复习指导时，只好按照课本章节进行压缩，提要点、编提纲、举例题、选练习；事实上量少而重、简而不明；学习差的感到无从下手，好些的也感到旧事重提，一扫而过，抓不住系统要点。老师在指导时也不易深入浅出，总结提高。从个人已往教学实践中，在高中学生毕业复习时，曾将教材按四个方面，即函数、数及代数式的计算、方程和几何图形分别编写复习材料，系统明确，重点突出，前后对比，易教好学。前三方面以代数方法，结合坐标，把代数、三角、解析各科知识组织进去；后者将平面几何及立体几何合编一章。这是从学生学完各科适应毕业复习需要条件出发，它有以下几点好处：

1. 遵循发展变化观点，回顾各阶段学习内容，使知识更加系统性；

2. 各科相类问题，互相对比，统一解题方法，易于掌握

规律;

### 3. 问题分类不多, 相当集中, 容易复习.

事实上, 严格划分类别, 是有困难的. 例如, 函数与方程就是这样:  $f(x, y)=0$ , 是叫不定方程, 满足它的解是无穷多个. 若作为自变和因变量关系式来考虑, 又是隐函数概念. 函数是从变化观点, 与坐标密切联系, 从对应、连续、单调、对称……等等一系列概念, 研究图形性质的. 它又与平面几何有所不同, 如讲两直线平行条件, 解析从斜率判定, 几何用同位角等关系论证; 而方程重等价变换, 着重计算, 求得满足等式的有限个数值的解法来研究问题. 似乎是前者重解析后者重解算; 其实解析离不开计算, 解法也需要分析; 这种主从和辩证关系, 应通过复习, 使学生能够理解. 这种分类编写复习提纲方法, 也可能存在一些缺点, 望从事此项工作同志, 提出宝贵意见!

关于复习材料还有以下几点说明:

(一) 为巩固基本知识, 适当地扩大了知识面. 如行列式、根的对称函数、函数的性质等, 但都要与基本知识加以联系和说明;

(二) 为使了解方法的由来, 提高分析能力, 在举例演算中加注说明, 使既能知一题多解, 又能对比解法的繁简优劣;

(三) 性质较近的问题, 并在一节内讲述, 便于比较其异同. 如指数与对数, 指数方程与对数方程, 分式方程与无理方程, 正反三角方程等等;

(四) 对较难学习的知识举例论述较详, 如三角方程、

行列式、复数计算、同解方程组等等，总是本着不必再看课本即可学懂会用；

（五）少数定理作为例题引出，以加强基本知识的应用。如解析几何中的部分公式；

（六）凡重要知识，下面都加划曲线，以期醒目，引起注意；

（七）本巩固基本概念和基本解题方法，始终采用分析、对比、统一方法，对概念论述尤为重视。以期通过复习能达到概念清晰，方法简化的目的；

（八）选例约有百余，连同小题目及分析解法，一题多解，比较全面，足够复习讲解和自修的参考；

（九）每章之后选录部分习题，备作参考练习之用；

（十）所有内容并无新颖之处，不过重行收编整理而已，不当之处尚请读者指正。

书稿在编写过程中，蒙张顺芳同志提出宝贵意见，帮助修改制图，促印成书，特致谢意！

编 者

# 目 录

|                                      |        |
|--------------------------------------|--------|
| 第一章 函数 .....                         | ( 1 )  |
| §1.1 数和量 .....                       | ( 1 )  |
| §1.2 常量与变量 .....                     | ( 1 )  |
| §1.3 函数的定义域和值域 .....                 | ( 2 )  |
| §1.4 函数的表示法与符号 .....                 | ( 3 )  |
| §1.5 显函数与隐函数 .....                   | ( 3 )  |
| §1.6 函数的分类 .....                     | ( 4 )  |
| §1.7 函数的性质 .....                     | ( 4 )  |
| §1.8 复合函数、反函数概念 .....                | ( 6 )  |
| §1.9 一次函数的研究 .....                   | ( 9 )  |
| §1.10 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ..... | ( 19 ) |
| §1.11 圆锥曲线 .....                     | ( 21 ) |
| §1.12 圆锥曲线问题举例 .....                 | ( 29 ) |
| §1.13 指数函数与对数函数 .....                | ( 36 ) |
| §1.14 三角函数与反三角函数 .....               | ( 39 ) |
| §1.15 极坐标 .....                      | ( 48 ) |
| §1.16 参数方程 .....                     | ( 53 ) |
| 习 题 一 ( 附答案 ) .....                  | ( 57 ) |
| 第二章 数和代数式 .....                      | ( 66 ) |
| §2.1 数的分类 .....                      | ( 66 ) |
| §2.2 数的计算的基本知识 .....                 | ( 67 ) |
| §2.3 算术中数的计算 ( 择要 ) .....            | ( 68 ) |
| §2.4 代数式的化简和计算 .....                 | ( 71 ) |
| §2.5 因式分解和分式运算 .....                 | ( 73 ) |
| §2.6 指数式和根式的运算 .....                 | ( 81 ) |

|                                      |         |
|--------------------------------------|---------|
| §2.7 对数的计算 .....                     | ( 86 )  |
| §2.8 数列的计算 .....                     | ( 90 )  |
| §2.9 排列、组合和二项式定理(附数学归纳法) .....       | ( 96 )  |
| §2.10 复数的计算 .....                    | ( 106 ) |
| 习 题 二 (附答案) .....                    | ( 114 ) |
| <b>第三章 方程和方程组</b> .....              | ( 122 ) |
| §3.1 方程的概论 .....                     | ( 122 ) |
| §3.2 方程组的概念 .....                    | ( 125 ) |
| §3.3 二次方程 .....                      | ( 126 ) |
| §3.4 一元 $n$ 次方程的解法 .....             | ( 128 ) |
| §3.5 无理方程和分式方程 .....                 | ( 132 ) |
| §3.6 指数方程和对数方程 .....                 | ( 135 ) |
| §3.7 三角方程 .....                      | ( 141 ) |
| §3.8 方程组 ( I ) (二元一次方程组) .....       | ( 152 ) |
| §3.9 方程组 ( II ) (方程组可由二次方程得解的) ..... | ( 157 ) |
| §3.10 不等式和不等式组 .....                 | ( 166 ) |
| §3.11 用行列式解方程组 .....                 | ( 170 ) |
| 习 题 三 (附答案) .....                    | ( 177 ) |
| <b>第四章 平面和立体几何</b> .....             | ( 183 ) |
| §4.1 概 论 .....                       | ( 183 ) |
| §4.2 解证问题的规则和注意事项 .....              | ( 184 ) |
| §4.3 证题方法 .....                      | ( 193 ) |
| §4.4 证明题举例 .....                     | ( 200 ) |
| §4.5 轨迹和作图题 .....                    | ( 215 ) |
| §4.6 类比平面几何与立体几何的关系 .....            | ( 234 ) |
| §4.7 立体几何中的几个主要问题 .....              | ( 242 ) |
| §4.8 立体几何解证题举例 .....                 | ( 249 ) |
| 习 题 四 (附题解) .....                    | ( 265 ) |

# 第一章 函 数

## §1.1 数和量

数和量的概念不要混同起来。数总是抽象的，因为它是从一次一次度量具体事物所得的结果。数常是单一的，本身不会有什么改变的。如用2表示布长也好、物重也好，2这个数是单一、抽象而不变的。相反，量总是具体的，总好象是无定形的，有极易改变的倾向。且量的种类比起数来又多得多，如物理的、化学的、几何的、……等等各又分许多类。在度量时各选其同种类的为单位，度量后所得到的抽象的数，就叫做该量的数值。

所以，量的数值总是抽象的数。

数学是研究具体事物的重要工具。中学数学的内容，由于用文字代表数，并引入变量和极限概念，建立坐标系，采用解析法，在计算范围和方法上，不断扩大和发展它；利用变量间的制约关系，反映客观世界中的许多实际问题，从而充分显示出函数知识的重要性。

## §1.2 常量与变量

我们所观察到的量，相对的说有常量与变量之分。例如，圆的周长是依半径的长短而变化的，其制约的函数关系可用：周长  $c = \pi d$ ，其中  $c$  和  $d$ （直径）虽可改变，而  $\pi$  则永不改变。可见是量有两种：可改变的量叫做变量，不可改变的量叫做常量。变量常用末尾几个拉丁字母如  $x, y, z$  及  $t, u,$

$v$ 、 $w$ 等来表示其值，常量则用开头几个字母如  $a$ 、 $b$ 、 $c$  等来表示其值。

### §1.3 函数的定义域和值域

就上例  $c = \pi d$  而论， $d$  每取一个数值， $c$  就有一个确定的值与它对应，由  $d$  的改变而  $c$  亦随着一一对应的变化着。但是  $d$  也不能随意取值一如取负数。只能在  $d \geq 0$  的范围内选取，因之，周长  $c$  也有一定的范围。我们叫变量  $c$  是自变量  $d$  的函数。自变量  $d$  的许可范围叫做函数的定义域，函数  $c$  的范围叫做值域。定义如下：

当自变量  $x$  取一个许可的值，变量  $y$  有唯一确定的值与之对应，就叫做  $y$  是  $x$  的函数。自变量取值的许可范围叫做函数的定义域；函数的数值范围叫值域。

区间：用语言说明函数的定义域很不方便，为表示明确且便于书写起见，常用区间这一术语。区间是介于两个实数间的全体实数。那两个实数叫做区间的端点。区间又分四种情况，其记号如下：

设  $a$ 、 $b$  为实数，且  $a < b$ ，

|    |   |                                                                  |
|----|---|------------------------------------------------------------------|
| 区间 | { | 开区间：满足不等式 $a < x < b$ ，记号为 $(a, b)$ ，                            |
|    |   | 闭区间：满足不等式 $a \leq x \leq b$ ，记号为 $[a, b]$ 。                      |
|    |   | 半开区间：满足不等式 $a < x \leq b$ ，记号为 $(a, b]$ 。                        |
|    |   | 或 $a \leq x < b$ ，记号为 $[a, b)$ 。                                 |
|    |   | 无穷区间：满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 时，可记为 $(-\infty, +\infty)$ 等。 |

例如：指数函数及其定义域当  $a > 0$  时可写成  $y = a^x (-\infty, \infty)$ ；反正弦函数及其定义域可写为： $y = \arcsin x [-1, 1]$ ；

分函数  $y = \frac{x}{x-1}$  ( $-\infty, 1$ ); ( $1, \infty$ ). 等等.

### §1.4 函数的表示法与符号

〈一〉解析法: 两个变量间的关系借助于公式(解析式)直接表示. 如  $y=2x+1$ ,  $y=2x^2$ ,  $y=\sin x$  等等.

〈二〉图示法: 通过坐标画上函数的图形, 就叫做图示法. 如  $y=x^2+3x+1$ , 画出图形是一条抛物线.

〈三〉列表法: 把自变量数值与对应的函数值列成表. 如乘法表、开方表、对数表、三角函数表等.

〈四〉语言文字给定法: 用语言、文字叙述表达变量间的关系. 如轨迹问题的叙述就是一例.

在一个问题中, 同一个函数关系, 有时常多次提到, 反复书写不胜其繁; 我们就用符号来缩写它, 如  $y=f(x)$ . 记号  $f(x)$  表示含自变量  $x$  的式子, 省写一大堆的东西, 而在客观世界中, 依赖于  $x$  的变量  $y$ , 变化的规律的数学结构式还不曾找到时, 用缩写表达更为方便. 若问题中不同的表达式有多个时, 则可用  $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$  或  $F(x)$ 、 $\phi(x)$  等等加以区分.

### §1.5 显函数与隐函数

例如在直线  $Ax+By+C=0$  中,  $x$  及  $y$  不能各自独立取值, 即虽表示变量间的函数关系, 却未指明谁是自变量, 谁是因变量(函数), 我们把这种情况用符号  $F(x, y)=0$  表示, 叫做隐函数; 若把直线方程变成  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ , (其中  $B \neq 0$ ), 则自变量与函数在式中明确表出, 符号用  $y=f(x)$ , 就叫做显函数.

## §1.6 函数的分类

函数常按照计算式 $f(x)$ 和 $F(x, y)$ 中解析运算的特征, 来进行分类; 兹列简表如下:

|             |      |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 函数<br>(初等的) | 代数函数 | 多项式: 对于 $x$ 施以有限次数的加、减、乘三种运算。<br>有理函数: 对 $x$ 施以有限次的加、减、乘、除四种运算。<br>显代数函数: 对于 $x$ 施以有限次数的加、减、乘、除和任意次的乘方(包括开平方, 开立方……, )等五种运算。<br>隐代数函数: 如 $F(x, y)=0$ , 未就 $y$ 解出的方程, 叫做 $y$ 是自变量 $x$ 的隐函数。                                                           |
|             | 超越函数 | 幂超越函数: 自变量的指数为无理数。例 $y=x^a$ (如 $a=\sqrt{2}$ )。<br>指数函数: 自变量在指数中。如 $2^x$ , $a^x$ 等。<br>对数函数: 自变量在对数符号之后。如 $\log_a x$ , $\lg x$ 等。<br>三角函数: 如 $\sin x$ , $\operatorname{tg} 2x$ 等。<br>反三角函数: 如 $\operatorname{Arcsin} x$ , $\operatorname{arctg} x$ 等。 |

## §1.7 函数的性质

函数的研究, 主要是认识函数值随自变量而改变的规律。为使这种规律更加直观形象, 便于印证明了起见, 常伴以坐标法作出函数的图象。一般采用直角坐标系, 用解析方法找出函数的特性, 标定部分的对应点, 进行描述。这样形数结合, 函数的性质, 就在函数曲线中全部反映出来, 反之

图象上的任何点都满足函数的解析表达式，两相对照，更易了解。中学数学中所研究的函数性质，主要的有下列各点：

〈一〉连续性\*：若 $f(x)$ 在点 $x=c$ 时，有唯一的确定的值，叫做 $f(x)$ 在该点连续。若在某区间内的 $x$ 值都满足上述条件，就叫做 $f(x)$ 在该区间内连续。

在 $x=c$ 连续的两个函数，其和、差、积、商（除式不为零）所组成的函数，仍是连续函数。初等超越函数在它的定义域内的任何点都是连续的。

〈二〉单值性与多值性：定义函数时，强调了当自变量 $x$ 有一个许可值，函数只有一定确定的值；明确了唯一和确定的概念，这种函数就叫做单值函数。

函数值也常有当 $x$ 是某一许可值时，它有二个或二个以上的值，这种函数就叫做多值函数。

例如： $y=x^3$ ， $y=\log_a x$ ，都是在定义域内的单值函数。而 $y=\pm\sqrt{x}$ ， $y=\text{Arcsin}x$ 都是多值的。但 $y=\pm\sqrt{x}$ 分开作为两个函数看待：如 $y=\sqrt{x}$ 及 $y=-\sqrt{x}$ 则又都是单值的。 $y=\arcsin x$ 是表示主值区间内的单值函数。

〈三〉奇偶性：在函数 $y=f(x)$ 中若满足 $f(-x)=-f(x)$ 时，就叫做奇函数。若满足 $f(x)=f(-x)$ 时，就叫做偶函数。

例如： $y=x^2$ ， $y=\cos x$ ，都是偶函数； $y=\sin x$ ， $y=x^3$ 都是奇函数。而 $y=\sin x + \cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数。

偶函数是以 $y$ 轴为对称轴；奇函数以原点为中心对称，没

---

\* 函数连续性的概念，是很重要的；要严密讨论，须用变量的极限理论，定义比较繁琐难懂；故仅作如上介绍。详论可参看高等数学（因它超出了现有中学教材范围，故不赘述）。

有对称轴。

〈四〉单调性：若函数在区间内随  $x$  的增加而增加，则称函数为单调增加。

例如： $y=2x+3$  及  $y=x^2[0, \infty)$  都是单调增函数。

若函数在区间内随  $x$  值的增加，而函数值反而减少，则称函数为单调减少，或称为单调减函数。

例如： $y=-x+2$ ，及  $y=x^2(-\infty, 0]$  为单调减函数。

函数的单调增加和单调减少的统称为单调函数\*。

〈五〉对称性：若函数  $f(x, y)$  满足  $f(x, y)=f(-x, y)$  时，它是以  $y$  轴为对称轴的对称形。

若函数  $f(x, y)$  满足  $f(x, y)=f(x, -y)$  时，它是以  $x$  轴为对称轴的对称形。

若同时满足上述两条件时，则是以两条对称轴的交点为中心的对称形。

例如： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，是以  $X$  轴和  $Y$  轴为轴的对称形，

又是以原点为中心的对称形。

〈六〉周期性：若函数  $f(x)$  在其定义域内满足  $f(x+l)=f(x)$  时， $f(x)$  叫做周期性函数。其中  $l$  的最小正数叫做周期。

例如： $\sin x = \sin(x+2\pi)$  是周期函数，而  $2\pi$  是它的周期，

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi)$  是周期函数，而  $\pi$  是它的周期。

### §1.8 复合函数、反函数概念

---

\*  $y=x^2(-\infty, +\infty)$  则不能叫单调函数。

这两个函数概念，在研究函数时也很重要，兹分别概述如下：

〈一〉复合函数：例如， $y = \sin x^3$ ，若令  $u = x^3$ ，以符号表示时，如  $u = \varphi(x)$ ；则  $y = \sin x^3$  可写成  $y = \sin u$ ，用符号  $y = f(u)$ ，最后可写成  $y = f[\varphi(x)]$ 。这样函数  $y$  就叫做函数的函数，叫做复合函数。

〈二〉反函数：

①反函数概念：

先举直线  $y = 2x + 3$  作为正函数，自变量  $x$  的每个实数值，对应着  $y$  的唯一函数值；

若取  $x = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

则  $y = -1, 1, 3, 5, 7, \dots$

它们的一一对应关系，可用下图中由上向下的箭头表示出来。

反之，若把  $y$  作为自变量，原来函数式可写成  $x = \frac{y-3}{2}$ ，

对于  $y$  的每个值， $x$  也是只有唯一的值与之对应。对应关系同样可用图中向上箭头示之。

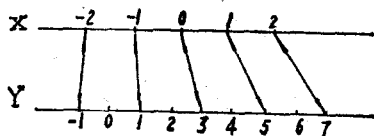


图 1-1

从这个例子看， $x$  与  $y$  间的对应关系和反过来  $y$  与  $x$  间的对应关系都是互为单值的对应关系。 $y = 2x + 3$  就计算结构

来说：“是 2 倍自变量后加 3”；而  $x = \frac{y-3}{2}$ ，则是“自变量

减3后用2除”。象这样的互为单值的对应的函数关系就叫互为反函数。

通常的正函数与反函数，一般都用同一个字母表自变量，这样函数如

$$y=2x+3 \text{ 及 } y=\frac{x-3}{2} \text{ 是互为反函数，}$$

再例如  $y=x^3$  及  $y=\sqrt[3]{x}$  也是互为反函数的。

但是  $y=x^2$  与  $x=\pm\sqrt{y}$ ，因为不是互为单值的对应关系，就不能叫互为反函数。

如果对函数  $y=x^2$  加以限制条件，自变量  $x\geq 0$  时，它就有反函数  $x=\sqrt{y}$ ；若限制条件是  $x\leq 0$ ，也就有了反函数  $x=-\sqrt{y}$ 。

事实上，加上限制条件的函数  $y=x^2$  就具有单调连续的性质。故单调连续的函数都具有反函数。

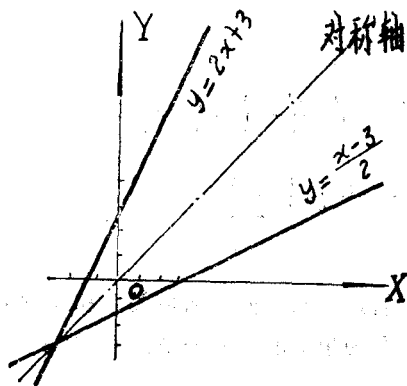


图 1-2

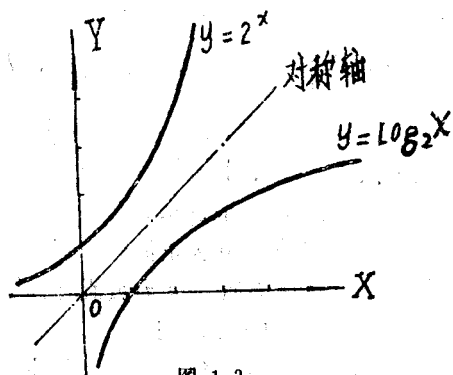


图 1-3

## ② 互为反函数的图象间的位置关系:

从上面图中可知互为反函数的  $y=2^x+3$  与  $y=\frac{x-3}{2}$  的图象位置关系;或是互为反函数的指数函数  $y=a^x$  与对数函数  $y=\log_a x$  的图象位置关系,都是对称于第一及第三象限角的平分线的.正函数图象上的每一点,都有反函数图象上的对称于上述平分线的一点与它对应;反过来说也是这样.

以上所述,是函数的一般基础知识.对函数的研究,常分两种问题:

- 从函数的给定条件(轨迹条件)求出其解析表达式,结合图象讨论其性质.
- 从已知函数解析式,分析论断是属何种轨迹,便于作出图象.

### §1.3 一次函数的研究

〈一〉二元一次方程  $Ax+By+C=0$

二元一次方程  $Ax+By+C=0$  的图象是一条直线,所以